Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Geometrické transformace prvního stupně v rovině a jich grupy.

Napsal dr. **Jan Vojtěch** v Lipníku.

Přiřadíme-li každému bodu v prostoru jiný bod (obecněji prvek prostorový) dle určitého zákona, pravíme, že daný prostor transformujeme; každý geometrický útvar původního prostoru přejde takovou transformací v nový útvar, který nazýváme transformovaným onoho, o obou pak říkáme, že si odpovídají čili jsou v korrespondenci (jsou příbuzné). Poloha, tvar i velikost nového útvaru závisí patrně na obdobných vlastnostech původního a na zvoleném zákoně transformačním; poněvadž pak zákony transformační mají platiti pro všechny body prostoru, jest možno abstrahovati od zvláštních útvarů geometrických, které transformujeme, a vyšetřovati ony zákony transformační samy. Nejdůležitější jsou transformace, při nichž každému bodu původnímu odpovídá v novém prostoru obecně jediný bod a naopak každý bod nového prostoru odpovídá jedinému bodu původního; tyto transformace obapolně jednoznačné (jedno-jednoznačné) jsou ještě velmi rozmanité. Zcela jednoduché a speciální příklady transformací prostorových jsou: zvolíme v prostoru pevnou rovinu a každému bodu přiřadíme koncový bod úsečky, spuštěné s onoho bodu kolmo na pevnou rovinu a prodloužené na druhou stranu o dvojnásobnou (na př.) její délku; nebo sestrojíme ke každému bodu korrespondující bod tím způsobem, že zvolíce pevný bod a pevnou rovinu v prostoru, nalezneme na spojnici každého bodu s oním bodem pevným bod čtvrtý, harmonicky sdružený s uvažovaným bodem vzhledem k pevnému bodu a průsečíku zmíněné spojnice s pevnou rovinou a pod.

V dalším omezíme se na rovinu a její útvary a vycházejíce od nejjednodušších transformací, známých z elementárního vyučování planimetrického, budeme vyšetřovati povahu transformací, vznikajících *skládáním* oněch jednoduchých transformací. Jestliže totiž útvar geometrický U převedeme transformací T_1 v nový útvar U_1, což píšeme $U_1 = T_1(U)$, t. j. nový útvar je funkcí původního a jakost této závislosti je dána transformačním zákonem, dále pak útvar U_1 převedeme v U_2 transformací T_2 čili $U_2 = T_2(U_1)$, vzniká otázka, jak souvisí U_2 s původně daným U, když — jak plyne pouhým dosazením — platí $U_2 = T_2 T_1(U)$; běží patrně o povahu transformace $T_2 T_1$, složené z T_1, napřed vykonané, a T_2, potom provedené.

Úvahy, činěné při tomto názorném postupu konstruktivním, doplníme vždy početním vyjádřením základních i odvozených transformací dle způsobu analytické geometrie.

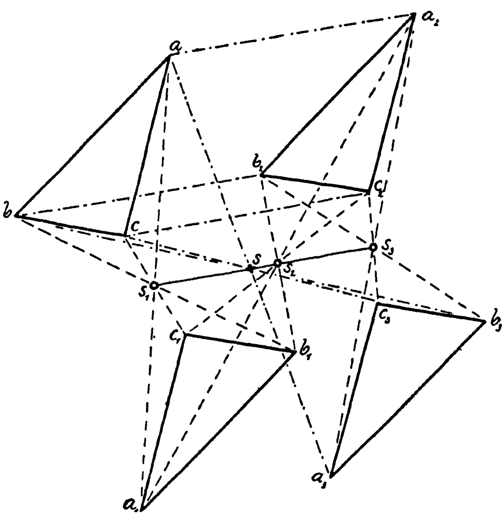
1. Útvar geometrický v rovině proměníme v souměrně sdružený dle daného středu s_1, spojíme-li každý bod jeho (v praksi dostatečný počet význačných bodů) s s_1 a tyto spojnice za bod s_1 o jejich délku prodloužíme. Transformaci tuto, *souměrnost středovou,* jmenujme S_1; útvar daný U, útvar transformací vzniklý U_1 nebo $S_1(U)$.

a) Applikujeme-li na $S_1(U)$ touž transformaci *dle téhož středu* s_1, dostaneme útvar $S_1 S_1(U)$ čili, jinak psáno, $S_1^2(U)$, a patrně platí $S_1^2(U) \equiv U$, t. j. útvar druhý opětovanou transformací přejde v původní. Výsledek tento platí o jakémkoliv útvaru geometrickém, jest tedy nezávislý na jakosti jeho, a píšeme proto obecně

$$S_1^2 = 1,$$

značíce 1 transformaci identickou čili transformaci, při které se nic nemění (každý bod korresponduje sobě samému). Transformace, jejíž dvojnásobná applikace na geom. útvar vede k identickému útvaru, sluje *involutorní*; jest tedy středová souměrnost transformací involutorní.

