Geometrie

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 74 (1949), No. 4, 247--280

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122477

4. B sekce:

Geometrie.

TEČNÉ AFINITY KORESPONDENCÍ.

VÁCLAV ALDA, Praha.

Sdělení bude uveřejněno v *Časopise pro pěstování matematiky a fysiky*, **75** (1950), pod názvem *Sur les propriétés affines des correspondances analytiques.*

*

Résumé. — Výtah.

Sur les affinités tangentes des correspondances analytiques.

VÁCLAV ALDA, Praha.

La communication va paraître sous le titre *Sur les propriétés affines des correspondances analytiques* dans *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, **75** (1950).

ALGEBRAICKÉ KORESPONDENCE NA ABSTRAKTNÍCH VARIETÁCH.

JAN BÍLEK, Praha.

V této práci je předpokládána znalost vět 26 a 27 uvedených na str. 105 knihy A. WEIL: *Foundations of algebraic Geometry* (1946).

V tomto výtahu jsou uvedeny jen hlavní výsledky práce.

Nechť **k** je společné těleso z definice pro algebraické variety V a W.

Definice. Podvarietu $T \subset V \times W$ jmenujeme *algebraickou korespondencí* mezi varietami V a W, když projekce variety T na V je rovna V a projekce variety T na W je rovna W.

Věta I. Buď $T \subset V \times W$ algebraická korespondence mezi varietami V a W, **k** společné těleso z definice pro T, V, W. Nechť P je obecný bod

$\epsilon\, V$ nad $\mathbf{k}$ a L_i^W $(i = 1, \ldots, \alpha)$ jemu odpovídající variety na W. Nechť dále Q je obecný bod $\epsilon\, W$ nad $\mathbf{k}$ a M_j^V $(j = 1, \ldots, \beta)$ jemu odpovídající variety na V. Potom všechny variety L_j^W (M_j^V) jsou *algebraické* nad $\mathbf{k}(P)$, $[\mathbf{k}(Q)]$ a jsou konjugovanými obrazy nad $\mathbf{k}(P)$, $[k(Q)]$. Všechny variety L_i^W mají stejnou dimensi nad tělesem $\overline{\mathbf{k}(P)}$ a podobně všechny variety M_j^V mají stejnou dimensi nad tělesem $\overline{\mathbf{k}(Q)}$.

(Přitom je $\alpha = [\mathbf{k}_1 : \mathbf{k}(P)]_s$, kde význam symbolu je uveden na str. 9 citované Weilovy knihy, a kde $\mathbf{k}_1$ je nejmenší těleso z definice obsahující těleso $\mathbf{k}(P)$ pro maximální podvarietu $Z \subset T$, jež má za projekci na V bod P. Podobně β.)

Věta 2. (Princip konstant.)

Když v t-dimensionální algebraické korespondenci T^t mezi varietami V^r a W^s, o společném tělese $\mathbf{k}$, obecnému bodu P nad $\mathbf{k}\,\epsilon\, V$ odpovídá na W, α, d-dimensionálních nad $\mathbf{k}(P)$ konjugovaných variet a obecnému bodu Q nad $\mathbf{k}\,\epsilon\, W$ odpovídá β, δ-dimensionálních nad $\mathbf{k}(Q)$ konjugovaných variet, pak je $t = r + d = s + \delta$.

Věta 3. Nechť V a W jsou dvě variety definované nad tělesem $\mathbf{k}$; nechť P, Q jsou obecné body $\epsilon\, V$ a $\epsilon\, W$ nad $\mathbf{k}$. Potom existuje algebraická korespondence T, definovaná nad k mezi V a W taková, že bod $P \times Q$ je obecný bod nad $\mathbf{k}\,\epsilon\, T$, když a jen když $\mathbf{k}(P, Q)$ je regulární rozšíření nad k.

*

Summary. — Výtah.

The algebraic correspondences between algebraic varieties.

JAN BÍLEK, Praha.

Let $\mathbf{k}$ be a common field of definition for algebraic varieties V and W.

Definition: A subvariety $T \subset V \times W$ is called algebraic correspondence between two varieties V and W, if the projection of T on V is V and the projection of T on W is W.

Proposition I. Let $T \subset V \times W$ be an algebraic correspondence between two varities V and W, $\mathbf{k}$ common field of definition for T, V, W. Let P be a generic point $\epsilon\, V$ over $\mathbf{k}$ and L_i^W $(i = 1, \ldots, \alpha)$ the corresponding varieties on W. Let Q be a generic point $\epsilon\, W$ over $\mathbf{k}$ and M_j^V $(j = 1, \ldots, \beta)$ the corresponding varieties on V. Then all varieties L_i^W, $[M_j^V]$ are algebraic over $k(P)$ $[k(Q)]$ and are the conjugates over $\mathbf{k}(P)$, $[\mathbf{k}(Q)]$. All varieties L_i^W are of the same dimension over the field $\overline{\mathbf{k}(P)}$ and similary all varieties M_j^V are of the same dimension over the field $\overline{\mathbf{k}(Q)}$.

$[\overline{\mathbf{k}(P)}$ is the algebraic closure of $\mathbf{k}(P)]$. For the meaning of the symbol $\alpha = [\mathbf{k}_1 : \mathbf{k}(P)]_s$ see A. WEIL, *Foundations of algebraic geometry*, page 9. $\mathbf{k}_1$ is the smallest field of definition for the maximal subvariety $Z \subset T$, which contains the field $\mathbf{k}(P)$, with the projection P on V. Similary β.

Proposition 2. (*The principle of constants.*) If in the t-dimensional algebraic correspondence T^t between two varieties V^r and W^s with common field of definition $\mathbf{k}$, to the generic point $P \in V$ over k correspond on W, α, d-dimensional varieties conjugate over $\mathbf{k}(P)$ and to the generic point $Q \in W$ over $\mathbf{k}$ correspond β, δ-dimensional varieties conjugate over $\mathbf{k}(Q)$, then is $t = r + d = s + \delta$.

Proposition 3. Let V and W be two varieties over the common field $\mathbf{k}$; let P, Q be the generic points $\in V$ and $\in W$ over $\mathbf{k}$. Then there exists an algebraic correspondence T defined over $\mathbf{k}$ between V and W, such that the point $P \times Q$ is the generic point of T over $\mathbf{k}$ if and only if $\mathbf{k}(P, Q)$ is the regular extension over $\mathbf{k}$.

POZNÁMKY K THEORII KONFIGURACE $(12_4, 16_3)$.

BOHUMIL BYDŽOVSKÝ, Praha.

Vedeme-li z tří bodů kubiky rodu jedna, které leží v přímce, tečny k této křivce, dostaneme dvanáct dotykových bodů, které tvoří konfiguraci $(12_4, 16_3)$, jak ukázal v r. 1848 HESSE. Odtud se nazývá tato *konfigurace Hesseova*. R. 1939 dokázal ZACHARIAS, že body každé konfigurace $(12_4, 16_3)$, jejíž schema se shoduje se schematem Hesseovy konfigurace, leží na kubice a je to tedy vždy konfigurace Hesseova.

R. 1889 uvedl J. de VRIES[1]) konfiguraci $(12_4, 16_3)$ různou od konfigurace Hesseovy, kterou budu v dalším stručně nazývati de Vriesovou. Označíme-li body konfigurace u_i, v_i, w_i pro $i = 1, 2, 3, 4$ a vyjádříme-li okolnost, že tři body leží v přímce, tím, že je napíšeme vedle sebe, je de Vriesova konfigurace vyjádřena schematem:

$$\begin{array}{llll} u_1v_1w_1, & u_2v_1w_2, & u_3v_1w_3, & u_4v_1w_4, \\ u_1v_2w_2, & u_2v_2w_1, & u_3v_2w_4, & u_4v_2w_3, \\ u_1v_3w_3, & u_2v_3w_4, & u_3v_3w_2, & u_4v_3w_1, \\ u_1v_4w_4, & u_2v_4w_3, & u_3v_4w_1, & u_4v_4w_2. \end{array}$$

Lze dokázati, že také body této konfigurace leží na kubické křivce. Učiním to podle jednoduchého způsobu, kterého užil Dr METELKA ve své práci o konfiguracích $(12_4, 16_3)$.[2]) Uvažujme tři přímky konfigurace

[1]) J. de VRIES: „*Ueber gewisse ebene Konfigurationen*“ *Acta mathematica*, **12** (1889), str. 67.

[2]) J. METELKA: „*O jistých konfiguracích* $(12_4, 16_3)$ *v rovině*“. Věstník Král. čes. spol. nauk, XXI (1944).

$$u_1v_1w_1 \text{ a další tři přímky } u_1v_3w_3$$
$$u_2v_3w_4 \qquad u_2v_2w_1$$
$$u_4v_2w_3 \qquad u_4v_1w_4.$$

Tyto dvě trojice přímek tvoří dvě rozložitelné kubiky, které mají společné body $u_1, u_2, u_4, v_1, v_2, v_3, w_1, w_3, w_4$. Těchto devět bodů tvoří tedy basi svazku kubických křivek; v tomto svazku určeme kubiku K, která obsahuje další bod u_3. Avšak také body $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_4, w_1, w_3, w_4$ tvoří basi svazku kubických křivek, neboť jsou to společné body dvou rozložitelných kubik, jež se skládají vždy z tří přímek konfigurace, totiž

$$u_1v_4w_4 \text{ a } u_1v_1w_1,$$
$$u_2v_2w_1 \quad u_2v_4w_3,$$
$$u_3v_1w_3 \quad u_3v_2w_4.$$

Kubika K obsahuje osm z těchto devíti bodů base a tudíž, dle základní věty platící o průseku dvou kubik, také devátý, t. j. bod v_4. Uvažujeme-li rozložitelné kubiky

$$u_1v_1w_1, \; u_1v_3w_3,$$
$$u_2v_4w_3, \; u_2v_1w_2,$$
$$u_3v_3w_2, \; u_3v_4w_1,$$

dokážeme zcela obdobně, že kubika K obsahuje také bod w_2, i obsahuje všechny body konfigurace.

Vzniká otázka, je-li kubika K rodu jedna či rodu nula.

I. Je-li rodu jedna, vyjádříme její body známým způsobem užitím eliptického parametru; parametr příslušný bodu konfigurace na kubice označíme týmž písmenem, jako bod sám. Je známo, že lze eliptický parametr vždy voliti tak, aby kolineárnost tří bodů byla vyjádřena tím, že součet jejich parametrů je kongruentní s nulou. I je pak hořejší konfigurace vyjádřena těmito šestnácti kongruencemi:

$$u_1 + v_1 + w_1 \equiv 0, \; u_2 + v_1 + w_2 \equiv 0, \; u_3 + v_1 + w_3 \equiv 0,$$
$$u_1 + v_2 + w_2 \equiv 0, \; u_2 + v_2 + w_1 \equiv 0, \; u_3 + v_2 + w_4 \equiv 0,$$
$$u_1 + v_3 + w_3 \equiv 0, \; u_2 + v_3 + w_4 \equiv 0, \; u_3 + v_3 + w_2 \equiv 0,$$
$$u_1 + v_4 + w_4 \equiv 0, \; u_2 + v_4 + w_3 \equiv 0, \; u_3 + v_4 + w_1 \equiv 0,$$
$$u_4 + v_1 + w_4 \equiv 0,$$
$$u_4 + v_2 + w_3 \equiv 0,$$
$$u_4 + v_3 + w_1 \equiv 0,$$
$$u_4 + v_4 + w_2 \equiv 0,$$

jichž řešením se obdrží: u_1, v_1 libovolné a dále

$$u_2 \equiv u_1 + \omega_1, \; u_3 \equiv u_1 + \tfrac{1}{2}\omega_1, \; u_4 \equiv u_1 + \frac{3\omega}{2},$$

$$v_2 \equiv v_1 + \omega_1, \; v_3 \equiv v_1 + \tfrac{1}{2}\omega_1, \; v_4 \equiv v_1 + \frac{3\omega}{2},$$

$$w_1 \equiv -u_1 - v_1, \; w_2 \equiv -u_1 - v_1 + \omega_1, \; w_3 \equiv -u_1 - v_1 + \frac{3\omega}{2}, \; w_4 \equiv -u_1 - v_1 + \tfrac{1}{2}\omega_1,$$

kde $2\omega_1$ je (kterákoli) primitivní perioda eliptické funkce. Geometrická interpretace tohoto řešení vede k výsledku:

Zvolíme tři body kubiky v přímce. Z každého vedeme ke kubice dvě tečny a to vesměs dvojice téže soustavy (charakterisované totiž touž poloperiodou). Ze šesti dotykových bodů vedeme zase dvojice tečen téže soustavy. Dvanáct dotykových bodů tvoří *konfiguraci de Vriesovu.*

II. Je-li kubika rodu nula s bodem uzlovým, vyjádříme souřadnice jejího bodu parametricky v tvaru

$$x_1 = 6t,\ x_2 = 6t^2,\ x_3 = 1 + t^3,$$

takže podmínka kolineárnosti tří bodů křivky zní

$$t_1 t_2 t_3 = -1.$$

Úvahou zcela obdobnou předchozí zjistíme, že platí také týž výsledek, při čemž ovšem netřeba mluviti o dvojici tečen téže soustavy, ježto ke kubice rodu nule s uzlovým bodem lze z jejího bodu položiti vůbec jen dvě tečny.

