Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Řehořovský

O jistém determinantu goniometrickém

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 3, 185--207

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122460

O jistém determinantu goniometrickém.

Podává V. Řehořovský v Brně.

A. Odvození determinantu.

1. Determinant, o jehož některých vlastnostech v následujícím se zmiňujeme, vyskytuje se při řešení této úlohy:

Buďtež α a φ dva libovolné úhly, α, $\alpha + \varphi$, $\alpha + 2\varphi, \ldots,$ $\alpha + n\varphi, \ldots$ úhly tvořící arithmetickou řadu o rozdílu φ; jest independentně vyjádřiti $\sin(\alpha + n\varphi)$ pomocí prvých dvou sinů $\sin\alpha$ a $\sin(\alpha + \varphi)$.

Dle známého vzorce

$$\sin\lambda + \sin\mu = 2\sin\frac{\lambda+\mu}{2}\cos\frac{\lambda-\mu}{2}$$

jest

$$\sin(\alpha + n\varphi) + \sin(\alpha + \overline{n-2}\,\varphi) = 2\sin(\alpha + \overline{n-1}\,\varphi)\cos\varphi,$$

aneb identicky

$$\sin(\alpha + n\varphi) - 2\cos\varphi\sin(\alpha + \overline{n-1}\,\varphi) + \sin(\alpha + \overline{n-2}\,\varphi) = 0. \tag{1}$$

Vzorce toho, který udává, jak lze počítati $\sin(\alpha + n\varphi)$ z obou bezprostředně předcházejících $\sin(\alpha + \overline{n-1}\,\varphi)$ a $\sin(\alpha + \overline{n-2}\,\varphi)$, užijeme ku řešení výše vytčené úlohy.

2. Obmezíme se na odvození vzorce pro $\sin(\alpha + 5\varphi)$; postup pro $\sin(\alpha + n\varphi)$ jest zcela podobný.

Klademe-li do (1) postupně $n = 5, 4, 3, 2$, dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha + 5\varphi) - 2\cos\varphi\sin(\alpha + 4\varphi) + \sin(\alpha + 3\varphi) = 0\\
&\sin(\alpha + 4\varphi) - 2\cos\varphi\sin(\alpha + 3\varphi) + \sin(\alpha + 2\varphi) = 0\\
&\sin(\alpha + 3\varphi) - 2\cos\varphi\sin(\alpha + 2\varphi) + \sin(\alpha + \varphi) = 0\\
&\sin(\alpha + 2\varphi) - 2\cos\varphi\sin(\alpha + \varphi) = -\sin\varphi.
\end{aligned}$$

Přibéřeme-li k tomu ještě rovnici

$$\sin(\alpha+\varphi)=\sin(\alpha+\varphi),$$

máme 5 lineárních rovnic, z kterých vypočteme $\sin(\alpha+5\varphi)$, $\sin(\alpha+4\varphi)$ a t. d. jako funkce $\sin\alpha$ a $\sin(\alpha+\varphi)$.

Determinant levých stran napsané soustavy rovnic jest $=1$, poněvadž členy v hlavní úhlopříčce jsou vesměs 1 a po jedné straně této úhlopříčky jsou samé nully.

Jest tedy dle známého pravidla pro řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\sin(\alpha+5\varphi)=\begin{vmatrix} 0 & -2\cos\varphi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\cos\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2\cos\varphi & 1 \\ -\sin\alpha & 0 & 0 & 1 & -2\cos\varphi \\ -\sin(\alpha+\varphi) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

kterýž determinant po některých změnách znamení (zde v 2. a 4. řádku, pak v 2. a 4. sloupci) a přemístění sloupců dostává tvar:

$$\sin(\alpha+5\varphi)=\begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\cos\varphi & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sin(\alpha+\varphi) \end{vmatrix}.$$

Zcela podobně dostane se obecně determinant n-ho stupně:

$$\sin(\alpha+n\varphi)=\begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\varphi & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \sin(\alpha+\varphi) \end{vmatrix} \quad (2)$$

Tím řešena jest úloha výše vytčená.

3. Rovnici (2) lze psáti jinak. Zaveďme označení

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\varphi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix}_{(n)}, \qquad (3)$$

kdež značka (n) v levo dole udává, že determinant jest stupně n-ho.

Rozvineme-li (2) dle prvků posledního sloupce, obdržíme na základě (3) nejprve

$$sin\,(\alpha + n\varphi) = D_{n-1}\, sin\,(\alpha + \varphi)$$

$$- \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\varphi & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varphi & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\varphi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)} .\, sin\,\alpha$$

a po redukci druhého determinantu na $(n - 2)$-ho stupně dále

$$sin\,(\alpha + n\varphi) = D_{n-1}\, sin\,(\alpha + \varphi) - D_{n-2}\, sin\,\alpha. \qquad (4)$$

Položí-li se zvláště $\alpha = 0$, dostane se

$$sin\,n\varphi = D_{n-1}\, sin\,\varphi \text{ aneb } D_{n-1} = \frac{sin\,n\varphi}{sin\,\varphi}, \qquad (5)$$

což shoduje se se vzorcem, který odvodil již *Bernoulli*, arciť ve tvaru rozvinutém *).

Vzorec (5) mohli jsme odvoditi ihned touže cestou jako (4), kdybychom byli ve vzorci (1) položili ihned $\alpha = 0$. Odvodili jsme však dříve (4) s úhlem α, poněvadž jest všeobecnější.

Determinant D_n definovaný vzorcem (3) jest onen, o kterém v tomto článku jednáme.

---

*) Srovnej *Studnička F. J.*, Úvod do nauky o determinantech. V Praze, 1899, str. 194.