Nazvali jsme transformaci, která převádí útvar U v U_1, stručně S_1; transformace, jež naopak převádí U_1 v U, sluje *inversní* k S_1 a značívá se S_1^{-1}, kteréžto označení se hned osvětlí. Poněvadž při transformaci všech bodů v rovině v body souměrně sdružené vzhledem k pevnému bodu s_1 této roviny přejde každý bod a v bod a_1 a spolu a_1 v a, platí $S_1^{-1} = S_1$, čili (násobíme-li celou rovnici veličinou S_1, t. j. provedeme-li po transformaci S_1^{-1} transformaci S_1, s druhé strany po transformaci S_1 zase S_1) $1 = S_1^2$, jakož nalezeno nahoře.



Obr. 1.

b) Applikujme na S_1 (U) transformaci touž *dle jiného středu* s_2, tedy transformaci S_2; dostaneme $S_2 S_1 (U)$ (obr. 1.). Lze útvar $S_2 S_1 (U)$ dostati přímo z U nějakou transformací a jakou ?, čili

$$S_2 S_1 (U) = X(U), \text{ stručně } S_2 S_1 = X.$$

Pouhý pohled na obrázek ukazuje, že útvar $S_2 S_1 (U)$ obdržíme z útvaru U, pošinouce útvar tento směrem spojnice $s_1 s_2$ obou středů souměrnosti o délku $2.\overline{s_1 s_2}$, jest tedy transformace X posunutí čili *translace* (T):

$$S_2 S_1 = T;$$

pravíme, že výsledek (produkt) dvou souměrností středových při různých středech je translace.

Je známo i patrno, že translace je transformace, při níž všechny body útvaru se posunou jedním směrem o touž délku.

Že hořejší výsledek, vzatý z názoru, jest správný, dosvědčuje úvaha: Přejde-li útvar abc transformací S_1 v útvar $a_1b_1c_1$, tento transformací S_2 v $a_2b_2c_2$, přejde v něm a nejprve v a_1, a_1 potom v a_2, a platí dle definice souměrnosti středové: body a, s_1, a_1 leží v přímce a jest $\overline{as_1} = \overline{s_1a_1}$, body a_1, s_2, a_2 leží také v přímce a jest $\overline{a_1s_2} = \overline{s_2a_2}$; odtud plyne $\overline{a_1a} : \overline{a_1s_1} = \overline{a_1a_2} : \overline{a_1s_2}$ $(= 2 : 1)$, jest tedy $aa_2 \parallel s_1s_2$ a $\overline{aa_2} : \overline{s_1s_2} = 2 : 1$ čili $\overline{aa_2} = 2.\overline{s_1s_2}$. Co platí o bodě a_2 vzhledem k a, platí ovšem o každém bodu útvaru i celé roviny.

Analyticky, volíme-li za základ soustavu souřadnic pravoúhlých jakkoli položenou a označíme-li v této souřadnice pevného středu s_1 (m, n), bod původní (x, y), transformovaný bod (x_1, y_1), platí dle definice středové symmetrie $\frac{x_1 + x}{2} = m$, $\frac{y_1 + y}{2} = n$; odtud vychází

$$x_1 = -x + 2m, \quad y_1 = -y + 2n \tag{1}$$

jako analytický výraz transformace S_1.

Středová symmetrie závisí pouze na poloze středu; poněvadž pak bodů jest v rovině ∞^2 (souřadnice m může měniti svou hodnotu od $-\infty$ do $+\infty$, rovněž n), existuje ∞^2 středových souměrností v rovině.