Nabyli jsme tedy zajímavého výsledku, že body *konfigurace de Vriesovy mohou ležeti na kubice rodu jedna nebo na kubice rodu nula s uzlovým bodem.* Tomu tak není s konfigurací Hesseovou ani s konfigurací, kterou jsem nalezl r. 1939,[3]) ani s konfigurací, kterou nalezl Dr J. METELKA,[2]) jichž body leží jen na kubice rodu jedna.

*

Résumé. — Výtah.

Quelques remarques concernant la théorie de la configuration $(12_4, 16_3)$.

BOHUMIL BYDŽOVSKÝ, Praha.

L'auteur fait voir que la configuration $(12_4,\ 16_3)$ de J. de Vries[1]) est telle que ses points sont sittués sur une cubique; cete cubique peut être de genre un, mais aussi de genre zéro, le point double étant un point nodal. Ce dernier fait est intéressant puisque ni la configuration $(12_4, 16_3)$ bien connue de Hesse, ni celles trouvées par l'auteur[3]) et par J. Metelka,[3] ne possédent cette propriété, étant situées toujours sur une cubique de genre un.

POZNÁMKA K ORTOGONÁLNEMU PRIEMETU ROTAČNÝCH PLÔCH.

GABRIEL ČENĚK, Bratislava.

Pre ortogonálny priemet rotačnej plochy je možno dokázať vetu: Ortogonálny priemet ktoréhokoľvek meridiánu rotačnej plochy je pers-

[3]) B. BYDŽOVSKÝ: „*Ueber eine ebene Konfiguration*" $(12_4, 16_3)$, Věstník Král. české společnosti nauk, 1939.

pektívne afinný ku krivke, ktorú vyplnia ohniská priemetov jednotlivých rovnobežkových kružníc. Osou afinity je priemet osi rotácie a pár zodpovedajúcich bodov je priemet bodu meridiánu a ohnisko eliptického priemetu rovnobežkovej kružnice tohože bodu.

Pomocou tejto vety vieme uľahčiť konštruktívne riešenie úloh o ortogonálnom priemete rotačných plôch, najmä úlohy o obryse plochy, o bodoch vratu obrysu, o konštrukcii involúcie sdružených tangent v ľubovoľnom bode plochy. Veľké zjednodušenie dáva využitie tejto vety pri konštrukcii preniku rotačných plôch so spoločnou osou rotácie a pri konštrukcii priesečíkov priamky s rotačnou plochou.

*

Résumé. — Výťah.

Remarque concernant la projection orthogonale des surfaces de révolution.

GABRIEL ČENĚK, Bratislava.

L'auteur fait voir le théorème suivant: La projection orthogonale d'un méridien d'une surface de révolution est dans la correspondance *perspective* — affine avec la courbe formée par les foyers des projections des cercles de la surface. L'axe d'affinité, est la projection de l'axe de rotation, et un couple de points correspondants est formé par la projection d'un point du méridien et par le foyer de la projection du cercle passant par ce point sur la surface. A l'aide de ce théorème on résout plus aisément les problèmes constructifs concernant la projection orthogonale des surfaces de révolution, s'il s'agit, avant tout, de construire les contours des projections des surfaces, les points de rebroussement du contour, l'involution des tangentes conjuguées dans un point arbitraire d'une surface. Quand il s'agit de construire la courbe commune aux surfaces de révolution ayant le même axe de rotation ou de trouver les points d'intersection d'une droite avec une surface de révolution, l'application de ce théorème permet de simplifier considérablement la construction.

O ZNACZENIU GEOMETRYCZNYM KRZYWIZNY I TORSJI GEODEZYJNEJ DLA KRZYWYCH POŁOŻONYCH NA WIELOWYMIAROWYCH HIPERPOWIERZCHNIACH.

STANISŁAW GOŁAB i TADEUSZ WRÓBEL, Kraków.

(Referat wygłoszony przez St. Gołąba.)

Dla krzywych położonych na dwuwymiarowych powierzchniach zanurzonych w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej znane są dobrze pojęcia krzywizny geodezyjnej i normalnej oraz torsji geodezyjnej, będące skalarnymi niezmiennikami. Pojęcia te można uogólnić dla krzywych położonych na $(n-1)$-wymiarowych hiperpowierzchniach zanurzonych w n-wymiarowej przestrzeni riemannowskiej.

Na drodze analitycznej można te pojęcia wprowadzić następująco. Z każdym punktem krzywej C kojarzymy układ wektorów jednostkowych i wzajemnie ortogonalnych:

$$\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n \tag{1}$$

tak, by wektor $\mathbf{t}_1$ był styczny do krzywej C, wektor $\mathbf{t}_n$ normalny do hiperpowierzchni, zaś pozostałe wektory

$$\mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_{n-1}, \tag{2}$$

leżały w hiperpłaszczyźnie stycznej do hiperpowierzchni. Oczywiście dla $n \geqq 4$ układów takich istnieje ∞ wiele.

Pisząc równania Freneta dla układu (1) otrzymamy związki

$$D\mathbf{t}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{t}_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

gdzie D oznacza symbol kowariantnej pochodnej, zaś α_{ij} są skalarnymi współczynnikami (funkcjami parametru krzywej C) spełniającymi związki:

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Wykazałem[1]), że można się tak urządzić, aby współczynniki α_{ij} czyniły zadość związkom dodatkowym:

$$\alpha_{\lambda\mu} \equiv 0 \quad (\lambda, \mu = 2, \ldots, n-1). \tag{5}$$

Układy (1), dla których zachodzą związki (5), będę nazywał „wyróżnionymi". Dla $n = 3$ jest (5) spełnione automatycznie, dla $n \geqq 4$ istnieje ∞ wiele układów „wyróżnionych". Mając dany jeden układ „wyróżniony" otrzymujemy wszystkie inne, poddając układ (2) dowolnej transformacji ortogonalnej.

Wykazałem, że

$$\alpha_\mu = \alpha_{1\mu} \quad (\mu = 2, \ldots, n-1) \tag{6}$$

transformują się jak składowe wektora kontrawariantnego euklidesowej przestrzeni $(n-2)$-wymiarowej, gdy przechodzimy od jednego układu „wyróżnionego" do innego „wyróżnionego".

Podobnie transformują się współczynniki

$$\beta_\mu = \alpha_{\mu n} \quad (\mu = 2, \ldots, n-1). \tag{7}$$

Wreszcie współczynnik

$$\gamma = \alpha_{1n} \tag{8}$$

jest skalarnym inwariantem. Stąd dalej wynika, że są skalarnymi niezmiennikami wielkości

[1]) ST. GOŁĄB: *Généralisation des équations de Bonnet-Kowalewski dans l'espace à un nombre arbitraire de dimensions*, Ann. Soc. Pol. Math., **22** (1949), 97—156.

$$
\left\{
\begin{aligned}
\alpha &= \sqrt{\sum_{\mu=2}^{n-1} \alpha_\mu} && (9)\\
\beta &= \sqrt{\sum_{\mu=2}^{n-1} \beta_\mu^2}, && (10).
\end{aligned}
\right.
$$

jako długości wektorów (6) i (7).

Niezmienniki α, γ, β można dla analogii nazwać uogólnioną krzywizną geodezyjną, krzywizną normalną oraz torsją geodezyjną krzywej C.

P. Wróbel zachęcony przeze mnie zajął się uogólnieniem znanych klasycznych interpretacyj geometrycznych krzywizny geodezyjnej i normalnej oraz torsji geodezyjnej dla przypadku n-wymiarowego, gdy przestrzeń otaczająca jest euklidesowa. Część wyników osiągnęliśmy wspólnie. Część wyników osiągniętych samodzielnie stanowi nowe znaczenia tych pojęć, nieznane dla przypadku szczególnego $n = 3$. Niektóre uogólnienia nie nastręczały specjalnych trudności, inne wymagały stworzenia pewnych nowych pojęć. W szczególności udało się uogólnić znaczenia geometryczne torsji geodezyjnej podane przez Bertranda, Demartres'a i Knoblaucha.

Według Bertranda jest to granica stosunku kąta między normalną do powierzchni w punkcie sąsiednim M a płaszczyzną przechodzącą przez punkty M_0, M i normalną do powierzchni w M_0, do długości łuku $\overset{\frown}{M_0M}$.

Według Demartres'a jest to granica stosunku kąta między dwiema kulami stycznymi do powierzchni w punktach M_0 i M i przechodzącymi przez odpowiadające tym punktom koła krzywiznowe do długości łuku $\overset{\frown}{M_0M}$.

Interpretacja Knoblaucha jest bardziej skomplikowana i wymaga wprowadzenia obrazu sferycznego krzywej.

*

Résumé. — Streszczenie.

Sur quelques intepprétations géométriques de la courbure géodésique et de la torsion géodésique pour les courbes situées dans une hypersurface plongée dans un espace euclidien à *n*-dimensions.

STANISŁAW GOŁAB et TADEUSZ WRÓBEL, Kraków.

Les auteurs donnent quelques généralisations des interprétations géométriques des notions classiques de courbure géodésique et de torsion géodésique. Ce sont, en particulier, les généralisations des interprétations bien connues, dues à Bertrand, à Demartres et à Knoblauch.

ANALYTICKÉ PLOCHY V TROJROZMERNOM HERMITEOVSKOM PARABOLICKOM PRIESTORE.

MICHAL HARANT, Bratislava.

Uvažujme v hermiteovskom parabolickom priestore plochu definovanú tromi analytickými funkciami $r = r(u, v)$, dvoch komplexne menivých $u = x_1 + ix_2$, $v = x_3 + ix_4$, pričom x_k sú reálne. Vyšetrovanie prevedieme CARTANOVOU metódou pohyblivého trojhranu. Parabolický h. priestor je priestor metrický. Vzdialenosť dvoch bodov vyjadrí sa pomocou fundamentálnej formy tvaru:

$$(z \,.\, \bar{z}) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_3,$$

kde $\bar{z}$ je konjugovane komplexné k z. Unitárna substitúcia U zachováva hermiteovsku dĺžku vektora. Podmienka unitárnosti je daná vzťahom $U \,.\, \overline{U'} = E$, kde $\overline{U'}$ je sdružená matica s prvkami komplexne konjugovanými k prvkom matice U a E zas jednotková matica.

