Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Krejčí

Začátky mathematické krystallografie [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 1 (1872), No. 2, 60--70

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122472`

curven" v *Grunnertově* „*Archiv für Math. u. Phys.*" ve sv. 37., ve kterém stanoví souvislost trochoidy s průmětnicí křivky tvořící.

Hennigův „*Beitrag zur Theorie der ebenen Rouletten*" v „*Crelle's Journal*" r. 1865 obsažený podává kromě známých již pouček některé zajímavé věty o poloměru křivení, obvodu a ploše, pak o roulettách podvojných.

Strauch konečně ve svém obšírném díle „*Integration der Differentialgleichungen*" r. 1865 řeší všeobecnou úlohu theorie trochoid, totiž stanoviti rovnici jedné ze tří křivek tvořice, řídice a trochoidy, pakli rovnice obou ostatních jsou dány. Nemělť tu Strauch zajisté na mysli rozšířiti theorii trochoid, an stavěl pouze na základech dříve již položených, ale spíše užil těchto zajímavých křivek za příklad k náuce o integrování rovnic differencialních.

Hledíce s tohoto stanoviště na práci jeho, nemůžeme než těšiti se z neobyčejné péče, kterou spisovatel trochoidám byl věnoval. Strauch tuto stránku theorie trochoid úplně zakončil.*)

Době nynější nastává hlavně úloha trojí:

a) použíti zákonů geometrie novější a deskriptivné ku trochoidám,

b) rozšířiti theorii trochoid pro křivky prostorné a

c) zkoumati plochy, jež podobným spůsobem povstávají, když bod tvořící přejde v křivku tvořící, prostornou.

Vidíme se tudíž na konci počátku práce téměř nepřehledné, která pro vědu geometrickou slibuje hojného ovoce.

Začátky mathematické krystallografie.

(Píše prof. *Jan Krejčí.*)

(Pokračování.)

Tvary soustavy krychlové.

1. Soustava krychlová obsahuje tvary, které se úměrným úseky dají z krychle vyvinouti.

---

*) O zvláštních případech, v nichž rovnice příslušné se velmi zjednoduší, pojednáme budoucně. *Red.*

Krychle co prvotvar, s plochami v poloze *h*.

2. Prvotvar té soustavy jest *krychle* (tessera, Hexaëder), obr. 16., tvar obmezený 6 čtverci, které se stýkají v 8 trojplochých rozích a ve 12 pravoúhelných hranách *H*.

3. Tři osy, které se ukončují ve středu ploch, slovou *hlavní osy* a délka jejich od středu počítána jest $a = 1$. Šest os, které se ukončují ve středu hran, slovou *kosočtverečné osy*, a délka jejich $r = \sqrt{2}$. Čtyři osy, které se ukončují ve středu rohů, slovou *trojúhelné osy*, a délka jejich $t = \sqrt{3}$.

4. Hlavní osy a taktéž kosočtverečné jsou na sobě kolmé. Pro úklony druhých os jsou:

$$\cos(a, r) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tedy } (a, r) = 45^0,$$

$$\cos(a, t) = \sin(r, t) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ tedy } (a, t) = 54^0\,44'\,8''$$

$$\cos(r, t) = \sin(a, t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \text{ tedy } (r, t) = 35^0\,15'\,52''.$$

5. Známka krychlových ploch jest $h = 100$.

Tvary z krychle odvozené.

6. Z krychle dají se vyvinouti přikrojením hran plochami rovnoběžnými s hranami tvary *dvanáctičetné*; přikrojením rohů tvary *osmičetné*.

Provede-li se přikrojení stejnou měrou na všech hranách v rozích, vyvinou se tvary *plnoměrné* (holoëdrické); provede-li se polovičnou měrou, vyvinou se tvary *poloměrné* (hemiëdrické), a provede-li se ta změna čtvrtinou, vyvinou se tvary *čtvrtiměrné* (tetartoëdrické).

I. Tvary plnoměrné.

A. S plochami dvanáctičetnými.

a) S plochami v poloze *d*.