Analytický výraz transformace S_2 (má-li střed s_2 souřadnice m', n' a bod vzniklý z (x_1, y_1) druhou transformací souřadnice (x_2, y_2), jest

$$x_2 = -x_1 + 2m', \quad y_2 = -y_1 + 2n'; \tag{2}$$

dosazením z (1) do (2) plyne výraz transformace S_2S_1:

$$x_2 = x - 2m + 2m', \; y_2 = y - 2n + 2n',$$

čili
$$x_2 = x + 2(m' - m), \; y_2 = y + 2(n' - n). \tag{3}$$

V případě a) jest $s_2 \equiv s_1$, čili $m' = m$, $n' = n$, a dostaneme $x_2 = x$, $y_2 = y$: každý bod zůstane na svém místě. V případě b) jsou vzorce (3) analytickým vyjádřením translace. Pro translaci bodu (x, y) v bod (x_1, y_1) platí totiž $x_1 - x = u$,

$y_1 - y = v$; $\frac{v}{u}$ udává tg úhlu sevřeného směrem translace s osou $+X$, $\sqrt{u^2+v^2}$ pak stanoví délku posunutí. Výsledná naše transformace je dle toho translace, jejíž směr svírá s osou $+X$ úhel $arctg\frac{n'-n}{m'-m}$ a jejíž délka jest $2\sqrt{(m'-m)^2+(n'-n)^2}$; vskutku $arctg\frac{n'-n}{m'-m}$ udává směr spojnice s_1s_2 a $\sqrt{(m'-m)^2+(n'-n)^2}$ je její délka.

Translace je dostatečně charakterisována směrem posunutí a velikostí jeho; směrů je v rovině ∞, úseček různě velikých jest také ∞, existuje tedy v rovině ∞^2 různých translací. O tom svědčí také analytický výraz translace

$$x_1 = x + u,\ y_1 = y + v,$$

kde u i v nezávisle mohou nabýti ∞ hodnot.

Obdrželi jsme translaci jako transformaci ekvivalentní postupně vykonaným transformacím napřed S_1, potom S_2, což píšeme $T = S_2S_1$, čtouce od pravé strany k levé; má tentýž význam produkt S_1S_2 obou uvedených transformací, čili dojdeme k témuž výsledku, provedouce napřed S_2, potom S_1? Konstrukce i počet ukazují, že nikoli; transformace S_1S_2 jest ekvivalentní translaci, vykonané sice o touž délku $\overline{2.s_1s_2}$ jako prve, ale opačným směrem. Není tedy dovoleno zaměniti pořádek dvou středových souměrností, i pravíme, že tyto transformace nejsou *kommutativní.*

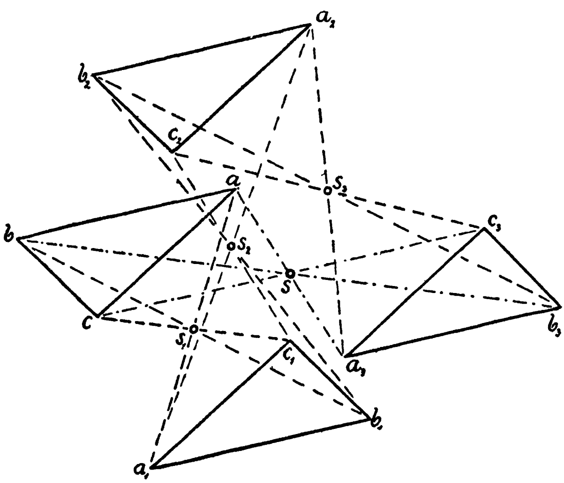
c) V dalším postupu přicházíme k otázce, jaký je význam transformace $S_3S_2S_1$. Jestliže útvar abc přechází transformací S_1 v $a_1b_1c_1$, tento transformací S_2 v $a_2b_2c_2$, tento novou transformací S_3 v $a_3b_3c_3$, jest možno obdržeti $a_3b_3c_3$ přímo z abc a jak? Rozeznávejme dva případy: 1. bod s_3, nový střed symmetrie, leží na spojnici s_1s_2 (obr. 1.); pak $S_3S_2S_1 = S$ a platí $\overline{ss_1} = \overline{s_3s_2}$ co do směru i velikosti. 2. bod s_3 leží mimo přímku s_1s_2; i zde jest $S_3S_2S_1 = S$ a platí $\overline{ss_3} \# \overline{s_1s_2}$, tak že středy s_1, s_2, s_3 a střed s výsledné transformace S tvoří rovnoběžník (obr. 2.). Body a, a_1, a_2, a_3 jsou zajisté vrcholy čtyrúhelníka, jehož strany jsou půleny body s_1, s_2, s_3 a s.