B. Některé vlastnosti determinantu D_n.

4. Především můžeme z (5) stanoviti hodnotu D_0, kteráž vzorcem definičním (3) dána není. Klademe-li v (5) $n = 1$, dostaneme

$$D_0 = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} = 1. \tag{6}$$

5. Pro determinanty D platí rekurrentní vzorec:

$$D_n - 2\cos\varphi\, D_{n-1} + D_{n-2} = 0. \tag{7}$$

Abychom to odůvodnili, rozviňme determinant pravé strany (3) dle prvků prvého řádku; jest nejprve

$$D_n = 2\cos\varphi\, D_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\varphi & 1\dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\dots & 2\cos\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\dots & 1 & 2\cos\varphi & 1 \\ 0 & 0 & 0\dots & 0 & 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix}$$

a dále, poněvadž zbývající determinant redukuje se na subdeterminant příslušný prvému prvku 1, totiž na D_{n-2},

$$D_n = 2\cos\varphi\, D_{n-1} - D_{n-2},$$

z čehož následuje (7).

6. Jiná vlastnost determinantů D jest tato: *Determinanty D vyhovují relaci*

$$D_n D_{n-2} - D_{n-1}^2 = -1. \tag{8}$$

Jest totiž dle (7)

$$D_n - 2\cos\varphi\, D_{n-1} + D_{n-2} = 0$$

a též
$$D_{n+1} - 2\cos\varphi\, D_n + D_{n-1} = 0;$$

vyloučíme-li z obou rovnic $\cos\varphi$, dostaneme nejprve

$$D_n(D_n + D_{n-2}) - D_{n-1}(D_{n+1} + D_{n-1}) = 0$$

a dále

$$D_n D_{n-2} - D_{n-1}^2 = D_{n+1} D_{n-1} - D_n^2,$$

z čehož následuje, že jest výraz

$$D_n D_{n-2} - D_{n-1}^2 = \text{konstantě (číslu nezávislému } n).$$

Abychom hodnotu této konstanty stanovili, položme specielně $n = 2$; poněvadž jest

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2\cos\varphi, & 1 \\ 1\,, & 2\cos\varphi \end{vmatrix} = (2\cos\varphi)^2 - 1,$$

$$D_1 = 2\cos\varphi, \qquad D_0 = 1,$$

vychází

$$\text{konstanta} = [(2\cos\varphi)^2 - 1]\,.\,1 - (2\cos\varphi)^2 = -1$$

a tím dokázána relace (8).

7. Rovnice (7) a (8) udávají souvislost tří po sobě následujících determinantů D_{n-2}, D_{n-1} a D_n; na základě rovnic těch lze kterékoli dvě z těchto D vyjádřiti jako funkce třetího D.

Na př. vypočteme D_n a D_{n-2} jako funkce středního determinantu D_{n-1}.

Z rovnic (7) a (8) psaných ve tvarech

$$D_n + D_{n-2} = 2\cos\varphi\, D_{n-1},$$

$$D_n D_{n-2} = D_{n-1}^2 - 1$$

výsleduje, že D_n a D_{n-2} jsou kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - 2\cos\varphi\, D_{n-1} x + (D_{n-1}^2 - 1) = 0,$$

totiž

$$\left.\begin{matrix} D_n \\ D_{n-2} \end{matrix}\right\} = x_{1,2} = \cos\varphi\, D_{n-1} \pm \sqrt{\cos^2\varphi\, D_{n-1}^2 - D_{n-1}^2 + 1}$$

$$= \cos\varphi\, D_{n-1} \pm \sqrt{1 - \sin^2\varphi\, D_{n-1}^2}. \tag{9}$$

Zbývá rozhodnouti, které znamení v druhém členu pravé strany přísluší D_n a které D_{n-2}. O tom rozhodneme nejpohodlněji, klademe-li specielně $n = 2$; tu jest

$$D_1 = 2\cos\varphi$$

a má tedy býti

$$\left.\begin{matrix} D_2 \\ D_0 \end{matrix}\right\} = \cos\varphi\,.\,2\cos\varphi \pm \sqrt{1 - \sin^2\varphi\,.\,4\cos^2\varphi}$$

$$= 2\cos^2\varphi \pm \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi \pm (2\cos^2\varphi - 1);$$

poněvadž jest

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 1 \\ 1 & 2\cos\varphi \end{vmatrix} = 4\cos^2\varphi - 1$$

a dle (6) $$D_0 = 1,$$

náleží D_2 hořejší znamení $+$, D_0 dolejší $-$ a tedy též v rovnici (9) náleží D_n znamení $+$, D_{n-2} pak $-$.

Jest tedy

$$\begin{aligned} D_n &= \cos\varphi\, D_{n-1} + \sqrt{1 - \sin^2\varphi\, D_{n-1}^2}, \\ D_{n-2} &= \cos\varphi\, D_{n-1} - \sqrt{1 - \sin^2\varphi\, D_{n-1}^2}. \end{aligned} \tag{9'}$$

Jak bychom z rovnic (7) a (8) vypočetli D_n a D_{n-1} jako funkce D_{n-2} anebo D_{n-1} a D_{n-2} jako funkce D_n, nebudeme dále rozváděti; obdržené vzorce obsahovaly by podobně jako (9′) druhé odmocniny $\sqrt{1 - \sin^2\varphi\, D_{n-2}^2}$ a $\sqrt{1 - \sin^2\varphi\, D_n^2}$.

8. Irracionality ze vzorců (9′) a jiných lze odstraniti, *zavedeme-li násobky úhlu* φ. Jest totiž dle vzorce (5)

$$\sin\varphi\, D_{n-1} = \sin n\varphi$$

a tedy

$$\sqrt{1 - \sin^2\varphi\, D_{n-1}^2} = \cos n\varphi,$$

tak že vzorce (9′) lze psáti

$$D_n = \cos\varphi\, D_{n-1} + \cos n\varphi. \tag{10'}$$

$$D_{n-2} = \cos\varphi\, D_{n-1} - \cos n\varphi. \tag{10''}$$

Vložíme-li z (10′) vypočtenou hodnotu

$$\cos\varphi\, D_{n-1} = D_n - \cos n\varphi$$

do obecné rovnice (7), dostaneme

$$D_n = D_{n-2} + 2\cos n\varphi; \tag{11'}$$

a klademe-li v (10′) $n - 1$ za n, obdržíme

$$D_{n-1} = \cos\varphi\, D_{n-2} + \cos(n-1)\varphi. \tag{11''}$$

Těmito vzorci vyjádřeny jsou D_n a D_{n-1} jako funkce D_{n-2}.