7. Otupením hran krychle obr. 17. vyvine se *kosočtverečný dvanáctistěn* (rhombický Dodekaëder) obr. 18., kterýž jest obmezen 12 stejnými kosočtverci, stýkajícími se v 6 čtveroplochých a v 8 trojplochých rozich, a ve 24 hranách *D*.

8. Z vodorovného průmětu toho tvaru vychází, že se má kratší úhlopříčka ploch k delší dle srovnalosti

$$h : o = 1 : \sqrt{2},$$

z čehož pak vychází $2\cos(o, d) = \frac{o^2 - h^2}{o^2 + h^2} = \frac{1}{3}$,

$$2(o, d) = 70^0\,31'\,44''$$

pročež $$(o, d) = 35^0\,15'\,52''$$

$$2(h, d) = 180^0 - 2(o, d) = 109^0\,28'\,16''$$

$$(h, d) = 54^0\,44'\,8''$$

9. Úklon každé plochy tohoto dvanáctistěnu k hlavní ose jest $= 45^0$.

Prodlouží-li se tudíž od hořejšího a dolejšího konce hlavních os hrany až se setkají, promění se ten tvar v osmistěn, jehož polarní hrany jsou D, a pobočné hrany $D' = 90^0$.

Dle rovnice 13. všeobecné krystallografie jest tudíž

$$2\cos D + \cos D' = -1,$$

$$\cos D = -\,{}^1/_2$$

$$D = 120^0.$$

10. Známka ploch kosočtverečného dvanáctistěnu jest

$$d = 110.$$

b) S p l o ch a m i v p o l o z e *dn*.

11. Dvouplochým přikrojením hran krychle obr. 19. vyvine se *krychlový čtyrmecítmík* (Tetrakishexaëder) obr. 20., obmezený 24 stejnými stejnoramennými trojúhelníky, kteréž se stýkají v 6 čtveroplochých a v 8 šestiplochých rozích; ve 12 hranách H a 24 hranách D.

12. Každá z ploch jsouc prodloužena odtíná jednu z hran krychle nebo jednu z hlavních os ve vzdálenosti $= 1$, druhou ve vzdálenosti $= n$, třetí ve vzdálenosti $= {}^1/_0$, totiž jest s n zárovná.

Pročež jest známka ploch toho tvaru

$$d_n = n10.$$

13. Příponu n ustanoviti lze z polovičných hran ${}^1/_2H$, ${}^1/_2D$.

Hrana ${}^1/_2H$ povstává setkáním se ploch

$$abc = n10$$

$$a'b'c' = 1\bar{1}0$$

hrana ${}^1/_2D$ povstává setkáním se ploch

$$abc = n10$$
$$a'b'c' = 011.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice 12. všeobecné krystallografie, jest

$$\cos {}^1/_2 H = \frac{n-1}{S}$$

$$\cos {}^1/_2 D = \frac{1}{S}$$

kdežto $S = \sqrt{n^2 + 1}\sqrt{2}$, pročež

$$\frac{\cos {}^1/_2 H}{\cos {}^1/_2 D} = n - 1.$$

14. Je-li $H = D$ jest $n = 2$.

Známka $d_2 = 210$ značí tedy *stejnohranný krychlový čtyrmecítmík*, jemuž dáme, an jest jediný svého způsobu (isogonalní) známku $= i$.

15. Je-li známa jen hrana H, jest v trojúhelníku, kterýž povstane vedením čáry o z konečného bodu hlavní osy a do vzdálenosti n, tedy v a, o, n

$$tang\,(a, o) = n.$$

V trojúhelníku a, o, r, v němž $(a, r) = 45^0$, $(r, o) = {}^1/_2 H$, jest tudíž

$$tang\,(135^0 - {}^1/_2 H) = n.$$

16. Je-li známa jen hrana D, jest v trojbokém výkrojku ${}^1/_2 D$, ${}^1/_2 O, A$, v němž ${}^1/_2 O = 90^0, A = 45^0$ dle rovnice 2. všeobecné krystallografie

$$\cos\,(a, o) = \cos {}^1/_2 D \sqrt{2},$$

načež se počítá dále jako v 15.

A. S plochami osmičetnými.

a) S plochami v poloze *o*.