Kombinace vzorců pro jednotlivé středové symmetrie vede k témuž výsledku. Třetí střed sym. S_3 měj souřadnice m'', n'' transformace S_3 je dána vzorci

$$x_3 = -x_2 + 2m'', \; y_3 = -y_2 + 2n'',$$

dosadíme-li pak sem za x_2 a y_2 výrazy (3), vychází

$$x_3 = -x + 2(m - m' + m''),$$
$$y_3 = -y + 2(n - n' + n''),$$



Obr. 2.

což je středová souměrnost, jejíž střed má souřadnice $m - m' + m''$, $n - n' + n''$. Body (m, n), (m', n'), (m'', n''), $(m - m' + m''$, $n - n' + n'')$ jsou vrcholy rovnoběžníka, neboť $m' - m = m'' - (m - m' + m'')$ a $n' - n = n'' - (n - n' + n'')$. Je-li ve zvláštním případě (1.) bod s_3 na spojnici $s_1 s_2$, jest ovšem i střed transformace $S_3 S_2 S_1$ (4. vrchol rovnoběžníka) na této spojnici a platí vztah už uvedený.

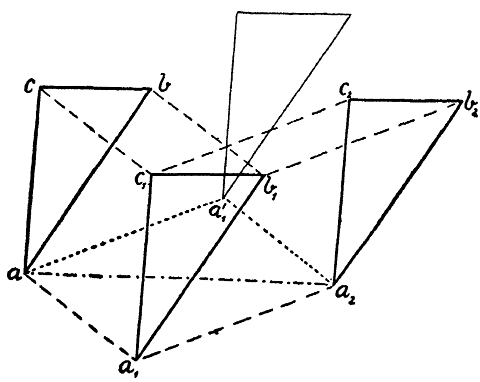
Připojovati ještě čtvrtou (a další) transformace téhož druhu ke třem už uvažovaným není třeba, ježto, jsou-li 3 středové symmetrie ekvivalentní jedné, jsou 4 ekvivalentní dvěma a mají tedy za výsledek obecně translaci, ve zvl. případě identickou transformaci.

Translaci, ke které jsme dospěli složením dvou středových souměrností při různých středech a jejíž obecný výraz analytický jest

$$T_1 \begin{cases} x_1 = x + u, \\ y_1 = y + v, \end{cases}$$

uvažujme nyní samostatně. T_1^{-1} čili translace inversní k T_1, značí patrně posunutí opačným směrem o touž délku, tedy

$$T_1^{-1} \begin{cases} x_1 = x - u, \\ y_1 = y - v. \end{cases}$$



Obr. 3.

Výsledek dvou translací je zase translace: $T_2 T_1 = T$; podrobněji: Applikujeme-li na nějaký útvar U transformaci $T_1 (x_1 = x + u,\ y_1 = y + v)$, na útvar vzniklý $T_1 (U)$ potom transformaci $T_2 (x_2 = x_1 + u',\ y_2 = y_1 + v')$, dospějeme k útvaru $T_2 T_1 (U)$, jenž vychází z útvaru původního U také jedinou transformací $T (x_2 = x + u + u',\ y_2 = y + v + v')$; tato T je zase translace a sice směru, který je odchýlen od $+X$ o úhel, jehož tg jest $\frac{v + v'}{u + u'}$, a velikosti $\sqrt{(u + u')^2 + (v + v')^2}$ (obr. 3.).

Pravíme proto, že všechny translace v rovině tvoří *grupu*. Grupou transformací nazývá se totiž v mathematice soustava transformací taková, že produkt kterýchkoli dvou transformací soustavy jest zase transformace této soustavy. Grupa translací má ∞^2 členů, jakož prve uvedeno. Středové souměrnosti pevného středu tvoří grupu o dvou členech (1 a S), středové souměrnosti při různých středech netvoří grupu, ale ovšem spolu s translacemi tvoří grupu.

Platí konečně $T_2 T_1 = T_1 T_2$ (znázorněno na obr. 3.: $T_2 T_1$ převádí a v a_2 cestou $a a_1 a_2$, $T_1 T_2$ cestou $a a'_1 a_2$).