Nech $M(u, v)$ je bod plochy, potom výrazom $T = M + aM_u + bM_v$ je daný bod v tangenciálnej rovine. Priraďme každému bodu plochy M, pohyblivý systém majúci za počiatok bod M a za bázu vektory h_1, h_2, h_3, o dĺžke 1, vzájomne kolmé. Nech báza je unimodulárna. Vektory h_i sú analytickými komplexnými funkciami štyroch premenných x_1, x_2, x_3, x_4, splňujúce:

$$h_i \,.\, \bar{h}_k = \begin{cases} 1 \text{ pre } i = k \\ 0 \text{ pre } i \neq k, \quad i, k = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{1}$$

$$[h_1 \,.\, h_2 \,.\, h_3] = 1. \tag{2}$$

Potom platia rovnice tvaru

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M &= \tau_i h_i, \\ \mathrm{d}h_k &= \tau_{ki} h_i, \end{aligned} \tag{3}$$

v ktorých τ_i, τ_{ki} sú Pfaffove formy, lineárne diferenciálne formy v diferenciáloch $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_4$ a koeficientami $a_k\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Splňujú vzhľadom (1), (2) relácie

$$\tau_{ik} = -\,\bar{\tau}_{ki}, \tag{4}$$

$$\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = 0, \tag{5}$$

takže zvlášť $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$, sú rýdzo imaginárne. Rovnice (3) dávajú podmienky integrability vo tvare

$$\mathrm{d}\tau_i = [\tau_k \tau_{ki}], \tag{6}$$

$$\mathrm{d}\tau_{ik} = [\tau_{ij} \tau_{jk}], \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Pri podmienke, že h_1, h_2 majú ležať v tangenciálnej rovine plochy, je splnený vzťah

$$\tau_3 = 0, \tag{7}$$

takže podľa (4)

$$[\tau_1\tau_{13}] + [\tau_2\tau_{23}] = 0,$$

ktorá relácia je splnená podľa Cartanovho lemmata pre

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= a\tau_1 + b\tau_2, \\ \tau_{23} &= b\tau_1 + c\tau_2, \end{aligned} \tag{8}$$

pričom a, b, c sú analytickými funkciami reálných premenných $x_1, \ldots, x_4$. Ukaže sa, že pri obecnej transformácii

$$(\dot{h}) = U(h)$$

kde $\dot{h}$ sú zas jednotkové a vzájomne kolmé, nutne U je unitárna substitúcia.

Rovnica (3) pri podmienkach (7), (8) dajú sa previesť na kanonický tvar poskytujúci dve možnosti:

[A]

$$\begin{aligned} \tau_3 &= 0 \\ \tau_{13} &= r_1\tau_1 \\ \tau_{23} &= r_2\tau_2, \end{aligned}$$

alebo [B]

$$\begin{aligned} \tau_3 &= 0 \\ \tau_{13} &= r_1\tau_1 + r_2\tau_2 \\ \tau_{23} &= r_1\tau_1 - r_2\tau_2, \end{aligned}$$

kde v oboch prípadoch sú $r_1 \geqq 0$, $r_2 \geqq 0$, analytickými funkciami reálnych premenných $x_1, \ldots, x_4$ a geometricky sú skalárnymi krivosťami uvažovanej analytickej plochy.

Podmienky integrability (6) pri [A] prechádzajú do tvaru:

$$\begin{aligned} [\tau_1(\mathrm{d}r_1 - r_1\,(2\tau_{11} - \tau_{33}))] + [\tau_2(r_1\bar{\tau}_{12} - r_2\tau_{12})] &= 0, \\ [\bar{\tau}_1(\mathrm{d}r_1 + r_1\,(2\tau_{11} - \tau_{33}))] - [\tau_2(r_2\bar{\tau}_{12} - r_1\tau_{12})] &= 0, \\ [\tau_2(\mathrm{d}r_2 - r_2\,(2\tau_{22} - \tau_{33}))] + [\tau_1(r_1\bar{\tau}_{12} - r_2\tau_{12})] &= 0, \\ [\bar{\tau}_2(\mathrm{d}r_2 + r_2\,(2\tau_{22} - \tau_{33}))] - [\bar{\tau}_1(r_2\bar{\tau}_{12} - r_1\tau_{12})] &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

a pre (B) zas

$$\begin{aligned} &[\tau_1(\mathrm{d}r_1 + r_1(\tau_{33} - 2\tau_{11}) - 2r_2\tau_{12})] + \\ &+ [\tau_2(\mathrm{d}r_2 + r_1(\tau_{12} - \tau_{21}) + 2r_2\tau_{33})] = 0, \\ &[\tau_2(\mathrm{d}r_1 + r_1(\tau_{33} - 2\tau_{22}) + 2r_2\tau_{21})] - \\ &- [\tau_1(\mathrm{d}r_2 + r_1(\tau_{12} - \tau_{21}) + 2r_2\tau_{33})] = 0, \\ &[\bar{\tau}_1(\mathrm{d}r_1 + r_1(\tau_{33} - 2\tau_{33}) + 2r_2\tau_{21})] + \\ &+ [\bar{\tau}_2(\mathrm{d}r_2 + r_1(\tau_{12} - \tau_{21}) + 2r_2\tau_{11})] = 0, \\ &[\bar{\tau}_2(\mathrm{d}r_1 + r_1(\tau_{33} - 2\tau_{33}) - 2r_2\tau_{12})] - \\ &- [\bar{\tau}_1(\mathrm{d}r_2 + r_1(\tau_{12} - \tau_{21}) + 2r_2\tau_{22})] = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Pre plochy skupiny (A) obdržíme tieto zaujímavé výsledky:

Pre metrickú teoriu dôležitá I. fundamentálna forma je tvaru:

$$F = ds^2 = \tau_1 \,.\, \overline{\tau_1} + \tau_2 \,.\, \overline{\tau_2}. \tag{11}$$

Plochy pri konstantných skalárnych krivostiach jestvujú len pre $r_1 = r_2 = 0$, a je to komplexná rovina.

Plochy s body kruhovými, t. j. $r_1 = r_2$ jestvujú a ich obecné riešenie závisí od 4 funkcií jedného argumentu, pričom splňujú ďalšiu reláciu $\tau_{12} = \overline{\tau_{12}}$.

Dvojice plôch izometrických sú definované identickými plochami.

Pri dvojici plôch S a S' v danej bodovej konformnej korešpondencii splňujúcej $ds^2 = U\,ds'^2$, kde U je anal. funkciou v $x_1, \ldots, x_4$, je obecné riešenie závislé od 4 funkcií jedného parametru a príslušné Pfaffove formy sú viazané reláciami $\tau_{12} = \omega_{12}$, $\overline{\tau_{12}} = \overline{\omega_{12}}$.

Tiež riešenie pre plochy, u ktorých pomer skalárnych krivostí je konstantný, je závislé od 4. funkcií 1 parametru.

Parabolický 3-rozmerný hermiteovský priestor má geometrickú interpretáciu do 6-rozmerného euklidovského priestoru. Uvažované analytické plochy zobrazujú sa izometrickým zobrazením do 4-rozmerných variet 6-rozmerného euklidovského priestoru. Tieto charakteristiky sú plochami minimálnymi.

*

Résumé. — Výtah.

Sur les surfaces analytiques dans l'espace Hermitien parabolique à trois dimensions.

MICHAL HARANT, Bratislava.

Au moyen de la méthode de M. CARTAN, nous avons étudié les surfaces données par trois fonctions analytiques $r = r(u, v)$ de deux variables complexes $u = x_1 + ix_2$, $v = x_3 + ix_4$, les x_k étant réelles.

A chaque point de la surface, nous associons un répère mobile dont la base unimodulaire h_1, h_2, h_3 vérifie l'équation (1), (2). Le répère sera de la forme (3), satisfaisant aux relations (4), (5) et aux conditions d'intégrabilité (6).

A chaque surface analytique correspond un système canonique de la forme (A), ou bien (B) avec les conditions d'intégrabilité (9) ou (10) respectivement, r_1, r_2 signifiant les courbures scalaires de la surface.

La première forme fondamentale est (11); il existe, pour $r_1 = r_2 = 0$, un plan complexe, des surfaces aux points ombilicaux, des couples de surfaces dans la correspondence ponctuelle conforme, et des surfaces dont les rayons de courbure, dans chaque point, sont proportionels.

Les surfaces étudiées peuvent être représentées dans l'espace Euclidien à six dimensions par des variétés à quatre dimensions. Ces „caractéristiques" sont des surfaces minimales.

ANALOGIE PŘÍMKOVÝCH A KANÁLOVÝCH PLOCH.

KAREL HAVLÍČEK, Praha.

V stručném úvodu se zmínil přednášející o Lieově transformaci, která převádí Plückerovy souřadnice přímky v hexasférické souřadnice koule a uvedl nejdůležitější známé analogické vlastnosti ploch přímkových a kanálových. Pak referoval o své práci *Sur les surfaces enveloppes de sphères* (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Praha, **74** (1949), 21—40), kde sestrojil skalár, který charakterisuje plochy kanálové, a ukázal na analogii tohoto skaláru s jiným známým skalárem, který charakterisuje plochy přímkové.

*

Résumé. — Výtah.

Analogie des surfaces réglées et des surfaces enveloppes de sphères.

KAREL HAVLÍČEK, Praha.

Un compte-rendu de l'article: K. HAVLÍČEK: *Sur les surfaces enveloppes de sphères*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Praha, **74** (1949), 21—40.

O ZBORCENÝCH PŘÍMKOVÝCH OSNOVÁCH NEEUKLIDOVSKÉHO PROSTORU.

JIŘÍ KLAPKA, Brno.

Mezi koeficienty A, B, C (podle E. ČECHA) fleknodální formy zborcené plochy (vztažené na její eliptické strikční čáry) a BLASCHKEHO eliptickými diferenciálními invarianty p, q, $\overline{p}$, $\overline{q}$ téže plochy platí vztahy

$$A = \frac{1}{2}\left(\overline{q}' + q'\frac{\overline{p}}{p}\right) + \frac{1}{4}\left(\overline{q}\frac{p'}{p} + q\frac{\overline{p}'}{p}\right) - \frac{3}{4}\left(\overline{q}\frac{\overline{p}'}{\overline{p}} + q\frac{p'\overline{p}}{p^2}\right),$$

$$2B = \left(\frac{\overline{p}}{p} - \frac{p}{\overline{p}}\right)\left(p\overline{p} + q\overline{q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{p}'}{\overline{p}} - \frac{p'}{p}\right)' - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\overline{p}'}{\overline{p}}\right)^2 - \left(\frac{p'}{p}\right)^2\right],$$

$$C = \frac{1}{2}\left(\overline{q}' + q'\frac{p}{\overline{p}}\right) + \frac{1}{4}\left(\overline{q}\frac{\overline{p}'}{\overline{p}} + q\frac{p'}{\overline{p}}\right) - \frac{3}{4}\left(\overline{q}\frac{p'}{p} + q\frac{\overline{p}'p}{\overline{p}^2}\right),$$

jak uvedeno v pojednání J. KLAPKY: *Několik vztahů mezi diferenciálními invarianty zborcené přímkové osnovy eliptického prostoru*, Jubilejní sborník vysoké školy technické Dr Edvarda Beneše v Brně, 1949.

Jsou-li invarianty p, q, $\overline{p}$, $\overline{q}$ konstanty, plocha připouští grupu neeuklidovských pohybů v sebe, t. j. je to neeuklidovská zborcená plocha šroubová.

Pro plochu tohoto druhu, pokud není kvadrikou, plyne z uvedených rovnic

$$A = C = 0, \quad B \neq 0,$$

takže lze vysloviti větu:

Fleknodální čáry neeuklidovské zborcené plochy šroubové se ztotožňují s jejími čarami strikčními.

Euklidovský zvláštní případ této věty byl týmž autorem nalezen již dříve (viz na př. Kadeřávek, Klíma, Kounovský, *Deskriptivní geometrie* II, str. 779). Na konec podotkněme, že zde uvedená věta v citovaném pojednání obsažena není. Jsou v něm však nalezeny naznačenou methodou některé jiné věty o zborcených plochách neeuklidovského prostoru.