17. Otupením rohů krychle v poměru odetnutých hran 1 : 1 : 1, obr. 21. vyvine se pravidelný *osmistěn* (Oktaëder) obr. 22., obmezený 8 stejnostrannými trojúhelníky, kteréž se setkávají v 6 čtveroplochých rozích a ve 12 hranách O.

18. Dle rovnice 13. jest

$$3 \cos O = -1$$
$$\cos O = -{}^1/_3$$
$$O = 109^0\,28'\,16''.$$

19. Každá plocha osmistěnu toho očtíná hrany krychle neb hlavní osy v stejné vzdálenosti, pročež jest známka její

$$o = 111.$$

b) S plochami v poloze $o^1/_m$.

20. Trojplochým přikrojením rohů krychle od ploch v poměru odetnutých hran $^1/_m : 1 : 1$ obr. 23., vyvine se *čtveroúhelný čtyrmecítmík* (Ikositetraeder) obr. 24., obmezený 24 souměrnými čtveroúhelníky, kteréž se stýkají v 6 pravidelně a ve 12 souměrně čtveroplochých, pak v 8 trojplochých rozích, jakož i ve 24 hranách O a 24 hranách H.

21. Známka toho tvaru jest

$$o\,^1/_m = m11.$$

22. Přípona m ustanoví se buď z hrany O, kteráž jsouc prodloužena jednu z hlavních os odtíná ve vzdálenosti $= 1$, druhou ve vzdálenosti $= m$, pročež

$$tang\,(a, o) = m,$$

kdežto z trojbokého výkrojku $^1/_2\,D$, $^1/_2\,O$, A, v němž $^1/_2\,D = 90^0$ $A = 45^0$ dle vzorce 2.

$$cos\,(a, o) = cot\,^1/_2\,O.$$

23. Nebo se přípona m ustanoví z hrany H dle vzorce 10. všeobecné krystallografie, an krychlové tvary lze též považovati co tvary stejnoklonné. Pro ten případ jest $a = m$, $b = c = 1$, $\sigma = \tau$, pročež

$$\frac{1}{m} = \frac{sin\,\varrho\,.\,sin\,(\sigma + \xi)}{sin\,\sigma\,.\,sin\,(\varrho + \xi)} \text{ nebo}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{cot\,\sigma + cot\,\xi}{cot\,\varrho + cot\,\xi}.$$

Jelikož dle vzorce 11.

$$2\,cot\,\sigma = -\,cot\,\varrho\,,$$

a ve výkrojku krychle $^1/_2\,H$, R, T, kdežto $R = 90^0$, $T = 60^0$ dle vzorce 5.

$$cos\,T = tang\,(r, t)\,cot\,(h, t),$$

$$cot\,(r, t) = 2\,cot\,(h, t),$$

jest, znamená-li $\xi = (h, t)$, $\varrho = (d, t)$

$$cot\,(r, t) = 2\,cot\,\xi,$$

$$\frac{m+2}{m-1} = \frac{cot\,(r, t)}{cot\,(d, t)},$$

kdežto (r, t) znamená úklon krychlové plochy, a (d, t) úklon čtyrmecítmíkové plochy k ose t.

24. Pro onen tvar $o^1/_m$, kterýž otupuje hrany dvanáctistěnu obr. 25., jest pro jednu plochu
dvanáctistěnu d, $abc = 011$,
pro. sousední plochu d', $a'b'c' = 101$,
a pro plochu otupující p, $a''b''c'' = 11m$,
pro kteréž hodnoty dá pásmová rovnice 19.

$$m = 2.$$

Tvar ten má tedy polohu od d závislou a sice tak, že vždy 6 ploch jest s osou t rovnoběžných, kteréž až k společnému setkání zvětšeny, stýkají se pod úhlem 120° v podobě šestibokého hranolu (Prisma), pročež tuto *odrůdu hranolovou* co jedinou svého způsobu naznačíme

$$o^1/_2 = p.$$

b) S plochami v poloze o_m.