Dále následuje z rovnice (11′) ihned

$$D_{n-2} = D_n - 2\cos n\varphi, \tag{12'}$$

a z rovnice (10″), klademe-li tam $(n+1)$ za n,

$$D_{n-1}=\cos\varphi\, D_n - \cos(n+1)\varphi, \tag{12″}$$

kterýmiž rovnicemi vyjádřeny jsou D_{n-2} a D_{n-1} jako funkce D_n.

9. Obecnější redukční vzorec, kde D_n vyjádřeno jest *dvěma determinanty*, dostaneme, píšeme-li

$$\sin(n+1)\varphi=\sin(\overline{n-k+1}+k)\varphi$$

a rozvineme-li pravou stranu známým způsobem. Jest

$$\sin(n+1)\varphi=\sin(n-k+1)\varphi\cos k\varphi+\cos(n-k+1)\varphi\sin k\varphi;$$

dělíme-li $\sin\varphi$ a užijeme-li vzorce (5), vychází

$$D_n=\cos k\varphi\, D_{n-k}+\cos(n-k+1)\varphi D_{k-1}, \tag{13}$$

kdež D_n vyjádřeno jest dvěma determinanty stupňů nižších.

Pro $k=1$ vychází (10′).

Podobným rozkladem, píšíce

$$\sin(n+1)\varphi=\sin(\overline{n+k+1}-k)\varphi,$$

dostáváme

$$D_n=\cos k\varphi\, D_{n+k}-\cos(n+k+1)\varphi\, D_{k-1}, \tag{14}$$

kdež D_n vyjádřeno jedním determinantem stupně vyššího a jedním stupně nižšího.

10. Z rovnice (11′) lze *odvoditi hodnotu D_n jako funkci násobků úhlu φ*. Třeba tu rozeznávati dva případy:

a) n jest sudé a $=2m$. Klademe-li postupně za n hodnoty $2m$, $2m-2,\ldots,4$, 2, dostaneme

$$\begin{aligned} D_{2m}&=D_{2m-2}+2\cos 2m\varphi,\\ D_{2m-2}&=D_{2m-4}+3\cos(2m-2)\varphi,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ D_4&=D_2+2\cos 4\varphi,\\ D_2&=D_0+2\cos 2\varphi; \end{aligned}$$

sečteme-li a dosadíme-li $D_0=1$, obdržíme

$$D_{2m}=1+2(\cos 2\varphi+\cos 4\varphi+\ldots+\cos 2m\varphi). \tag{15}$$

Z toho jest naopak, přičteme-li na obou stranách 1 a dělíme-li dvěma,

$$1+\cos 2\varphi+\cos 4\varphi+\ldots+\cos 2m\varphi=\frac{D_{2m}+1}{2};$$

avšak na základě (5) jest

$$\frac{D_{2m}+1}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2m+1)\varphi}{\sin\varphi}+1\right]=\frac{\sin(2m+1)\varphi+\sin\varphi}{2\sin\varphi}$$

$$=\frac{\sin(m+1)\varphi\,.\,\sin m\varphi}{\sin\varphi}$$

a tedy

$$1+\cos 2\varphi+\cos 4\varphi+\ldots+\cos 2m\varphi=\frac{\sin(m+1)\varphi\sin m\varphi}{\sin\varphi}. \tag{16}$$

b) n jest liché a $=2m+1$. Položíme-li do (11′) postupně za n hodnoty $2m+1$, $2m-1,\ldots,5, 3$, dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} D_{2m+1} &= D_{2m-1}+2\cos(2m+1)\varphi, \\ D_{2m-1} &= D_{2m-3}+2\cos(2m-1)\varphi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_5 &= D_3+2\cos 5\varphi, \\ D_3 &= D_1+2\cos 3\varphi; \end{aligned}$$

sečteme-li a dosadíme-li $D_1=2\cos\varphi$, vyjde

$$D_{2m+1}=2[\cos\varphi+\cos 3\varphi+\ldots+\cos(2m+1)\varphi];$$

uvážíme-li, že dle (5) jest

$$D_{2m+1}=\frac{\sin(2m+2)\varphi}{\sin\varphi},$$

dostáváme

$$\cos\varphi+\cos 3\varphi+\ldots+\cos(2m+1)\varphi=\frac{\sin(2m+2)\varphi}{2\sin\varphi}. \tag{17}$$

11. Z rovnice (5) lze odvoditi ještě jiný výraz pro D_n. Jest totiž

$$D_n-D_{n-1}=\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}-\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}=\frac{\sin(n+1)\varphi-\sin n\varphi}{\sin\varphi}$$

$$=\frac{2\cos\frac{2n+1}{2}\varphi\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}=\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}$$

a tedy

$$D_n = D_{n-1} + \frac{\cos \frac{2n+1}{2} \varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}}. \tag{18}$$

Klademe-li sem za n postupně $n-1$, $n-2, \ldots, 3, 2, 1$ a sečteme-li pak veškeré rovnice, dostaneme uváživše, že $D_0 = 1$,

$$D_n = \frac{\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{3\varphi}{2} + \ldots + \cos \frac{(2n+1)\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}. \tag{19}$$

Naopak, nahradíme-li tu

$$D_n = \frac{\sin (n+1) \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\sin (n+1) \varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}},$$

nabýváme vzorce součtového

$$\cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{3\varphi}{2} + \ldots + \cos \frac{(2n+1)\varphi}{2} = \frac{\sin (n+1) \varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}. \tag{20}$$

C. Některé specielní tvary determinantu D_n.

12. Položme v (3)

$$\varphi = 0, \quad \text{t. j.} \ \cos \varphi = 1;$$

pak jest

$$\sin \varphi = 0, \quad \sin (n+1) \varphi = 0,$$

a tedy hodnota determinantu

$$D_n = \frac{\sin (n+1) \varphi}{\sin \varphi} = \frac{0}{0};$$

vymezíme-li tuto hodnotu, dostáváme

$$D_n = \frac{(n+1) \cos (n+1) \varphi}{\cos \varphi} = n+1,$$

tak že platí

$$\overset{\varphi=0}{/} D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{(n)} = n + 1, \tag{21}$$

t. j. blíží-li se φ mezní hodnotě 0, konverguje hodnota determinantu D_n k číslu $(n+1)$.