*

Résumé. — Výtah.

Sur les surfaces réglées gauches d'espace non-euclidien.

JIŘÍ KLAPKA, Brno.

Les coefficients A, B, C (d'après M. E. Čech) de la forme flecnodale d'une surface réglée gauche (dont les courbes directrices sont les deux courbes de striction dans l'espace elliptique) et les invariants elliptiques $p, q, \overline{p}, \overline{q}$ (d'après M. W. Blaschke) de la même surface sont liés par les relations

$$A = \frac{1}{2}\left(\overline{q}' + q'\frac{\overline{p}}{p}\right) + \frac{1}{4}\left(\overline{q}\,\frac{p'}{p} + q\,\frac{\overline{p}'}{p}\right) - \frac{3}{4}\left(\overline{q}\,\frac{\overline{p}'}{\overline{p}} + q\,\frac{p'\overline{p}}{p^2}\right),$$

$$2B = \left(\frac{\overline{p}}{p} - \frac{p}{\overline{p}}\right)\left(p\ \overline{p} + q\ \overline{q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{p}'}{\overline{p}} - \frac{p'}{p}\right)' - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\overline{p}'}{\overline{p}}\right)^2 - \left(\frac{p'}{p}\right)^2\right],$$

$$C = \frac{1}{2}\left(\overline{q}' + q'\,\frac{p}{\overline{p}}\right) + \frac{1}{4}\left(\overline{q}\,\frac{\overline{p}'}{\overline{p}} + q\,\frac{p'}{\overline{p}}\right) - \frac{3}{4}\left(\overline{q}\,\frac{p'}{p} + q\,\frac{\overline{p}'p}{\overline{p}^2}\right)$$

(voir le travail: *Quelques relations entre les invariants projectifs différentiels d'une surface réglée gauche d'espace elliptique*, publiée par J. Klapka dans le Jubilejní sborník vysoké školy technické Dra Edvarda Beneše v Brně, 1949 — en thèque avec un résumé en français).

Si les invariants $p, q, \overline{p}, \overline{q}$ sont constants, la surface admet un groupe de mouvements non-euclidiens en elle-même, c'est-à-dire c'est un hélicoïde réglé d'espace non-euclidien. Des relations mentionnées plus haut il résulte

$$A = C = 0, \quad B \neq 0$$

d'où l'on trouve facilement le théorème:

Les courbes flecnodales d'un hélicoïde réglé gauche d'espace non-euclidien sont identiques avec ses courbes de striction.

On sait que dans l'espace euclidien les courbes flecnodales d'un hélicoïde sont son hélice de striction et sa courbe à l'infini. Ce cas particulier du théorème a été donné par le même auteur (voir Sborník české vysoké školy technické v Brně, IV, — **13** (1929), ou KADEŘÁVEK, KLÍMA, KOUNOVSKÝ, *Deskriptivní geometrie* II, page 779).

Le théorème n'a pas été publié jusqu'à présent mais, à l'aide de la méthode exposée ici, on a déjà trouvé quelques autres théorèmes sur les surfaces réglées gauches d'espace non-euclidien (voir le travail cité de J. KLAPKA dans Jubilejní sborník etc., 1949).

NĚKTERÉ CREMONOVY TRANSFORMACE V S_r.

JOSEF METELKA, Olomouc.

Autor referoval o výsledcích své práce uveřejněné pod názvem „*Tři kapitoly o monoidálních transformacích v S_r*“ v Rozpravách II. třídy České akademie věd a umění, **58** (1948), č. 10.

*

Résumé. — Výtah.

Quelques transformations de Cremona dans l'espace projectif S_r.

JOSEF METELKA, Olomouc.

La communication a été publiée sous le titre „*Trois chapitres sur les transformations monoïdales*“ dans Rozpravy II. třídy České akademie věd a umění, **58** (1948), no 10.

KONEXE A NORMÁLA INVARIANTNÍHO SMĚRU PRO NADPLOCHU V PROSTORU AFINNÍM.

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha.

Předmětem sdělení byl obsah práce, která vyjde v Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky, **75**.

Práce pojednává o konstrukci invariantní konexe a normály invariantního směru pro $(n-1)$-dimensionální prostor X_{n-1} v n-dimensionálním prostoru afinním A_n. V prostoru A_n o souřadnicích ξ^α ($\alpha = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$) s daným symetrickým přenosem o koeficientech $\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \Gamma^\nu_{\alpha\beta}(\xi^\alpha)$ je definována nadplocha X_{n-1} parametrickými rovnicemi $\xi^\alpha = \xi^\alpha(\eta^a)$, $a = 1, \ldots, (n-1)$. Za zcela určitých předpokladů v práci vymezených je systémem rovnic

$$n^\nu t_\nu = 1, \quad n^\nu \nabla_a t_\nu = v_a \tag{1}$$

definován jednoznačně afinnormální vektor (normála) n^ν. Zde je t_ν

tečný vektor nadplochy X_{n-1}, t. j. jedno z řešení homogenních rovnic $B^\nu_a t_\nu = 0$, $\left(B^\nu_a = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \eta^a}\right)$, ∇_a symbolický vektor Lagrangeovy derivace příslušný dané konexi v A_n, v_a libovolný vektor v X_{n-1}. Je-li vektor v_a volen tak, aby při transformaci tečného vektoru t_ν, t. j. při transformaci $^*t_\nu = Pt_\nu$ ($P \neq 0$ je skalár), platilo $^*v_a = v_a + P_a$, $\left(P_a = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial \eta^a}\right)$, potom směr normály definované rovnicemi (1) je invariantní vzhledem k transformaci $^*t_\nu = Pt_\nu$. Konexe indukovaná (ve smyslu afinní indukce) normálou invariantního směru je pak nezávislá na transformaci $^*t_\nu = Pt_\nu$.

Jestliže Γ^c_{ab} je nějaká konexe v X_{n-1} invariantní vzhledem k uvedené transformaci tečného vektoru, potom je možno za určitých předpokladů, jež jsou v práci vymezeny, sestrojit normálu N^ν vázanou na konexi Γ^c_{ab} tímto předpisem

$$N^\nu = \frac{h^{ab}}{n-1}(B^\nu_c \Gamma^c_{ab} + \nabla_a B^\nu_b),$$

jež je normálou invariantního směru. Je-li $\overset{0}{\Gamma}{}^c_{ab} = h^{cd} \nabla_d t_\nu \nabla_a B^\nu_b$ konexe *vrozená* při určité volbě tečného vektoru t_ν a $\{{}^{\,c}_{ab}\}$ konexe Riemannova utvořená z tensoru $h_{ab} = B^\nu_a \nabla_b t_\nu$ při téže volbě vektoru t_ν, potom vektory $M_a = \frac{2}{n+1}(\{{}^{\,c}_{ca}\} - \overset{0}{\Gamma}{}^c_{ca})$, $N_a = \frac{2}{n+1} h_{ab}h^{cd}(\{{}^{\,b}_{cd}\} - \overset{0}{\Gamma}{}^b_{cd})$ dosazeny za v_a do definičních rovnic (1) vedou k normálám invariantního směru.

Z podmínek Gaussových-Codazziových plyne, že tyto vektory jsou vázány vztahem $M_a - N_a = \frac{2}{n+1} B^\beta_a h^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta t_\delta = R_a$. V X_{n-1} je pak možno definovat tyto konexe:

1. Třídu invariantních, *indukovaných* konexí

$$\underset{k}{A}{}^c_{ab} = \underset{0}{A}{}^c_{ab} - k h_{ab} h^{cd} R_d, \tag{2a}$$

kde $\underset{0}{A}{}^c_{ab} = \overset{0}{\Gamma}{}^c_{ab} + h_{ab}h^{cd} M_d$ je tak zvaná *hlavní* konexe této třídy (pro $k = 0$) a k je libovolný invariantní skalár. Normály vázané na konexe této třídy, t. j. normály tvaru

$$\underset{k}{n}{}^\nu = \frac{h^{ab}}{n-1}(B^\nu_c \underset{k}{A}{}^c_{ab} - \nabla_a B^\nu_b), \tag{2b}$$

tvoří třídu normál vázaných na třídu invariantních, indukovaných konexí.

2. Třídu (invariantních) WEYLOVÝCH konexí

$$\underset{l}{\Psi}{}^c_{ab} = \underset{0}{\Psi}{}^c_{ab} + \frac{l}{2}(\delta^c_a R_b + \delta^c_b R_a - h_{ab} h^{cd} R_d), \tag{3a}$$

kde $\underset{0}{\Psi}{}^c_{ab} = \{^{\,c}_{ab}\} - \frac{1}{2}(\delta^c_a M_b + \delta^c_b M_a - h_{ab} h^{cd} M_d)$ je hlavní konexí této třídy (pro $l = 0$).

Normály vázané na konexe této třídy, t. j. normály tvaru

$$\underset{l}{m}{}^\nu = \frac{h^{ab}}{n-1}(B^\nu_c \underset{l}{\Psi}{}^c_{ab} - \nabla_a B^\nu_b), \tag{3b}$$

tvoří třídu normál vázaných na třídu konexí WEYLOVÝCH.

Platí nyní následující věty:

Uvedené dvě třídy konexí nejsou nutně identické.

Normály vázané na konexe z třídy invariantních, indukovaných konexí tvoří třídu normál invariantního směru a jsou to normály indukující (ve smyslu afinní indukce) příslušné konexe této třídy.

Normály vázané na konexe z třídy konexí WEYLOVÝCH *tvoří třídu normál invariantního směru a jsou z třídy normál vázaných na třídu invariantních indukovaných konexí. Netvoří tedy odlišnou vlastní třídu.*

Konexe $\underset{0}{\Lambda}{}^c_{ab}$, t. j. konexe hlavní z třídy invariantních, indukovaných konexí, je identická s invariantní konexí zavedenou a definovanou V. HLAVATÝM. *Normála indukující tuto konexi, t. j. normála $\underset{0}{n}{}^\nu$ jest v případě ekvivoluminárního přenosu v A_n identická s normálou* SCHOUTENOVOU.

Je-li daný přenos v A_n ekvivoluminární, potom přenos definovaný konexí $\underset{0}{\Lambda}{}^c_{ab}$ je rovněž ekvivoluminární.

*

Résumé. — Výtah.

La connexion et le vecteur affinonormal à direction invariante de la hypersurface dans l'espace affin.

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha.

Dans cette communication, il s'agit de la construction de certaines connexions invariantes et de certains vecteurs affinonormalu$_x$ à direction invariante de l'espace X_{n-1} à $n - 1$ dimensions dans l'espace affin A_n n fois étendu (au sens du mot invariant par rapport à la transformation du vecteur tangent de l'espace X_{n-1}). Dans l'espace A_n aux coordonnées ξ^α ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$), doué d'une connexion symétrique $\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu}(\xi^\alpha)$ une hypersurface X_{n-1} est déterminée par les équations paramétriques $\xi^\alpha = \xi^\alpha(\eta^a)$, $a = 1, \ldots, (n - 1)$. Sous certaines suppositions on peut

construire deux classes de connexions de l'espace X_{n-1} invariantes par rapport à la transformation $*t_\nu = Pt_\nu$ ($P \neq O$ est un scalaire) du vecteur tangent t_ν. Ce sont les deux classes de connexions définies par les équations $(2)_a$, $(3)_a$ dans le résumé tchèque précédent. A l'aide de ces connexions on peut déterminer deux classes de vecteurs affinonormals dont la direction est invariante par rapport à la transformation $*t_\nu = Pt_\nu$ (D'après $(2)_b$, $(3)_b$ du résumé tchèque).

Le travail sera publié dans Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Praha, **75**, (1950).