25. Trojplochým přikrojením rohů krychle od hran v poměru odetnutných hran $1 : {}^1/_m : {}^1/_m$ obr. 26. nebo $m : 1 : 1$ vyvine se *osmistěnný čtyrmecítmík* (Triakisoktaeder), obr. 27., obmezený 24 stejnoramennými trojúhelníky, kteréž se stýkají v 6 osmiplochých a v 8 trojplochých rozích, pak ve 12 hranách O a 24 hranách D.

26. Známka toho tvaru jest

$$O_m = mm1.$$

27. Přípona m ustanoví se buď z hrany O, anať kolmice v rovině plochy na střed hrany O postavena, protíná hlavní osu ve vzdálenosti $= m$, pročež

$$r \, tang \, {}^1/_2 O = m,$$

kdežto, an $a = 1$, $(a, r) = 45^0$ $(o, r) = 90^0$, $r = {}^1/_2 \sqrt{2}$.

28. Nebo se ustanoví z hran D úklon plochy k ose t z trojbokého výkrojku ${}^1/_2 H$, ${}^1/_2 D$, T, kdežto ${}^1/_2 H = 90^0$, $T = 60^0$ dle vzorce 2.

$$cos\,(h, t) = 2\,cos\,{}^1/_2 D \sqrt{{}^1/_3},$$

načež kladouce do vzorce 10. $a = 1$, $b = c = m$, $\sigma = \tau$, jest

$$m = \frac{cot\,\sigma + cot\,\xi}{cot\,\varrho + cot\,\xi}.$$

Jelikož $2 \cot \sigma = - \cot \varrho = \cot (h, t)$
$2 \cot \xi = \cot (r, t)$, jest

$$\frac{2m+1}{m-1} = \frac{\cot (r, t)}{\cot (h, t)},$$

kdežto (r, t) znamená úklon krychlové plochy a (h, t) úklon čtyrmecítmíkové plochy k ose t.

d) S plochami v poloze o_s.

29. Šestiplochým přikrojením rohů krychlových v poměru odetnutých hran $^1/_m : {^1/_n} : 1$ obr. 28. vyvine se *osmačtyřicítník* (Hexakisoktaeder) obr. 29., obmezený 48 lichostrannými trojúhelníky, kteréž se stýkají v 6 osmiplochých, 8 trojplochých a 12 čtveroplochých rozích, pak ve 24 hranách H, 24 hranách D a 24 hranách O.

30. Známka toho tvaru jest o_s,
kdežto $$o_s = a^1/_m \, b^1/_n \, c_1 = mn1$$

31. Vezme-li se nejkratší úsek $= 1$, odtíná hrana D hlavní osu ve vzdálenosti $= 1$, hrana H ve vzdálenosti $= m$, hrana O ve vzdálenosti $= \frac{m}{n}$.

Pročež jest

$$\tang (a, o) = \frac{m}{n}$$

$$r \tang (h, r) = m,$$

při čemž $(a, r) = 45^0$, a tedy

$$\tang (a, o) = \frac{m}{n} = \frac{r \sin 45^0}{1 - r \cos 45^0} \text{ nebo}$$

$$r = \frac{m\sqrt{2}}{m+n}.$$

Úhel (a, o) ustanoví se z trojbokého výkrojku $^1/_2 O, {^1/_2} D, A$, kdežto $A = 45^0$ dle vzorce 2.

$$\cos (a, o) = \frac{\cos {^1/_2} D \sqrt{2} + \cos {^1/_2} O}{\sin {^1/_2} O}.$$

Úhel (h, r) ustanoví se z trojbokého výkrojku $^1/_2 H, {^1/_2} O, R$, kdežto $R = 90^0$ dle téhož vzorce

$$\cos (h, r) = \frac{\cos {^1/_2} O}{\sin {^1/_2} H}.$$

32. Pro polovičné hrany jest, anať hrana
$^1/_2H$ povstává setkáním se ploch $abc = nm1$, $a'b'c' = 1\bar{1}0$,
$^1/_2O$ „ „ „ „ $abc = nm1$, $a'b'c' = 001$,
$^1/_2D$ „ „ „ „ $abc = nm1$, $a'b'c' = 101$,
dosažením těch hodnot do rovnice 12.

$$cos\ ^1/_2H = \frac{n-m}{S}$$

$$cos\ ^1/_2O = \frac{\sqrt{2}}{S}$$

$$cos\ ^1/_2D = \frac{1-n}{S},$$

kdežto $S = \sqrt{n^2 + m^2}\sqrt{2}$, pročež

$$\frac{cos\ ^1/_2H}{cos\ ^1/_2D} = \frac{n-m}{1-n}.$$

K řešení té rovnice jest potřebí ještě druhé, kterouž obdržíme z polohy plochy, která otupuje hranu H neb D.