13. Položme v (3)

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ t. j. } \cos\varphi = 0;$$

hodnota determinantu D_n pro tento případ jest

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ liché,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{,, } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Dostáváme tedy

$$\overset{\varphi=\frac{\pi}{2}}{/} D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ liché,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{,, } n \text{ sudé.} \end{cases} \tag{22}$$

14. Položíme-li v (3)

$$\varphi = \pi,$$

jest

$$\cos\varphi = -1, \quad \sin\varphi = 0, \quad \sin(n+1)\varphi = 0$$

a tedy hodnota determinantu

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = \frac{0}{0} = \frac{(n+1)\cos(n+1)\varphi}{\cos\varphi} = (-1)^n(n+1),$$

tak že platí

$$\overset{\varphi=\pi}{/D_n} = \left|\begin{matrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{matrix}\right|_{(n)} = (-1)^n (n+1) \quad (23)$$

15. Podobnou úvahou dostaneme, klademe-li

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \text{ t. j. } \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

že jest

$$\left|\begin{matrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{matrix}\right|_{(n)}$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{4}}, & \text{je-li } n \text{ tvaru } 4m, \\ (-1)^{\frac{n-1}{4}}\sqrt{2}, & \quad ,, \quad n \quad ,, \quad 4m+1, \\ (-1)^{\frac{n-2}{4}}, & \quad ,, \quad n \quad ,, \quad 4m+2, \\ 0, & \quad ,, \quad n \quad ,, \quad 4m+3. \end{cases} \quad (24)$$

16. Klademe-li $\varphi = \frac{\pi}{3}$, t. j. $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, dospíváme podobně k výsledku, že

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right| = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{3}} & \text{pro } n \text{ tvaru } 3m, \\ (-1)^{\frac{n-1}{3}} & \quad ,, \quad n \quad ,, \quad 3m+1, \\ 0 & \quad ,, \quad n \quad ,, \quad 3m+2. \end{cases} \quad (25)$$

D. Rozvinutí determinantu D_n dle mocnin $2 \cos \varphi$.

17. Determinant D_n jest stupně n-ho a obsahuje v hlavní úhlopříčce vesměs členy $2 \cos \varphi$ se součinitelem 1, vyskytuje se tedy $2 \cos \varphi$ v rozvinutém výrazu nejvýše v mocnině n-té a to se součinitelem 1; lze tedy obecně položiti

$$D_n = (2 \cos \varphi)^n + f_1(n)(2 \cos \varphi)^{n-1} + f_2(n)(2 \cos \varphi)^{n-2} + \dots + f_{n-1}(n)(2 \cos \varphi) + f_n(n),$$

kdež $f_1(n)$, $f_2(n)$, ..., $f_n(n)$ jsou jakési číselné koefficienty závislé na n.

Dokážeme především, že ve výrazu pravé strany klesá mocnitel vždy o 2 jednotky, tak že vyskytují se jen mocnitelé n, $n-2$, $n-4$ atd. Abychom to dokázali, užijme rovnice (5), dle které

$$D_n = \frac{\sin (n+1) \varphi}{\sin \varphi}$$

a položme

$$(2 \cos \varphi)^n + f_1(n)(2 \cos \varphi)^{n-1} + f_2(n)(2 \cos \varphi)^{n-2} + \dots + f_{n-1}(n)(2 \cos \varphi) + f_n(n) = \frac{\sin (n+1) \varphi}{\sin \varphi}. \quad \text{(a)}$$

Rovnice ta platí pro každé φ, tedy i, přejde-li φ ve $\pi - \varphi$; pak

$$\begin{array}{lll} \cos \varphi & \text{přejde v} & (-\cos \varphi), \\ \sin \varphi & \text{,,} & \text{,,} \ \sin \varphi, \\ \sin (n+1) \varphi & \text{,,} & \text{,,} \ \sin [(n+1)\pi - (n+1)\varphi] \\ & & = \begin{cases} \sin (n+1) \varphi & \text{pro } n \text{ sudé}, \\ -\sin (n+1) \varphi & \text{,, } n \text{ liché}. \end{cases} \end{array}$$

Jestli n sudé, nabývá rovnice (a) po dosazení naznačených změn tvaru

$$(2 \cos \varphi)^n - f_1(n)(2 \cos \varphi)^{n-1} + f_2(n)(2 \cos \varphi)^{n-2} - \dots - f_{n-1}(n)(2 \cos \varphi) + f_n(n) = \frac{\sin (n+1) \varphi}{\sin \varphi}. \quad \text{(b)}$$

Odečteme-li rovnice (a) a (b) současně pro sudé n platné a dělíme-li dvěma, obdržíme

$$f_1(n)(2 \cos \varphi)^{n-1} + f_3(n)(2 \cos \varphi)^{n-3} + \dots + f_{n-1}(n)(2 \cos \varphi) = 0;$$

poněvadž to má platiti pro všechny hodnoty φ, musí býti

$$f_1(n) = 0, \quad f_3(n) = 0, \ldots, f_{n-1}(n) = 0$$

a tedy rovnice pro D_n *při sudém* n jest tvaru

$$D_n = (2\cos\varphi)^n + f_2(n)(2\cos\varphi)^{n-2} + \ldots$$
$$+ f_{n-2}(n)(2\cos\varphi)^2 + f_n(n). \quad (26)$$

Počet členů na pravé straně jest $\frac{n}{2} + 1$.