NĚKTERÉ DRUHY KŘIVEK V *n*-ROZMĚRNÉM EUKLIDOVSKÉM PROSTORU.

MILIČ SYPTÁK, Brno.

Prvá část sdělení byla uveřejněna pod názvem *Nadkružnice a nadšroubovice*, Spisy přírodovědecké fakulty Masarykovy university, Brno, **312** (1949). Druhá část bude uveřejněna tamtéž pod názvem *Obecné nadkružnice a obecné nadšroubovice*.

*

Résumé. — Výtah.

Sur quelques types de courbes dans l'espace euclidien à n-dimensions.

MILIČ SYPTÁK, Brno.

La première partie a été publiée sous le titre *Hypercirconférences et hyperhélices* dans les Publications de la Fac. des Sciences de l'université Masaryk, Brno, **312** (1949). La deuxième partie sera publiée sous le titre *Hypercirconférences et hyperhélices générales* dans les mêmes Publications.

THE REAL CYCLIC COLLINEATIONS.

KAREL ŠINDELÁŘ, Soběslav.

Part I.

The set of all *projectivities in a line* form a group whose cyclic elements are cyclic projectivities. Since a parabolic projectivity cannot be cyclic, we can seek for cyclic projectivities only among non-parabolic ones, where there are always two different fixed points. Let us choose these fixed points invariable and consider of the appertaining set of projectivities, which form a subgroup of the original group, equivalent to the multiplicative group of their characteristic cross ratios, which are generally complex numbers. The cyclic elements of the n^{th} order of this group are the n^{th} primitive roots of one, whose number is given by Euler's function $\varphi(n)$. If $n > 2$, these primitive roots are not real, and therefore the real cyclic projectivities of the appertaining orders have imaginary fixed points. It can be shown that, if we choose those points $(\pm i, 1)$, the equations of the projectivities are as follows

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\frac{p\pi}{n}x_1' + \sin\frac{p\pi}{n}x_2' \\ x_2 &= -\sin\frac{p\pi}{n}x_1' + \cos\frac{p\pi}{n}x_2', \end{aligned}$$

where p represents any entire number which is prime relatively to n.

Part II.

The equations of every real *cyclic collineation in the plane*, including the identical and the involutory ones, can be written as follows

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\frac{p\pi}{m}x_1' + \sin\frac{p\pi}{m}x_2' \\ x_2 &= -\sin\frac{p\pi}{m}x_1' + \cos\frac{p\pi}{m}x_2' \\ x_3 &= x_3', \end{aligned}$$

where m is the order of the projectivity, which the collineation produces on its real fixed line axis o_3. The order of the collineation n is m or $2m$. It is evident that the collineation leaves every conic section belonging to the bundle

$$k_1(x_1^2 + x_2^2) + k_2x_3^2 = 0$$

invariant.

Part III.

The real cyclic collineations in the three-dimensional space, without regard to the identical and the involutory ones, have always at least two real fixed lines, on which they produce cyclic projectivities, of which at least one is always elliptic. The other one can be identical, involutory hyperbolic, or elliptic too.

In the first case, the equations can be written as follows

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\frac{p\pi}{m}x_1' + \sin\frac{p\pi}{m}x_2' \\ x_2 &= -\sin\frac{p\pi}{m}x_1' + \cos\frac{p\pi}{m}x_2' \\ x_3 &= x_3' \\ x_4 &= x_4'. \end{aligned}$$

The order of the collineation n is m or $2m$. There is a bundle of fixed planes with the axis o_{12}

$$k_1 x_3 + k_2 x_4 = 0.$$

This collineation also leaves ∞^2 bundles of surfaces of the second order

$$k_1(x_1^2 + x_2^2) + k_2(p_1 x_3^2 + p_2 x_3 x_4 + p_3 x_4^2) = 0$$

invariant.

If the projectivity, in the second case, on the axis o_{34} is involutory hyperbolic, the equations of the collineation are

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos\frac{p\pi}{m}x_1' + \sin\frac{p\pi}{m}x_2' \\
x_2 &= -\sin\frac{p\pi}{m}x_1' + \cos\frac{p\pi}{m}x_2' \\
x_3 &= x_3' \\
x_4 &= -x_4'.
\end{aligned}$$

The order of the collineation n is always $2m$. The planes of the bundle with the axis o_{12} form pairs of involution, as well as the surfaces of the second order belonging to the bundles

$$k_1(x_1^2 + x_2^2) + k_2(p_1 x_3^2 + p_2 x_3 x_4 + p_3 x_4^2) = 0,$$

excepted the surfaces of the bundles, where there is $p_2 = 0$, which are invariant.

In the third case, if both projectivities are elliptic, the orders of them being m_1, m_2, the equations of the collineation can be written

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos\frac{p_1\pi}{m_1}x_1' + \sin\frac{p_1\pi}{m_1}x_2' \\
x_2 &= -\sin\frac{p_1\pi}{m_1}x_1' + \cos\frac{p_1\pi}{m_1}x_2' \\
x_3 &= \cos\frac{p_2\pi}{m_2}x_3' + \sin\frac{p_2\pi}{m_2}x_4' \\
x_4 &= -\sin\frac{p_2\pi}{m_2}x_3' + \cos\frac{p_2\pi}{m_2}x_4'.
\end{aligned}$$

The order of the collineation n equals either the smallest common multiple of m_1, m_2, or its double. There is a bundle of surfaces of the second order

$$k_1(x_1^2 + x_2^2) + k_2(x_3^2 + x_4^2) = 0,$$

which the collineation leaves invariant.

In a special case, if it is simultaneously

$$p_1 = p_2 = p, \ m_1 = m_2 = m,$$

the characteristic equation has two double imaginary conjugate roots, which correspond to two imaginary conjugate lines of fixed points. The order of this collineation n is m, and there is a systeme of ∞^2 fixed lines.

Appendix.

This method can be used for the real cyclic collineations in more-dimensional space too.

A simple real root of their characteristic equation may correspond to any point of reference O_k, a pair of conjugate imaginary roots to two imaginary conjugate fixed points, whose real line of communication let be an axis $o_{l,l+1}$ of the coördinate-systeme and the coördinates of the fixed points not equal zero $(\pm i, 1)$. Then the projectivity on the axis $o_{l,l+1}$ is given by the equations

$$x_l \;=\; \cos\frac{p\pi}{m}\,x_l' + \sin\frac{p\pi}{m}\,x'_{l+1}$$

$$x_{l+1} = -\sin\frac{p\pi}{m}\,x_l' + \cos\frac{p\pi}{m}\,x'_{l+1}.$$

The order of the collineation n is not always the smallest common multiple of the orders of the single projectivities on the fixed lines, but it generally equals its double.

The detailed qualities of these collineations must be examined in every particular case separately.

*

Výtah. — Summary.

Reálné cyklické kolineace.

KAREL ŠINDELÁŘ, Soběslav.

Množství všech neparabolických projektivností v přímce s danými pevnými samodružnými body tvoří grupu, jež je isomorfní s multiplikativní grupou svých charakteristických dvojpoměrů. Všechny cyklické prvky n-tého stupně této grupy — n-té primitivní odmocniny jednotky — jsou od třetího stupně imaginární, takže reálné cyklické projektivnosti třetího a vyšších stupňů mají imaginární samodružné body. Zvolíme-li za tyto body $(\pm i, 1)$, nabudou rovnice cyklických projektivností n-tého stupně tvaru

$$x_1 = \cos\frac{p\pi}{n}\,x_1' + \sin\frac{p\pi}{n}\,x_2'$$

$$x_2 = -\sin\frac{p\pi}{n}\,x_1' + \cos\frac{p\pi}{n}\,x_2',$$

kde p je libovolné celé číslo nesoudělné s n.

Takto lze psáti rovnice všech eliptických reálných cyklických projektivností v přímce v reálné soustavě souřadnic. Vezmeme-li v úvahu ještě projektivnost identickou a involutorní hyperbolickou, lze těchto výsledků použíti k vyšetřování reálných cyklických kolineací ve vícerozměrných prostorech, zvláště pokud jde o jejich autokolineární podprostory.

KILKA TWIERDZEŃ Z GEOMETRII GRUPY SYMPLEKTYCZNEJ.

WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI, Wrocław.

Ukaże się w Pracach Matematyczno-Fizycznych.

*

Résumé. — Streszczenie.

Quelques théorèmes de la géométrie du groupe symplétique.

WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI, Wrocław.

A paraître dans Prace Matematyczno-Fizyczne.

GEOMETRISACE JISTÉHO SYSTÉMU PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC DRUHÉHO ŘÁDU.

ALOIS URBAN, Praha.

V prostoru X_n o souřadnicích $\xi^\varkappa$, $(\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \varrho = 1, \ldots, n)$ s konexí $\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda}$ jsou geodetiky dány systémem obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\varkappa}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\varkappa_{\mu\lambda}\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\xi^\lambda}{\mathrm{d}t} = \alpha\frac{\mathrm{d}\xi^\varkappa}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

kde $\alpha = \alpha(\xi^\varkappa)$ je libovolný skalár. Je však také možno obráceně vyjít od systému (1) a definovat konexi pomocí koeficientů $\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda}$ tohoto systému. Systémům (1) jsou tedy přiřazeny jisté konexe, t. j. systém (1) definuje v X_n geometrii.

Úvahu lze zobecnit a vyšetřovat geometrie, které definují v X_n jiné systémy diferenciálních rovnic; omezíme se na úplně integrabilní systém

$$\partial^2_{\mu\lambda}z = \Gamma^\varkappa_{\mu\lambda}\partial_\varkappa z + \Gamma_{\mu\lambda}z \tag{2}$$

o jedné neznámé funkci z a nezávisle proměnných $\xi^\varkappa$. O koeficientech $\Gamma^\varkappa_{\mu\lambda} = \Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}$, $\Gamma_{\mu\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}$ předpokládáme, že jsou analytické funkce proměnných $\xi^\varkappa$; jsou vázány relacemi

$$\text{a) } \partial_{[\nu}\Gamma^\varkappa_{\mu]\lambda} + \Gamma^\varkappa_{\varrho[\nu}\Gamma^\varrho_{\mu]\lambda} + A^\varkappa_{[\nu}\Gamma_{\mu]\lambda} = 0, \quad \text{b) } \partial_{[\nu}\Gamma_{\mu]\lambda} + \Gamma_{\varrho[\nu}\Gamma^\varrho_{\mu]\lambda} = 0. \tag{3}$$

Nejobecnější transformace, při kterých (2) přejde opět v obdobný systém, jsou

$$\xi^{\varkappa'} = \xi^{\varkappa'}(\xi^{\varkappa}),\ z' = \varrho(\xi^{\varkappa})z;\ \det.\left(\frac{\partial\xi^{\varkappa'}}{\partial\xi^{\varkappa}}\right) \neq 0,\ \varrho \neq 0;\ (\varkappa' = 1', \dots, n'). \quad (4)$$

Z transformačních vzorců pro koeficienty $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}$ a $\Gamma_{\mu\lambda}$ se zjistí, že tyto funkce lze pokládat za komponenty konexe ${}^0\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \dots, n)$, při čemž

$${}^0\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda} \stackrel{\text{def.}}{=} \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda},\ {}^0\Gamma^{0}_{\mu\lambda} \stackrel{\text{def.}}{=} \Gamma_{\mu\lambda},\ {}^0\Gamma^{\alpha}_{\gamma 0} = {}^0\Gamma^{\alpha}_{0\gamma} \stackrel{\text{def.}}{=} A^{\alpha}_{\gamma}. \quad (5)$$

Geometrii prostoru X_{n+1} proměnných $\xi^{\varkappa}$, z s konexí ${}^0\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ lze tedy pokládat za geometrii systému (2); platí pro ni věta:

Každé řešení $\xi^0 = f(\xi^{\varkappa})$ systému

$$\partial^2_{\mu\lambda}\xi^0 - (\partial_\mu\xi^0)(\partial_\lambda\xi^0) = \Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}\partial_\varkappa\xi^0 - \Gamma_{\mu\lambda} \quad (6)$$

je rovnicí geodetické variety X_n v uvedeném prostoru. Při tom (6) vznikne z (2) transformací

$$\xi^0 = -\lg z. \quad (7)$$

Pro afinor křivosti ${}^0R_{\delta\gamma\beta}{}^{\alpha}$ konexe ${}^0\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ platí ovšem rovnice ${}^0R_{\delta\gamma\beta}{}^{\alpha} = 0$. Podmínky integrability (3) lze nahradit touto rovnicí.