Hrana D otupuje se plochou $O^1/_{m'}$, hrana H plochou O_m''

Vezmeme-li pro výpočet plochu $O^1/_{m'}$, obr. 30. jest
pro tuto plochu $O^1/_{m'}$ $abc = 1m'1$
pro plochu Os $a'b'c' = 1mn$
pro plochu $O's$ $a''b''c'' = nm1$,
z čehož dosažením těch hodnot do vzorce 18. neb do rovnice 19. obdržíme

$$\frac{2m}{n+1} = m'.$$

Přípona m' ustanoví se pak z úhlu (d, t), jejž má plocha $O^1/_{m'}$ společný s plochou Os a pro nějž z trojbokého výkrojku $^1/_2H$, $^1/_2D$, T obr. 29., kdežto $T = 60^0$, jest dle 2.

$$cos\ (d, t) = \frac{2\ cos\ ^1/_2H + cos\ ^1/_2D}{sin\ ^1/_2H\sqrt{3}},$$

načež dle odstavce 23. jest

$$\frac{cot\ (r, t)}{cot\ (d, t)} = \frac{m' + 2}{m'-1}.$$

33. Některé osmačtyřicítníky mají hranu D v téže poloze jako kosočtverečný dvanáctistěn do toho tvaru vepsaný, pročež takové odrůdy slovou *kosočtverečné* (rhombické) *osmačtyřicítníky*. Plochy tohoto Os přikrojují hrany dvanáctistěnu, obr. 31.

Je-li pro jednu plochu dvanáctistěnu d, $abc = 011$,
pro druhou plochu dvanáctistěnu d', $a'b'c' = 110$,
pro plochu osmačtyřicítníku O_s, $a''b''c'' = nm1$
jest dle pásmové rovnice 19)

$$n = m-1.$$

Známka těchto tvarů jest tedy

$$Os = a^{1/m} b^{\frac{1}{m-1}} c,$$

místo čehož zkráceně psáti budeme

$$r_m = m \; m-1 \; 1.$$

34. Příponu m pro tvar r_m lze bezprostředně ustanoviti z hran H, D rovnicí

$$\frac{\cos {}^1/_2 H}{\cos {}^1/_2 D} = -\frac{1}{2-m}.$$

35. Taktéž lze m ustanoviti ze spojkové hrany plochy r_m s plochou d.

Znamená-li D' obr. 31. tuto spojkovou hranu, jest v trojbokém výkrojku D', ${}^1/_2 O$, ${}^1/_2 O'$, v němž ${}^1/_2 O' = 90^0$, pak dle odstavce 8. $(o', d') = 35^0 15' 52''$, a dle odstavce 4. $\cos(o' d') = \sqrt{{}^2/_3}$, dle vzorce 2.

$$\cos {}^1/_2 O = \frac{\sin D' \sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Jelikož však dle odstavce 32, též

$$\cos {}^1/_2 O = \frac{\sqrt{2}}{S}, \text{ jest}$$

$$\sin D' = \frac{\sqrt{3}}{S}.$$

Pro hranu D' dá se vyvinouti dle vzorce 12. též rovnice

$$\cos D' = \frac{n+m}{S},$$

pročež jest

$$\cot D' = \frac{n+m}{\sqrt{3}},$$

nebo berouce $n = m-1$

$$\cot D' \sqrt{3} = 2m-1.$$

36. K ustanovení tvaru r_m stačí známost jediné jeho hrany. Z hrany D ustanoví se totiž D' dle vzorce

$$^1/_2 D - 60^0 = D',$$

Z hrany H ustanoví se D' pomocí trojbokého výkrojku $^1/_7H$, $^1/_2H'$ D' obr. 31. v němž $^1/_2H' = 90^0$, pak dle odstavce 8. $(h', d') = 54^0\ 44'\ 8''$ a dle odstavce 4. $cos\ (h', d') = \sqrt{^1/_3}$, pročež dle vzorce 2.