Hodnotu $f_n(n)$ můžeme hned určiti; položíme-li sem

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ t. j. } \cos\varphi = 0,$$

dostáváme

$$\left. D_n \right/^{\varphi = \frac{\pi}{2}} = f_n(n)$$

a tedy dle (22), poněvadž n jest sudé,

$$f_n(n) = (-1)^{\frac{n}{2}}. \quad (27)$$

Je-li n liché, nabývá (a) po dosažení $\pi - \varphi$ za φ a změn z toho následujících tvaru

$$-(2\cos\varphi)^n + f_1(n)(2\cos\varphi)^{n-1} - f_2(n)(2\cos\varphi)^{n-2} + \ldots$$
$$- f_{n-1}(n)(2\cos\varphi) + f_n(n) = -\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} \quad (c)$$

a sečteme-li rovnice (a) a (c) současně pro liché n platné a dělíme-li dvěma, dostáváme

$$f_1(n)(2\cos\varphi)^{n-1} + f_3(n)(2\cos\varphi)^{n-3} + \ldots + f_n(n) = 0,$$

z čehož dále následuje, poněvadž to má platiti pro všechny hodnoty φ, že musí býti

$$f_1(n) = 0, \quad f_3(n) = 0, \ldots, f_n(n) = 0;$$

jest tedy rovnice pro D_n *při lichém* n tvaru

$$D_n = (2\cos\varphi)^n + f_2(n)(2\cos\varphi)^{n-4} + \ldots + f_{n-3}(n)(2\cos\varphi)^3$$
$$+ f_{n-1}(n)(2\cos\varphi). \quad (28)$$

Počet členů na pravé straně jest $\frac{n+1}{2}$.

18. Abychom určili zákon, dle kterého jsou tvořeny koefficienty $f_2(n), f_4(n), \ldots$, užijeme rovnice (7)

$$D_n - 2\cos\varphi \,.\, D_{n-1} + D_{n-2} = 0.$$

Dejme tomu, že n jest sudé; pak jest D_n dáno rovnicí (26) a D_{n-2} dle téže rovnice bude

$$\begin{aligned} D_{n-2} = (2\cos\varphi)^{n-2} + f_2(n-2)(2\cos\varphi)^{n-4} + \ldots \\ + f_{n-4}(n-2)(2\cos\varphi)^2 + f_{n-2}(n-2), \end{aligned}$$

kdežto, protože $(n-1)$ jest liché, bude dle rovnice (28)

$$\begin{aligned} D_{n-1} = (2\cos\varphi)^{n-1} + f_2(n-1)(2\cos\varphi)^{n-3} + \ldots \\ + f_{n-4}(n-1)(2\cos\varphi)^3 + f_{n-2}(n-1)(2\cos\varphi). \end{aligned}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty za D_n, D_{n-1} a D_{n-2} do výše zmíněné rovnice (7), musí této identicky býti vyhověno, t. j. koefficienty u jednotlivých mocnin $(2\cos\varphi)$ musí každý o sobě býti roven nulle; výminka ta vede k následujícím funkcionálním rovnicím:

$$\left.\begin{aligned} f_2(n) - f_2(n-1) + 1 &= 0, \\ f_4(n) - f_4(n-1) + f_2(n-2) &= 0, \\ f_6(n) - f_6(n-1) + f_4(n-2) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_{n-2}(n) - f_{n-2}(n-1) + f_{n-4}(n-2) &= 0, \\ f_n(n) + f_{n-2}(n-2) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Poslední z těchto rovnic jest skutečně vyhověno, neboť dle (27) jest

$$f_n(n) = (-1)^{\frac{n}{2}},\ f_{n-2}(n-2) = (-1)^{\frac{n-2}{2}} = -(-1)^{\frac{n}{2}}.$$

Z rovnic (29) lze určiti tvar jednotlivých funkcí $f_2(n)$, $f_4(n)$ a t. d.

Z prvé rovnice (29), klademe-li tam postupně $n, n-1, n-2$ a t. d., dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} f_2(n) &= f_2(n-1) - 1, \\ f_2(n-1) &= f_2(n-2) - 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_2(3) &= f_2(2) \quad - 1, \end{aligned}$$

a dle (27) $\quad f_2(2) = \quad - 1;$

sečtením vychází

$$f_2(n) = (-1)(n-1) = (-1)^1 (n-1)_1. \qquad (30)$$

Z druhé rovnice (29) jest

$$f_4(n) = f_4(n-1) - f_2(n-2)$$

aneb, užijeme-li výsledku (30),

$$f_4(n) = f_4(n-1) + (n-3)_1;$$

klademe-li sem postupně n, $n-1$, $n-2$, ..., obdržíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} f_4(n) &= f_4(n-1) + (n-3)_1, \\ f_4(n-1) &= f_4(n-2) + (n-4)_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_4(6) &= f_4(5) + (3)_1, \\ f_4(5) &= f_4(4) + (2)_1; \end{aligned}$$

a dle (27) $\qquad f_4(4) = \quad 1 = (1)_1;$

sečteme-li a užijeme-li známého vzorce o binomiálních součinitelích

$$(n)_p + (n-1)_p + \ldots (p+1)_p + (p)_p = (n+1)_{p+1},$$

dostaneme

$$f_4(n) = (n-2)_2 = (-1)^2 (n-2)_2. \qquad (31)$$

Odvoďme ještě hodnotu pro $f_6(n)$. Z třetí rovnice (29) jest

$$f_6(n) = f_6(n-1) - f_4(n-2),$$

aneb na základě (31)

$$f_6(n) = f_6(n-1) - (n-4)_2;$$

kladouce sem opět postupně n, $n-1$, $n-2$ a t. d., obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} f_6(n) &= f_6(n-1) - (n-4)_2, \\ f_6(n-1) &= f_6(n-2) - (n-5)_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_6(8) &= f_6(7) \qquad - (4)_2, \\ f_6(7) &= f_6(6) \qquad - (3)_2, \end{aligned}$$

a dle (27) $\qquad f_6(6) = -1 \qquad = -(2)_2;$

sečteme-li a nahradíme-li součet binomiálních koefficientů opět dle výše zmíněného vzorce, vychází

$$f_6(n) = -(n-3)_3 = (-1)^3 (n-3)_3. \qquad (32)$$

Poněvadž funkcionální rovnice (29) pro další koefficienty $f_8(n)$, $f_{10}(n)$ a t. d. jsou téhož tvaru jako pro koefficienty již vypočtené, bude analogicky

$$f_8(n) = (-1)^4 (n-4)_4,$$
$$f_{10}(n) = (-1)^5 (n-5)_5,$$
a t. d.,

obecně
$$f_{2m}(n) = (-1)^m (n-m)_m. \qquad (33)$$

Při odvození rovnic (29) předpokládali jsme n sudé; kdybychom byli předpokládali n liché, byli bychom dostali pro funkce $f_2, f_4, \ldots$ tentýž výtvarný zákon daný rovnicemi (29), tak že rovnice (30) až (33) platí pro sudé neb liché n.