Místo abychom sestrojovali konexi ${}^0\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ z koeficientů systému (2) resp. (6), je možno geometrisovat tyto systémy jinak: V prostoru X_{n+1} proměnných ξ^{α} nechť jsou připuštěny jen tyto transformace

$$\xi^{0'} = \xi^0 - \lg\varrho(\xi^{\varkappa}),\ \xi^{\varkappa'} = \xi^{\varkappa'}(\xi^{\varkappa});\ \det.\left(\frac{\partial\xi^{\varkappa'}}{\partial\xi^{\varkappa}}\right) \neq 0,\ \varrho \neq 0, \quad (8)$$

jež plynou z (4) transformací (7). Tyto transformace jsou nejobecnější, jež zachovávají (6). V tomto X_{n+1} řešení $\xi^0 = f(\xi^{\varkappa})$ systému (6) definují X_n. Nechť je dána v X_{n+1} symetrická konexe ${}^*\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$. Platí nyní:

Nutná a postačující podmínka, aby každé řešení $\xi^0 = f(\xi^{\varkappa})$ systému (6) *bylo geodetickou X_n* v A_{n+1} *s konexí ${}^*\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ je, aby*

$${}^*\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} = {}^0\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} + 2p_{(\gamma}A^{\alpha}_{\beta)}, \quad (9)$$

kde ${}^0\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ je konexe (5) *a p^{α} je libovolný kovariantní vektor. Projektivní afinor křivosti $P_{\sigma\gamma\beta}{}^{\alpha}$ projektivní konexe* (9) *je nulový.*

Z konexí (9) je možno některé vybrat přibráním dalších geometrických podmínek. Stačí si všimnout jednak kongruence geodetických křivek

$$\xi^{\varkappa} = \text{konst.} \quad (10)$$

konexe (9), která je invariantní při (8), a jednak systému X_n

$$\xi^0 = f(\xi^{\varkappa}) + c\quad (c = \text{konst.}) \quad (11)$$

Je-li $\xi^0 = f(\xi^\varkappa)$ řešením systému (6), pak také (11) je řešením. Platí nyní věty:

Nutná a postačující podmínka, aby křivky kongruence (10) *byly pseudoparalelními geodetikami prostoru* X_{n+1} s *konexí* (9), *jest, aby byla splněna invariantní rovnice* $p_0 = -1$.

Nutná a postačující podmínka, aby X_n *o rovnicích* (11) (při pevném $f(\xi^\varkappa)$) *byly pseudoparalelními* X_n, *je splnění invariantních podmínek* $p_0 = -\sigma$, $p_\lambda = \sigma\partial_\lambda f$, *kde* σ *je libovolný skalár.*

Z obou těchto vět již snadno plyne:

Existuje právě jediná konexe (9) *taková, že geodetické* X_n *o rovnicích* (11) *jsou pseudoparalelní a že současně křivky kongruence* (10) *jsou pseudoparalelní. Tato konexe je dána invariantními podmínkami* $p_0 = -1$, $p_\lambda = \partial_\lambda f$.*)

*

Summary. — Výtah.

On the Geometry of a System of Partial Differential Equations of the Second Order.

ALOIS URBAŇ, Praha.

A completely integrable system of linear partial differential equations of the second order (2) may be changed by means of (7) into the system (6). In the X_{n+1} of ξ^α with a symmetric connexion ${}^*\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ let us consider the transformations (8) which transform the system (6) in a system of the same type; then the following statements hold:

A necessary and sufficient condition that every solution $\xi^0 = f(\xi^\varkappa)$ *of the system* (6) *represents a geodesic* X_n *in* A_{n+1} *with the connexion* ${}^*\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ *is, that* (9) *be satisfied* (where ${}^0\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ is given by (5) and p_α is an arbitrary covariant vector). *The projective curvature affinor* $P_{\delta\dot{\gamma}\dot{\beta}}{}^{\alpha}$ *of the projective connexion* (9) *vanishes.*

Among the connexions (9) *there exists just one such, that the geodesic* X_n's (11) (where $\xi^0 = f(\xi^\varkappa)$ is a solution of the system (6)) *are pseudoparallel and that simoultaneously the curves of the invariant congruence of geodesics* (10) *are pseudoparallel. This connexion is given by the invariant conditions* $p_0 = -1$, $p_\lambda = \partial_\lambda f$.*)

---

*) Tyto a další výsledky o geometrisaci systému (2) resp. (6) jsou podrobně odvozeny v práci: *On the Geometry of a System of Partial Differential Equations of the Second Order*, Proc. Kon. Neder. Akademie v. Weten., Amsterdam, Vol. LII, No. 8, 1949.

*) Cf. the paper under the same titel in Proc. Kon. Ned. Akademie v. Wetenschappen, Amsterdam, Vol. LII, No. 8, 1949.

O KŘIVOSTI OBECNÉHO PROSTORU.

OTTO VARGA, Debrecen.

Sdělení bude otištěno v časopise: *Publicationes Mathematicae Debrecen.*

*

Résumé. — Výtah.

Sur la courbure d'un espace général.

OTTO VARGA, Debrecen.

Le texte de la communication va paraître dans le périodoque hongrois: *Publicationes Mathematicae Debrecen.*

O KŘIVKÁCH S PEVNÝM VRCHOLEM V ROVINNÝCH SÍTÍCH.

OTTO VEJVODA, Praha.

V X. kapitole knihy FUBINI-ČECH: *Introduction à la géométrie différentielle projective des surfaces,* Paris, 1931, jsou studovány rovinné sítě, t. j. takové dvě soustavy křivek v rovině, že každým bodem prochází jedna a pouze jedna křivka každé z obou soustav. Korespondence mezi dvěma rovinnými sítěmi se nazývá *projektivní deformací,* když existuje v každém bodě kolineace taková, že aproximuje korespondenci až na veličiny nekonečně malé 2. řádu a ve směrech křivek sítě až na veličiny nekonečně malé 3. řádu.

Budiž dána v rovinné síti nějaká křivka k. Přímku, jež je harmonicky sdružena s tečnou křivky k v bodě A vzhledem ke křivkám sítě, nazýváme *konjugovanou tečnou* t. Pohybuje-li se bod A po křivce k, obaluje konjugovaná tečna obálku o. Bod Z, v němž se konjugovaná tečna dotýká obálky o, nazýváme *vrcholem* křivky k vzhledem k dané síti. V případě, že obálka o se redukuje na bod, t. j. že vrchol Z je pro všechny body křivky týž, říkáme, že křivka k má *pevný* vrchol.

V citované knize se dokazuje, že v rovinné síti existuje trojparametrická soustava křivek s pevným vrcholem. Prof. Čech se dále v téže knize ptá, zda existuje taková projektivní deformace, že každé křivce s pevným vrcholem v první síti odpovídá v druhé síti opět křivka s pevným vrcholem a uvádí bez důkazu odpověď. Položil jsem si otázku, zda existují *obecnější* korespondence (t. j. nikoliv projektivní deformace), které by měly uvedenou vlastnost. Ukázalo se však, že každá korespondence žádané vlastnosti musí být projektivní deformací.

Vzniká otázka, zda existují projektivní deformace takové, že pouze některým křivkám v 1. síti, nikoliv tedy každé, s pevným vrcholem odpovídají v druhé síti křivky s pevným vrcholem. Dá se ukázati toto:

Když každým bodem roviny prvé sítě prochází více než dvě křivky s pevným vrcholem, jimž v projektivní deformaci odpovídají křivky se stejnou vlastností, pak již každé křivce s pevným vrcholem odpovídá podobná křivka.

Zjistil jsem, že *existuje taková projektivní deformace, která reprodukuje jednu jednoparametrickou soustavu křivek s pevným vrcholem v prvé síti v podobnou soustavu v druhé síti, a že řešení pro dvě nekolineární sítě závisí na jedné funkci dvou proměnných.*

Touž obecnost si zachovává případ, že pevný vrchol je pro všechny křivky soustavy v prvé síti týž a obdobně v druhé síti.

Případ, že dvěma jednoparametrickým soustavám křivek s pevným vrcholem korespondují v projektivní deformaci podobné soustavy v druhé síti, jsem dosud nerozřešil. Našel jsem řešení v těchto speciálních případech:

1. Žádáme, aby křivky každé z obou soustav v 1. i 2. síti měly pevný a týž vrchol. *To je možné pouze tehdy, jsou-li obě sítě kolineární.*

2. Žádáme, aby křivky jedné z obou soustav v 1. i 2. síti měly pevný a týž vrchol. *Jsou možná dvě netriviální řešení; jedno závisí na jedné funkci dvou proměnných, druhé na pěti funkcích jedné proměnné.*

*

Résumé. — Výtah.

Courbes à sommet fixe dans les réseaux plans.

OTTO VEJVODA, Praha.

Dans le livre FUBINI-ČECH: *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, Paris, 1931, on trouvé à p. 168 le problème de l'existence des déformations projectives d'un réseau plan telles qu'à chaque courbe à sommet fixe dans le plan du premier réseau correspond une courbe pareille dans le second réseau. La solution y est indiquée sans démonstration. Or on peut remarquer qu'on ne peut avoir aucune solution ultérieure même s'il s'agit d'une correspondance quelconque entre les deux plans (qui, a priori, n'est pas nécessairement une déformation projective). On peut considérer le cas plus général où l'on a seulement de familles ∞^1 des courbes à sommet fixe dont les images possèdent la même propriété. On peut prouver qu'il existe au plus deux telles familles; la généralité de telles déformations projectives peut être déterminée.

DIFERENCIÁLNÍ INVARIANTY DVOJICE PLOCH.

FRANTIŠEK VYČICHLO, Praha.

Obsahem sdělení byly výsledky práce, která pod týmž názvem bude uveřejněna v Rozpravách České akademie věd a umění v Praze.

*

Résumé. — Výtah.

Sur les invariants différentiels d'un couple des surfaces.

FRANTIŠEK VYČICHLO, Praha.

La communication va paraître in extenso dans Rozpravy II. třídy České akademie věd a umění, Prague.

UNE DÉFINITION INTUITIVE DE LA TRANSLATION PARALLÈLE AU SENS DE M. LEVI-CIVITA.

TADEUSZ WAŻEWSKI, Kraków.

La droite joignant deux points dont chacun divise deux côtés d'un triangle euclidien dans le même rapport est parallèle au troisième côté. Cette construction d'une parallèle peut servir de base pour construire une translation parallèle *approchée* d'un vecteur issu de A_0 aux points consécutifs $A_1, \ldots, A_n$ d'un arc $\widehat{C, D} = \widehat{A_0, A_n}$ situé dans l'espace de Riemann. Un passage à la limite (analogue à celui de la méthode de Cauchy-Lipschitz au cas des équations différentielles) conduit à la translation parallèle d'un vecteur le long de l'arc donné.

À paraître probablement dans les Annales de la Société Polonaise de Mathématique.

*

Streszczenie. — Résumé.

Definicja intuicyjna przeniesienia równoległego w sensie Levi-Civita.

TADEUSZ WAŻEWSKI, Kraków.

Autor podaje pewien sposób definiowania przeniesienia równoległego wzdłuż geodetyki wektora w przestrzeni Riemanna wychodząc z twierdzenia Talesa: prosta łącząca środki dwóch boków trójkąta jest równoległa do boku trzeciego.