$$sin\ D' = cos\ ^1/_2H \sqrt{3}.$$

Z hrany O ustanoví se D' pomocí trojbokého výkrojku $^1/_2O$, $^1/_2O'$, D', v němž $cos\ (o'\ d') = \sqrt{^2/_3}$, pročež dle téhož vzorce

$$sin\ D' = cos\ ^1/_2O \sqrt{^3/_2}.$$

37. Některé osmačtyřicítníky mají stejnohranné šestibokě rohy, tedy $H = D$.

Pro tyto tvary jest dle odstavce 32.

$$n - m = 1 - n$$

a tudíž

$$n = \frac{m+1}{2}$$

Známka těchto *stejnohranných* (isogonálních) *osmačtyřicítníků* jest tedy

$$Os = a^1/_m\ b\ \frac{2}{m+1}\ c,$$

místo čehož zkráceně psáti budeme

$$i_m = m\ \frac{m+1}{2}\ 1.$$

38. Připonu m lze ustanoviti z hran $H = D$. Ustanovíme totiž pomocí vzorce

$$\frac{cot\ (r, t)}{cot\ (d, t)} = \frac{m'+2}{m'-1}$$

plochu $O^1/_{m'}$, kteráž otupuje hrany D, načež jest dle rovnice

$$\frac{2m}{n+1} = m'$$

kladouce $n = \frac{m+1}{2}$

$$m = \frac{3m'}{4-m'}.$$

39. Též z hrany O dá se přípona m ustanoviti. V trojbokém výkrojku $-^1/_2O$, $^1/_2O'$, $O^1/_2''$ (obr. 32.), kdežto $^1/_2O' = 54^0\ 44'\ 8''$, $(o'\ o'') = 30^0$ (jelikož na stejnohranném Os otupuje osmistěnná plocha šestiplochý roh pravidelným šestiúhelníkem), jest dle vzorce 4.

$$cot\, 30^0 = \frac{-cot\, {}^1/_2 O\, sin\, 54^0\, 44'\, 8'' + cos\, 54^0\, 44'\, 8''\, cos\,(o, o')}{sin\,(o\, o')}$$ nebo

$$cos\; o, o') - 3\, sin\,(o, o') = cot\, {}^1/_2 O \sqrt{2}.$$

Vezmeme-li $3 = cot\, \varphi$, tedy $\varphi = 18^0\, 26'$, jest

$$sin\, \varphi\, cos\,(o, o') - cos\, \varphi\, sin\,(o, o') = cot\, {}^1/_2 O \sqrt{2}\, sin\, \varphi$$

nebo, an $sin\, \varphi = \sqrt{{}^1/_{10}}$,

$$sin\,[\varphi - (o, o')] = sin\, \sigma = cot\, {}^1/_2 O \sqrt{{}^1/_5}$$

Jelikož však $(o, o') + 45^0 = (a, o) = 63^0\, 26' - \sigma$, a hrana O jednu z hlavních os protíná ve vzdálenosti $= {}^1/_m$, druhou ve vzdálenosti $= {}^1/_n$, jest

$$\frac{m}{n} = \frac{2m}{m+1} = tang\,(a, o) = tang\,(63^0\, 26' - \sigma),$$ kdežto

$$sin\, \sigma = cot\, {}^1/_2 O \sqrt{{}^1/_5}.$$

40. Konečně vyskytuje se také odrůda osmačtyřicítníka, kteráž jest stejnohranná a zároveň kosočtverečná, tak že pro ní dle odstavců 33. a 37. jest

$$m - 1 = \frac{m+1}{2},$$

nebo

$$m = 3,\ n = 2.$$

Známka tohoto stejnohranně *kosočtverečného osmačtyřicítníka* jest tedy

$$Os = a^1/_3\, b^1/_2\, c_1,$$

místo čehož zkráceně psáti budeme

$$r_i = 321.$$

(Pokračování.)