Lze tedy psáti *pro sudé n* na základě (26)

$$D_n = (2\cos\varphi)^n - (n-1)_1 (2\cos\varphi)^{n-2} +$$
$$(n-2)_2 (2\cos\varphi)^{n-4} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} \qquad (34)$$

a *pro liché n* na základě (28)

$$D_n = (2\cos\varphi)^n - (n-1)_1 (2\cos\varphi)^{n-2} + (n-2)_2 (2\cos\varphi)^{n-4}$$
$$- \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\tfrac{n+1}{2}\right)_{\frac{n-1}{2}} (2\cos\varphi). \qquad (35)$$

Tak na př. jest

$$\begin{aligned} D_8 &= (2\cos\varphi)^8 - (7)_1 (2\cos\varphi)^6 + (6)_2 (2\cos\varphi)^4 \\ &\quad - (5)_3 (2\cos\varphi)^2 + (-1)^4 \\ &= (2\cos\varphi)^8 - 7(2\cos\varphi)^6 + 15(2\cos\varphi)^4 \\ &\quad - 10(2\cos\varphi)^2 + 1; \end{aligned}$$

aneb

$$\begin{aligned} D_7 &= (2\cos\varphi)^7 - (6)_1 (2\cos\varphi)^5 + (5)_2 (2\cos\varphi)^3 \\ &\quad - (4)_3 (2\cos\varphi) \\ &= (2\cos\varphi)^7 - 6(2\cos\varphi)^5 + 10(2\cos\varphi)^3 - 4(2\cos\varphi). \end{aligned}$$

19. Z rovnic (34) a (35) lze odvoditi některé součtové vzorce, klademe-li za φ zvláštní hodnoty, jako jsme to učinili v čl. 12. a násl.

a) Pro $\varphi = 0$, t. j. $\cos\varphi = 1$ jest dle (21)

$$D_n = n + 1,$$

nechť jest n sudé neb liché; z rovnice (34) výsleduje tedy *pro sudé* n

$$2^n - (n-1)_1\, 2^{n-2} + (n-2)_2\, 2^{n-4} - \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} = n + 1$$

a z rovnice (35) *pro liché* n

$$\begin{aligned} &2^n - (n-1)_1\, 2^{n-2} + (n-2)_2\, 2^{n-4} - \dots \\ &\quad + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\tfrac{n+1}{2}\right)_{\frac{n-1}{2}} \cdot 2 = n + 1. \end{aligned}$$

b) Budiž $\varphi = \frac{\pi}{4}$, t. j. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $2\cos\varphi = \sqrt{2}$. Předpokládajíce n *sudé*, dostaneme z (34)

$$\begin{aligned} D_n &= (\sqrt{2})^n - (n-1)_1 (\sqrt{2})^{n-2} + (n-2)_2 (\sqrt{2})^{n-4} - \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \\ &= 2^{\frac{n}{2}} - (n-1)_1\, 2^{\frac{n}{2}-1} + (n-2)_2\, 2^{\frac{n}{2}-4} - \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

a srovnáme-li to s hodnotami (24), jest

$$\begin{aligned} &2^{\frac{n}{2}} - (n-1)_1\, 2^{\frac{n}{2}-1} + (n-2)_2\, 2^{\frac{n}{2}-4} - \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \\ &= \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{4}}, & \text{jestli } n \text{ tvaru } 4m, \\ (-1)^{\frac{n-2}{4}} & \text{,, } n \text{ ,, } 4m + 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Předpokládáme-li n *liché*, výsleduje z (35)

$$\begin{aligned} D_n &= (\sqrt{2})^n - (n-1)_1 (\sqrt{2})^{n-2} + (n-2)_2 (\sqrt{2})^{n-4} - \dots \\ &\quad + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\tfrac{n+1}{2}\right)_{\frac{n-1}{2}} \sqrt{2}, \end{aligned}$$

aneb, vyjmeme-li na první straně $\sqrt{2}$,

$$D_n = \sqrt{2}\Big[2^{\frac{n-1}{2}} - (n-1)_1\, 2^{\frac{n-3}{2}} + (n-2)_2\, 2^{\frac{n-5}{2}} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\tfrac{n+1}{2}\right)_{\frac{n-1}{2}}\Big];$$

srovnáme-li to s příslušnými hodnotami D_n v (24), dostáváme dělíce obě strany hodnotou $\sqrt{2}$

$$2^{\frac{n-1}{2}} - (n-1)_1\, 2^{\frac{n-3}{2}} + (n-2)_2\, 2^{\frac{n-5}{2}} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\tfrac{n+1}{2}\right)_{\frac{n-1}{2}}$$
$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{4}}, & \text{jestli } n \text{ tvaru } 4m+1, \\ 0, & \;\; n \;\; \text{,,} \;\; 4m+3. \end{cases}$$

c) Budiž $\varphi = \frac{\pi}{3}$, t. j. $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $2\cos\varphi = 1$. Pro sudé n dává (34)

$$D_n = 1 - (n-1)_1 + (n-2)_2 - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}$$

a pro liché n rovnice (35)

$$D_n = 1 - (n-1)_1 + (n-2)_2 - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\tfrac{n+1}{2}\right)_{\frac{n-1}{2}}.$$