O MULTIWEKTORACH W V_n, (III).[1]

WŁODZIMIERZ WRONA, Kraków.

Wstęp.

Weźmy pod uwagę n-wymiarową przestrzeń Riemanna V_n o tensorze metrycznym $a_{\lambda\mu}$ i odwrotnym do niego $a^{\lambda\mu}$. Afinor krzywiznowy tej przestrzeni oznaczamy przez $K_{\varkappa\lambda\mu\nu}$. Tensor

$$K_{\lambda\mu} = K_{\varkappa\lambda\mu\nu}a^{\varkappa\nu} \tag{1}$$

nazywamy tensorem Ricci'ego, a skalar

$$\varkappa = \frac{1}{n(n-1)} K_{\lambda\mu}a^{\lambda\mu} \tag{2}$$

skalarną krzywizną przestrzeni.

Dwa liniowo od siebie niezależne wektory $\underset{1}{v}^\lambda$, $\underset{2}{v}^\lambda$ w pewnym punkcie przestrzeni określają nam dwukierunek. Biwektor, który jest uskośnionym iloczynem tych wektorów

$$F^{\lambda\mu} = \tau \,.\, 2!\, \underset{1}{v}^{[\lambda}\underset{2}{v}^{\mu]}, \tag{3}$$

gdzie τ oznacza dowolny skalar, nazywamy biwektorem prostym danego dwukierunku.

Znane jest pojęcie riemannowskiej miary krzywiznowej nieosobliwego dwukierunku

$$\overset{(2)}{K} = \frac{K_{\varkappa\lambda\mu\nu}F^{\varkappa\lambda}F^{\mu\nu}}{\overset{2}{a}_{\varkappa\lambda\mu\nu}F^{\varkappa\lambda}F^{\mu\nu}} \tag{4}$$

gdzie

$$\overset{2}{a}_{\varkappa\lambda\mu\nu} = 2!\, a_{[\varkappa[\mu}a_{\lambda]\nu]}. \tag{5}$$

Riemannowska miara krzywiznowa dwukierunku jest, jak wiadomo, równa skalarnej krzywiźnie podprzestrzeni dwuwymiarowej geodezyjnej w rozważanym punkcie i stycznej do danego dwukierunku.

Twierdzenie F. SCHURA wyraża ciekawą własność riemannowskiej miary krzywiznowej dwukierunku, mianowicie: *Jeżeli w każdym punkcie przestrzeni riemannowska miara krzywiznowa nie zależy od specjalnego wyboru dwukierunku, to nie zmienia się także od punktu do punktu t. zn. jest stałą. Przestrzeń jest wtedy przestrzenią o stałej krzywiźnie.*

Uogólnieniem pojęcia riemannowskiej miary krzywiznowej dwukie-

[1]) W pracy niniejszej autor kontynuuje rozważania nad multiwektorami głównymi w przestrzeni Riemanna, zapoczątkowane w pracach: WRONA W.: *On multivectors in a V_n*, I i II, Kon. Ned. Ak. v. Wetensch., Proc., Vol. LI, **10** (1948).

runku jest pojęcie skalarnej krzywizny[2]) nieosobliwego m-kierunku, ($2 \leqq m < n$), przez którą rozumiemy skalarną krzywiznę podprzestrzeni m-wymiarowej, geodezyjnej w rozważanym punkcie i stycznej w nim do danego m-kierunku.

Pojęcie skalarnej krzywizny m-kierunku pozwoliło autorowi[3]) uogólnić twierdzenie F. Schura. Mianowicie zachodzi twierdzenie: *Jeżeli skalarna krzywizna m-kierunku w każdym punkcie nie zmienia się ze zmianą m-kierunku, to nie zmienia się także od punktu do punktu czyli jest stałą. Ponadto, gdy $m < n - 1$, przestrzeń jest o stałej krzywiźnie i gdy $m = n - 1$, przestrzeń jest einsteinowską.*

Skalarna krzywizna m-kierunku posiada wiele dalszych własności,[4]) a także może służyć, po pewnym uogólnieniu, do określenia m-wektorów głównych. W poprzednich pracach[1]) autor wyprowadził pewne własności m-wektorów głównych w przestrzeni V_{2m}. Obecnie zajmiemy się analogicznymi rozważaniami dla multiwektorów w V_n, nie zakładając, że n jest liczbą parzystą.

Multiwektory główne w V_n.

Afinor m-wskaźnikowy $f^{\lambda_1\ldots\lambda_m}$, ($2 \leqq m \leqq n$), skośnie symetryczny ze względu na wszystkie wskaźniki $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ nazywamy m-wektorem kontrawariantnym. Afinor

$$f_{\mu_1\ldots\mu_m} = f^{\lambda_1\ldots\lambda_m} a_{\lambda_1\mu_1} \ldots a_{\lambda_m\mu_m}, \tag{6}$$

jest wtedy także skośnie symetrycznym ze względu na wskaźniki $\mu_1 \ldots \mu_m$, jest więc m-wektorem kowariantnym. Jeżeli m-wektor $f^{\lambda_1\ldots\lambda_m}$ da się przedstawić jako uskośniony iloczyn m wektorów $\underset{1}{v}^{\lambda_1}, \ldots, \underset{m}{v}^{\lambda_m}$ tzn. jeżeli

$$f^{\lambda_1\ldots\lambda_m} = \tau m!\, \underset{1}{v}^{[\lambda_1} \cdots \underset{m}{v}^{\lambda_m]}, \tag{7}$$

gdzie τ jest czynnikiem skalarnym, wtedy nazywamy go m-wektorem prostym m-kierunku określonego wektorami $v_1{}^{\lambda_1}, \ldots, V_m{}^{\lambda_m}$. Naturalnie nie każdy m-wektor jest m-wektorem prostym.

Będziemy w dalszym ciągu rozważali ciąg $n - 1$ afinorów

$$\overset{m}{a}_{\lambda_1\ldots\lambda_m\mu_1\ldots\mu_m} = m!\, a_{[\lambda_1[\mu_1} a_{\lambda_2\mu_2} \ldots a_{\lambda_m]\mu_m]}, \tag{8}$$

---

[2]) Haantjes J. i Wrona W.: *Über konformeeuklidische und Einsteinsche Räume gerader Dimension*, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Vol. XLII, **7** (1939).

[3]) Wrona W.: *Eine Veralgemeinerung des Schurschen Satzes*, Proc. Ned. Ak. v. Wetensch., Vol. XLIV, **8** (1941).

[4]) Haantjes J.: *Eine Charakterisierung der konf.-eukl. Räume*, Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wetensch., Vol. XLIII, **1** (1940).

Wrona W.: *Cond. néc. et suff. qui déterm. les espaces Einsteiniens, conf.-euclid. et de courb. const.*, Ann. de la Soc. Polonaise de Math., XX (1948).

gdzie nawiasy prostokątne oznaczają, że należy uskośnić niezależnie ciągi wskaźników $\lambda_1 \dots \lambda_m$ i $\mu_1 \dots \mu_m$.

m-wektor $f^{\lambda_1 \dots \lambda_m}$ ma $\binom{n}{m}$ linjowo niezależnych składowych. Zbiór wszystkich m-wektorów w rozważanym punkcie przestrzeni V_n da się więc odwzorować na przestrzeń afiniczną centryczną $\binom{n}{m}$-wymiarową lub rzutową $\left[\binom{n}{m} - 1\right]$-wymiarową. Tę nową przestrzeń będziemy nazywali *m-tą przestrzenią skojarzoną* z danym punktem rozważanej przestrzeni Riemanna.

Obierzmy[5]) w przestrzeni skojarzonej, afinicznej centrycznej jakiś układ spółrzędnych (α) i oznaczmy przez

$$f^{\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \dots, \binom{n}{m} \tag{9}$$

wektor przyporządkowany m-wektorowi $f^{\lambda_1 \dots \lambda_m}$, a przez

$$\overset{m}{a}_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, \binom{n}{m} \tag{10}$$

tensor przyporządkowany afinorowi $\overset{m}{a}_{\lambda_1 \dots \lambda_m \mu_1 \dots \mu_m}$. Wyrażenie

$$\overset{m}{a}_{\alpha\beta} f^{\alpha} f^{\beta} \tag{11}$$

możemy nazwać *normą m*-wektora $f^{\lambda_1 \dots \lambda_m}$. Gdy norma jest równa ± 1, m-wektor nazywamy *jednostkowym*. m-wektor o normie równej zeru nazywamy *osobliwym*. Także m-kierunek określony przez osobliwy m-wektor prosty nazywamy *osobliwym*.

Weźmy pod uwagę n-wektor jednostkowy

$$I^{\lambda_1 \dots \lambda_n}. \tag{12}$$

Pozwala on nam ustalić vzajëmniejednoznaczną odpowiedniość między m-i $(n - m)$-wektorami przy pomocy wzoru

$$^{0}f^{\lambda_{m+1} \dots \lambda_n} = \frac{\varrho}{m!} f_{\lambda_1 \dots \lambda_m} I^{\lambda_1 \dots \lambda_n}, \tag{13}$$

gdzie

$$\varrho = (-1)^{\frac{1}{2}(n-m)m}. \tag{14}$$

$(n - m)$-wektor $^{0}f^{\lambda_{m+1} \dots \lambda_n}$ nazywamy *dualnym wzgledem m-vektora* $f^{\lambda_1 \dots \lambda_m}$. Podobnie afinor

[5]) Praca cytowana pod [1]), str. 437.

$$ {}^{0}\overset{m}{a}_{\lambda_{m+1}\dots\lambda_n\,\mu_{m+1}\dots\mu_n} = \frac{\varrho^2}{(m!)^2}\,\overset{m}{a}{}^{\lambda_1\dots\lambda_m\,\mu_1\dots\mu_m}\, I_{\lambda_1\dots\lambda_n}\, I_{\mu_1\dots\mu_n}, \qquad (15) $$

będziemy nazywali *dualnym względem afinora* $\overset{m}{a}_{\lambda_1\dots\lambda_m\,\mu_1\dots\mu_m}$.

Zauważmy dalej, że dowolny $(n-m)$-wektor $\varphi_{\lambda_{m+1}\dots\lambda_n}$ posiada $\binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}$ liniowo niezależnych składowych. Zatem $(n-m)$-ta przestrzeń skojarzona oraz m-ta przestrzeń skojarzona mają tę samą liczbę wymiarów. Składowe $(n-m)$-wektora $\varphi^{\lambda_{m+1}\dots\lambda_n}$ w $(n-m)$-tej przestrzeni skojarzonej będziemy oznaczali przez

$$ \varphi'^{\alpha'} \qquad (16) $$

składowe afinora ${}^{0}\overset{m}{a}_{\lambda_{m+1}\dots\lambda_n\,\mu_{m+1}\dots\mu_n}$ przez

$$ {}^{0}\overset{m}{a}_{,\alpha,\beta,}, \qquad (17) $$

a składowe afinora

$$ \overset{n-m}{a}_{\lambda_{m+1}\dots\lambda_n\,\mu_{m+1}\dots\mu_n} = (n-m)!\; a_{[\lambda_{m+1}[\mu_{m+1}}\dots a_{\lambda_n]\mu_n]} \qquad (18) $$

przez

$$ \overset{n-m}{a}_{,\alpha,\beta,}. \qquad (19) $$

Łatwo można wykazać, że

$$ {}^{0}\overset{m}{a}_{,\alpha,\beta,} = \varrho^2\, \overset{n-m}{a}_{,\alpha,\beta,}. \qquad (20) $$

Można tak dobrać układy współrzędnych w m-tej i $(n-m)$-tej przestrzeniach skojarzonych, aby wielkości dualne miały w nich te same składowe tzn. aby

$$ f^{\alpha} = {}^{0}f^{,\alpha,}, \qquad (21) $$

$$ \overset{m}{a}_{\alpha\beta} = {}^{0}\overset{m}{a}_{,\alpha,\beta,}. \qquad (22) $$

Rozważmy w przestrzeni Riemanna afinor

$$ U_{\varkappa\lambda\mu\nu} = K_{\varkappa\lambda\mu\nu} + \varkappa \overset{2}{a}_{\varkappa\lambda\mu\nu}, \qquad (23) $$

gdzie $K_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ oznacza afinor krzywiznowy, $\varkappa$ skalarną krzywiznę przestrzeni a $\overset{2}{a}_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ określony jest wzorem (5). Przestrzeń jest o stałej krzywiźnie, jeżeli

$$ U_{\varkappa\lambda\mu\nu} = 0; $$

einsteinowską, jeżeli

$$ U_{\lambda\mu} = U_{\varkappa\lambda\mu\nu}\, a^{\varkappa\nu} = 0; $$

konformicznie-euklidesową, jeżeli

$$ U_{\varkappa\lambda\mu\nu} = -\frac{4}{n-2}\, U_{[\varkappa[\mu}\, a_{\lambda]\nu]}. $$

Określmy dalej ciąg $(n-1)$ afinorów

$$\overset{m}{U}_{\lambda_1\ldots\lambda_m\mu_1\ldots\mu_m} = \frac{m!}{2} U_{[\lambda_1\lambda_2|\mu_1\mu_2} a_{\lambda_3\mu_3}\ldots a_{\lambda_m]\mu_m]};\quad 2\leqq m\leqq n. \tag{24}$$

Za pomocą wzoru analogicznego do (15) możemy otrzymać afinory dualne

$$ {}^0\overset{m}{U}_{\lambda_{m+1}\ldots\lambda_n\mu_{m+1}\ldots\mu_n} = \frac{\varrho^2}{(m!)^2}\overset{m}{U}^{\lambda_1\ldots\lambda_m\mu_1\ldots\mu_m} I_{\lambda_1\ldots\lambda_n} I_{\mu_1\ldots\mu_n}. \tag{25}$$

Składowe afinorów (24) i (25) w przestrzeniach skojarzonych oznaczali przez

$$\overset{m}{U}_{\alpha\beta} \text{ i } {}^0\overset{m}{U}_{,\alpha,\beta,}.$$

Można udowodnić, że dla przestrzeni einsteinowskiej zachodzi związek[6])

$${}^0\overset{m}{U}_{,\alpha,\beta,} = \varrho^2\frac{\binom{n-m}{2}}{\binom{m}{2}}\overset{n-m}{U}_{,\alpha,\beta.} \tag{26}$$

a dla konformicznie euklidesowej związek[7])

$${}^0\overset{m}{U}_{,\alpha,\beta,} = -\varrho^2\frac{n-m}{m}\overset{n-m}{U}_{,\alpha,\beta,} \tag{27}$$

oraz, że związki te są charakterystyczne dla tych przestrzeni.

Odchyleniem m-wektora $f^{\lambda_1\ldots\lambda_m}$ będziemy nazywali skalar[8])

$$\overset{(m)}{\omega} = -\frac{\overset{m}{U}_{\alpha\beta}f^\alpha f^\beta}{\overset{m}{a}_{\alpha\beta}f^\alpha f^\beta}. \tag{28}$$

Gdy m-wektor $f^{\lambda_1\ldots\lambda_m}$ jest prosty, to można wykazać, że[9])

$$\overset{(m)}{\omega} = \varkappa - \overset{(m)}{\varkappa}, \tag{29}$$

gdzie $\varkappa$ jest skalarną krzywizną przestrzeni, a $\overset{(m)}{\varkappa}$ zdefiniowaną poprzednio skalarną krzywizną m-kierunku określonego przez m-wektor prosty $f^{\lambda_1\ldots\lambda_m}$. Ekstremalne wartości odchylenia określonego wzorem (28) dają nam m-wektory spełniające równania:

$$(\overset{m}{U}_{\alpha\beta} + \overset{(m)}{\omega}\overset{m}{a}_{\alpha\beta})f^\alpha = 0. \tag{30}$$

m-wektory spełniające te równania nazywamy *głównymi*.

---

6) Praca cytowana pod 1), str. 444, wzór (2.59).
7) Praca cytowana pod 1), str. 444, wzór (2.60).
8) Praca cytowana pod 1), str. 439, wzór (2.15).
9) Praca cytowana pod 1), str. 439, wzór (2.21).

Obierając w m-tej i $(n-m)$-tej przestrzeniach skojarzonych takie układy współrzędnych, aby wielkości dualne miały w nich te same składowe, równania powyższe możemy napisać w postaci

$$(\overset{m}{{}^0U}_{,\alpha,\beta,} + \overset{(m)}{\omega}\,\overset{m}{{}^0a}_{,\alpha,\beta,})\,{}^0f^{,\alpha,} = 0 \tag{31}$$

i stosując wzór (20) otrzymamy

$$(\overset{m}{{}^0U}_{,\alpha,\beta,} + \varrho^2\,\overset{(m)}{\omega}\,\overset{n-m}{a}_{,\alpha,\beta,})\,{}^0f^{,\alpha,} = 0. \tag{32}$$

W przestrzeni einsteinowskiej na podstawie wzoru (26) otrzymamy dalej

$$\left(\overset{n-m}{U}_{,\alpha,\beta,} + \overset{(m)}{\omega}\,\frac{\binom{m}{2}}{\binom{n-m}{2}}\,\overset{n-m}{a}_{,\alpha,\beta,}\right){}^0f^{,\alpha,} = 0. \tag{33}$$

Wzór ten jest konsekwencją wzoru (30), co oznacza, że w przestrzeni Einsteina $(n-m)$-wektor dualny do m-wektora głównego o odchyleniu $\overset{(m)}{\omega}$ jest $(n-m)$-wektorem głównym o odchyleniu $\overset{(m)}{\omega}\,\dfrac{\binom{m}{2}}{\binom{n-m}{2}}$.

W przestrzeni konformicznie euklidesowej ze wzorów (32) i (27) otrzymamy

$$\left(\overset{n-m}{U}_{,\alpha,\beta,} - \overset{(m)}{\omega}\,\frac{m}{n-m}\,\overset{n-m}{a}_{,\alpha,\beta,}\right){}^0f^{,\alpha,} = 0. \tag{34}$$

Wzór ostatni jest konsekwencją (30), zatem w przestrzeni konformicznie euklidesowej $(n-m)$-wektor dualny do m-wektora głównego o odchyleniu $\overset{(m)}{\omega}$ jest także głównym $(n-m)$-wektorem i ma odchylenie równe $-\overset{(m)}{\omega}\,\dfrac{m}{n-m}$.

m-wektory główne w ogólnej przestrzeni Riemanna nie są naogół prostymi tzn. nie określają naogół m-kierunków. Można jednak udowodnić, że w przestrzeni konformicznie-euklidesowej i w przestrzeni zanurzalnej w przestrzeni euklidesowej o liczbie wymiarów o jedność większej m-wektory główne są proste. W obu tych przypadkach odpowiadające im m-kierunki główne są wyznaczone przez główne kierunki Ricci'ego.

Można wykazać następujące twierdzenia.

Jeżeli w punkcie przestrzeni konformicznie-euklidesowej elementarne podzielniki tensora Ricci'ego są proste, to każdy m-kierunek określony przez m głównych kierunków Ricci'ego jest m-kierunkiem głównym i skalarna *krzywizna* $\overset{(m)}{\underset{\alpha}{\varkappa}}$ *α-tego,* $\left[\alpha = 1, 2, \ldots \binom{n}{m}\right]$, *m-kierunku głównego dana jest wzorem*

$$\overset{(m)}{\underset{\alpha}{\varkappa}} = \frac{2}{m(n-2)} \sum_{i/1}^{m} \underset{\alpha_i}{\varepsilon} \underset{\alpha_i}{k} - \frac{n}{n-2} \varkappa,$$

gdzie $\underset{\alpha_i}{\varepsilon} = \pm 1$, $\underset{\alpha_i}{k}$ oznacza średnią krzywiznę odpowiedniego głównego kierunku Ricci'ego, a $\varkappa$ skalarną krzywiznę w przestrzeni.

Jeżeli przestrzeń jest zanurzalna w przestrzeni euklidesowej o liczbie wymiarów o jedność większej tzn. gdy

$$K_{\varkappa\lambda\mu\nu} = -2\varepsilon h_{[\varkappa[\mu} h_{\lambda]\nu]}; \quad \varepsilon = \pm 1$$

i jeżeli w pewnym punkcie elementarne podzielniki tensora $h_{\lambda\mu}$ *są proste, to w tym punkcie każdy m-kierunek określony przez m głównych kierunków tensora* $h_{\lambda\mu}$ *jest m-kierunkiem głównym i jego skalarna krzywizna dana jest wzorem*

$$\overset{(m)}{\underset{\alpha}{\varkappa}} = \frac{\varepsilon}{m(m-1)} \sum_{p \neq q}^{1,2\ldots m} \underset{\alpha_p}{\varepsilon} \underset{\alpha_q}{\varepsilon} \underset{\alpha_p}{h} \underset{\alpha_q}{h},$$

gdzie $\underset{\alpha_p}{\varepsilon} = \pm 1$, a $\underset{\alpha_p}{h}$ oznacza odpowiednią główną normalną krzywiznę.

Dowody tych twierdzeń są zupełnie podobne do analogicznych twierdzeń udowodnionych przez autora[10]) w przypadku przestrzeni o parzystej liczbie wymiarów.

*

Résumé. — Streszczenie.

Sur les multivecteurs dans V_n (III).

WŁODZIMIERZ WRONA, Kraków.

Considérons dans l'espace de Riemann V_n doué du tenseur métrique $a_{\lambda\mu}$, de l'affineur de courbure $K_{\varkappa\lambda\mu\nu}$ et de la courbure scalaire $\varkappa$, l'affineur

$$U_{\varkappa\lambda\mu\nu} = K_{\varkappa\lambda\mu\nu} + 2\varkappa a_{[\varkappa[\mu} a_{\lambda]\nu]}.$$

A chaque m-vecteur $f^{\lambda_1\ldots\lambda_m}$, nous pouvons faire correspondre le scalaire

$$\text{(I)} \quad \overset{(m)}{\omega} = -\frac{1}{2} \frac{U_{\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2} a_{\lambda_3\mu_3} \ldots a_{\lambda_m\mu_m} f^{\lambda_1\ldots\lambda_m} f^{\mu_1\ldots\mu_m}}{a_{\lambda_1\mu_1} \ldots a_{\lambda_m\mu_m} f^{\lambda_1\ldots\lambda_m} f^{\mu_1\ldots\mu_m}}$$

que nous appelons *déviation* du m-vecteur $f^{\lambda_1\ldots\lambda_m}$. Si le m-vecteur $f^{\lambda_1\ldots\lambda_m}$ est simple, dans ce cas

$$\overset{(m)}{\omega} = \overset{(m)}{\varkappa} - \varkappa,$$

10) Praca cytowana pod 1), II, str. 34—36.

où $\overset{(m)}{\varkappa}$ désigne la courbure scalaire de la m-direction determinée par le m-vecteur simple $f^{\lambda_1 \dots \lambda_m}$.

A la base de la formule (I), nous pouvons chercher les m-vecteurs pour lesquelles la déviation a une valeur extrêmal. En suivant cette voi, nous pouvons généralement distinguer dans chaque point de l'espace de Riemann $\binom{n}{m}$ m-vecteurs dits *m-vecteurs principaux*. Dans le présent travail nous, considérons certaines propriétés des m-vecteurs principaux.

Les considérations analogues au sujet des m-vecteurs dans V_{2m} se trouvent dans le dernier chapitre du travail: W. Wrona: *On multivectors in a V_n* I and II, Kon. Ned. Akad. v. Wetensch, Proceedings Vol. LI, **10** (1948).