Abychom to mohli porovnati s příslušnými hodnotami D_n danými rovnicí (25), třeba tam předpokládati jednou m sudé $= 2k$, po druhé liché $= 2k+1$, čímž vznikne všech 6 možných případů pro n, totiž tvary $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ a $6k+5$. Tím nabýváme rovnice *pro sudá n*

$$1 - (n-1)_1 + (n-2)_2 - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}$$
$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{3}} = +1, & \text{je-li } n \text{ tvaru } 6k, \\ 0, & \;\; \text{,,} \;\; n \;\; \text{,,} \;\; 6k+2, \\ (-1)^{\frac{n-1}{3}} = -1, & \;\; \text{,,} \;\; n \;\; \text{,,} \;\; 6k+4, \end{cases}$$

a *pro lichá n*

$$1 - (n-1)_1 + (n-2)_2 - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\tfrac{n+1}{2}\right)_{\frac{n-1}{2}}$$
$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{3}} = +1, & \text{je-li } n \text{ tvaru } 6k+1, \\ (-1)^{\frac{n}{3}} = -1, & \;\; \text{,,} \;\; n \;\; \text{,,} \;\; 6k+3, \\ 0, & \;\; \text{,,} \;\; n \;\; \text{,,} \;\; 6k+5. \end{cases}$$

Podobných vzorců dalo by se odvoditi ještě více.

E. **Opakující se hodnoty determinantu** D.

20. Volíme-li φ a počítáme-li postupně hodnoty determinantů D_0, D_1, $D_2, \ldots, D_h, \ldots, D_m, \ldots$, může se státi, že některý determinant D_m má stejnou hodnotu s některým již předcházejícím determinantem D_h. Lze tedy si položiti otázku, za kterých výminek takový případ nastává.

Z velikého množství případů, které se tu mohou vyskytnouti, vytkněme jen jeden případ.

21. Dejme tomu, že mají býti *dva po sobě bezprostředně následující determinanty stejny,* t. j. má býti

$$D_m = D_{m-1}. \tag{36}$$

Případ ten na základě (18) nastane, když

$$\frac{\cos \frac{2m+1}{2} \varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} = 0.$$

Případ, aby jmenovatel byl $= \infty$, nemůže nastati; podobně odpadá případ, kde pro určité hodnoty φ zlomek nabývá tvaru $\frac{0}{0}$, neboť určí-li se pak pravá hodnota zlomku dle známého pravidla, shledá se, že není rovna 0, jak to pravá strana žádá.

Zbývá tedy jen, že čitatel se musí rovnati nulle, což nastane, jestli

$$\frac{2m+1}{2} \varphi = (2k+1) \frac{\pi}{2},$$

aneb

$$(2m+1) \varphi = (2k+1) \pi, \tag{37}$$

kdež k značí libovolné celé číslo.

22. Z výminky (36), resp. (37) plynou další konsekvence. Především jest přímo na základě (5) a (37)

$$D_{2m} = \frac{\sin (2m+1) \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\sin (2k+1) \pi}{\sin \varphi} = 0. \tag{38}$$

Dále jest opět na základě (5) a (37)

$$D_{2m-h} = \frac{\sin(2m-h+1)\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin[(2k+1)\pi - h\varphi]}{\sin\varphi}$$
$$= \frac{\sin h\varphi}{\sin\varphi},$$

t. j.
$$D_{2m-h} = D_{h-1}. \tag{39}$$

Jest tedy

$$D_{2m-1} = D_0,\ D_{2m-2} = D_1, \ldots, D_{m+1} = D_{m-2},$$

tak že opakují se tu hodnoty D_0 až D_{m-2} z první poloviny intervallu D_0 až D_{2m}.

Pro veškeré hodnoty po D_{2m} následující jest obecně opět dle (5) a (37)

$$D_{2m+h} = \frac{\sin(2m+h+1)\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin[(2k+1)\pi + h\varphi]}{\sin\varphi}$$
$$= -\frac{\sin h\varphi}{\sin\varphi},$$

t. j.
$$D_{2m+h} = -D_{h-1}. \tag{40}$$

Tím získány v (39) a (40) redukční vzorce, pomocí jichž kterýkoli determinant D_n o libovolném n lze převésti na determinant o ukazovateli v mezích od 0 do $(m-1)$.

Klademe-li obecně

$$n = \alpha m + \beta,$$

můžeme psáti

$$D_{\alpha m+\beta} = D_{2m+(\alpha-2)m+\beta}$$

a tedy dle (40)

$$D_{\alpha m+\beta} = -D_{(\alpha-2)m+\beta-1}, \tag{41}$$

kterýž vzorec postupně užit vede buď přímo k determinantu D o ukazovateli v mezích od 0 do $(m-1)$ aneb může pomocí (39) snadno na takový převeden býti.

Na př. jest

$$D_{7m-6} = -D_{5m-7} = (-1)^2 D_{3m-8} = (-1)^3 D_{m-9}.$$

Z toho jde: *Platí-li výminka (36), resp. (37), mají veškeré determinanty D celkem jen $(m+1)$ různých absolutních hodnot* 0, $D_0, D_1, \ldots, D_{m-1}$.

Z rovnice (40) neb (41) následuje, že jest

$$\begin{aligned} D_{4m+1} &= -D_{2m} = 0, \\ D_{6m+2} &= -D_{4m+1} = 0, \text{ a t. d.} \end{aligned} \tag{42}$$

Na základě těchto výsledků lze pro veškeré hodnoty determinantů D_n sestaviti schema z hodnot 0, D_0, D_1, . . , D_{m-1} jak následuje. Nejvyšší řádek obsahuje čísla 0, 1, . . . , $2m$, první sloupec čísla 0, $2m+1$, $4m+2$, ... Index n příslušný určitému místu obdržíme, sečteme-li čísla příslušná určitému řádku a sloupci; na př. sloupci $(m+1)$ a řádku $(4m+2)$ přísluší determinant

$$D_n = D_{m+1+4m+2} = D_{5m+3} \text{ a má hodnotu } = D_{m-2}.$$

	0	1	2	..	$m-2$	$m-1$	m	$m+1$	..	$2m-1$	$2m$
0	D_0	D_1	D_2	..	D_{m-2}	D_{m-1}	D_{m-1}	D_{m-2}	..	D_0	0
$2m+1$	$-D_0$	$-D_1$	$-D_2$	..	$-D_{m-2}$	$-D_{m-1}$	$-D_{m-1}$	$-D_{m-2}$	..	$-D_0$	0
$4m+2$	D_0	D_1	D_2	..	D_{m-2}	D_{m-1}	D_{m-1}	D_{m-2}	..	D_0	0
$6m+3$	$-D_0$	$-D_1$	$-D_2$	..	$-D_{m-2}$	$-D_{m-1}$	$-D_{m-1}$	$-D_{m-2}$	..	$-D_0$	0
. . .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .

23. Jak bylo ukázáno, vede výminka $D_m = D_{m-1}$, aby dva po sobě jdoucí determinanty měly hodnoty stejné, k tomu, že pak kterýkoli determinant D_n lze vyjádřiti jednou z hodnot 0, $D_0 = 1$, D_1. . . . , D_{m-1}. Při tom však hodnota m závislá jest dle (37) na φ a naopak. Jedná se nyní o bližší vyšetření této závislosti.

Z rovnice (37) následuje

$$2m + 1 = (2k + 1)\frac{\pi}{\varphi};$$

vyjádříme-li úhly ve vteřinách, při čemž

$$\pi = 180^0 = 648000'' = 2^6 \, . \, 3^4 \, . \, 5^3,$$

jest dále

$$2m + 1 = (2k + 1)\frac{2^6 \, . \, 3^4 \, . \, 5^3}{\varphi''}. \tag{43}$$

Poněvadž levá strana jest celé liché číslo, musí to býti i strana pravá a tedy může býti φ především jen tvaru

$$\varphi'' = 2^6 \, . \, \varepsilon'', \tag{44}$$

načež

$$2m + 1 = (2k + 1)\,\frac{3^4 . 5^3}{\varepsilon}. \tag{45}$$

Další řešení podmíněna jsou volbou čísla k; obmezme se na jediný případ, kde $k = 0$; pak jest

$$2m + 1 = \frac{3^4 . 5^3}{\varepsilon}. \tag{46}$$

I při tomto obmezení poskytuje (46) nekonečný počet řešení, neboť stačí za ε položiti zlomek, jehož čitatel jest dělitelem čísla $3^4 . 5^3$ a jehož jmenovatel jest kterékoli liché číslo, tedy položiti

$$\varepsilon = \frac{3^\lambda . 5^\mu}{2h + 1}, \quad \lambda \leqq 4, \quad \mu \leqq 3;$$

vyšlo by pak

$$2m + 1 = (2h + 1)\, 3^{4-\lambda}\, 5^{3-\mu},$$

tedy kladné, celé a liché číslo.

Proto učiňme ještě další obmezení, že *má býti ε celé číslo*. V tom případu musí dle (46) ε býti dělitelem čísla $3^4 . 5^3$, Možná řešení, nyní v konečném počtu 20, jsou pak

$$\varepsilon = 1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 5,\ 5^2,\ 5^3,\ 3 . 5,\ 3 . 5^2,\ 3 . 5^3,\ 3^2 . 5,\ 3^2 . 5^2,\ 3^2 . 5^3,\ 3^3 . 5,\ 3^3 . 5^2,\ 3^3 . 5^3,\ 3^4 . 5,\ 3^4 . 5^2,\ 3^4 . 5^3.$$

Volíme-li na př.

$$\varepsilon = 3^3 . 5^2,$$

jest dle (44)

$$\varphi = 2^6 . 3^3 . 5^2 = 43200'' = 12^0$$

a dle (46)

$$2m + 1 = 3 . 5 = 15,$$

t. j.

$$m = 7.$$

Jsou pak v tomto případě dle (38) a (42)

$$D_{14} = D_{29} = D_{44} = D_{59} = \ldots = 0$$

a ostatní determinanty mají jednu z hodnot $\pm D_0, \pm D_1, \ldots \pm D_6$.

Kdybychom volili

$$\varepsilon = 3^4,$$

bylo by

$$\begin{aligned} \varphi &= 2^6 . 3^4 = 5184'' = 1^0 26' 24'', \\ 2m + 1 &= 5^3 = 125, \\ m &= 62\,; \end{aligned}$$

tu by hodnotu 0 měly determinanty

$$D_{124},\ D_{249},\ D_{374},\ \ldots$$

a ostatní determinanty by měly jednu z hodnot $\pm D_0$, $\pm D_1, \ldots,$ $\pm D_{61}$, o čemž rozhodnouti lze dle rovnice (41), po případě (39). Tak bylo by na př.

$$D_{326} = D_{5.62+16} = -D_{3.62+15} = (-1)^2 D_{62+14}$$

a dále dle (39)

$$= D_{2.62-48} = D_{47}.$$

Podobným způsobem vyšetřovaly by se jiné případy.

V Brně dne 9. prosince 1905.

Úvod do vektorové analyse.

Napsal prof. **Ant. Libický**.

Vektorová analysis, jedna z mladších větví vědy mathematické, pěstována byla s počátku hlavně učenci anglickými a americkými (Hamilton, Hyde, Heaviside, Gibbs, Wilson a j.). V Německu, kde základy tohoto počtu zbudovány byly F. Möbiusem a H. Grassmannem, teprv od nedávna jeví se proň čilý zájem, obzvláště když se ukázalo, jaké platné služby prokazuje v novější nauce o elektřině (v elektrodynamice a v theorii elektronové). Svědčiť o tom řada spisů, vydaných v posledních letech o tomto předmětu*). I soudím, že by bylo prospěšno, aby i

*) *Föppl*: »Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität«; druhé vydání téhož spisu od *Abrahama*; *Föppl*: »Die Geometrie der Wirbelfelder«; *Bucherer*: »Elemente der Vektor-Analysis«; *Gans*: »Einführung in die Vektoranalysis«; *Jahnke*: »Vorlesungen über die Vektorenrechnung«; *V. Fischer*: »Vektordifferentiation und Vektorintegration«; příslušné články v »Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften«, kterou vydává Teubner v Lipsku. — Skoro všechny tyto spisy, jakož i dílo »Vector-Analysis« od Gibbs-Wilsona, byly prameny k tomuto článku.