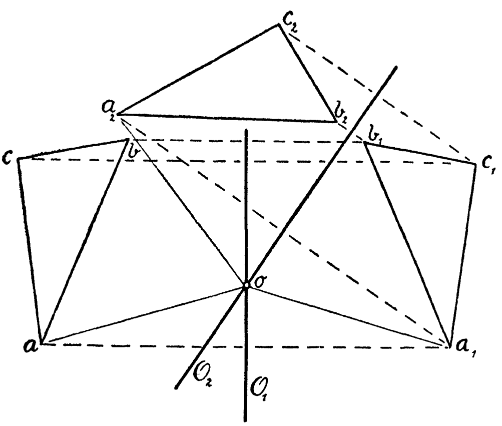
Hlavní výsledky dosavadních úvah shrnujeme takto: *Středová souměrnost je transformace involutorní; existuje ∞^2 různých středových souměrností v rovině, nejsou kommutativní. Dvě středové souměrnosti při různých středech jsou ekvivalentní translaci, jejíž směr je rovnoběžný se spojnicí oněch středů a velikost dvojnásobek vzdálenosti jejich. Všechny translace v rovině tvoří grupu s ∞^2 členů; translace jsou kommutativní.*

2. Poněvadž směrem dosud sledovaným nedocházíme už k transformacím nového druhu (tvořiť translace grupu), nutno vyjíti znova od nějaké zcela jednoduché transformace; budiž to *pravoúhlá souměrnost osová* (orthogonální symmetrie axiální).

Zvolena-li v rovině pevná osa, proměníme daný útvar v souměrně sdružený dle této osy, jestliže spustíme s každého jeho bodu (ve skutečnosti s dostatečného počtu význačných bodů) kolmici na osu a prodloužíme ji na druhou stranu osy o kolmou úsečku, omezenou bodem a patou kolmice na ose; značkou transformace takové budiž O.

a) Každý útvar U_2 souměrně sdružený dle osy O_1 s U_1, útvarem to souměrně sdruženým dle O_1 s původně daným U, jest totožný s U; jinak řečeno, pravoúhlá souměrnost osová při pevné ose je transformace involutorní: $O_1^2 = 1$ čili $O_1^{-1} = O_1$.

b) Applikujme na $U_1 = O_1(U)$ transformaci O_2 dle jiné osy O_2 (obr. 4.); možno útvar takto vzniklý $U_2 = O_2(U_1) = O_2 O_1 (U)$ obdržeti přímo z U a jakým způsobem? Názor ukazuje a krátká úvaha dosvědčuje, že jest to otočení, *rotace* kolem průsečíku o obou os O_1 a O_2 o úhel rovný dvojnásobku úhlu osami sevřeného. Útvar abc (kladný trojúhelník) přejde transformací O_1 v útvar $a_1 b_1 c_1$ (záporný $\triangle$), tento transformací O_2 v $a_2 b_2 c_2$ (kladný $\triangle$); všimněme si blíže bodu a a jeho transformovaných (nebo kteréhokoli jiného). Platí při prvé transformaci $\overline{a_1 o} = \overline{ao}$, při druhé $\overline{a_2 o} = \overline{a_1 o}$, tedy $\overline{a_2 o} = \overline{ao}$; je-li pak $\sphericalangle aoO_1 = \alpha$, $\widehat{O_1 O_2} = \varphi$, platí dále: $\sphericalangle O_1 oa_1 = aoO_1 = \alpha$, tedy $aoa_1 = 2\alpha$, $\sphericalangle O_2 oa_1 = \sphericalangle O_2 O_1 + \sphericalangle O_1 oa_1 = \sphericalangle O_1 oa_1 - \sphericalangle O_1 O_2 = \alpha - \varphi$, $\sphericalangle a_2 oO_1 = \alpha - \varphi$ a konečně $\sphericalangle aoa_2 = aoa_1 + a_1 oO_2 + O_2 oa_2 = 2\alpha - (\alpha - \varphi) - (\alpha - \varphi) = 2\varphi$.



Obr. 4.

Pravoúhlých symmetrií osových v rovině jest ∞^2 (jest ∞^2 přímek-os), které netvoří grupu, ježto výsledek dvou symmetrií je rotace, transformace jiného druhu. Obecně nejsou kommutativní, neboť transformací $O_1 O_2$ dojdeme k jinému útvaru než transformací $O_2 O_1$; platí totiž při transformaci $O_1 O_2$ (napřed dle O_2, potom dle O_1), že $\sphericalangle aoa'_2 = aoO_2 + O_2 oa'_1 + a'_1 oO_1 + O_1 oa'_2 = \beta + \beta - (\varphi + \beta) - (\varphi + \beta) = -2\varphi$. Dvě orthogonální osové symmetrie jsou kommutativní patrně jenom v případě, kdy $-2\varphi = +2\varphi - 360^0$, čili $2\varphi = 180^0$, čili $\varphi = 90^0$. Jsou-li osy O_1 a O_2 navzájem kolmé, jest výsledek transformací $O_2 O_1$ ($\equiv O_1 O_2$) rotace kolem (O_1, O_2) o úhel 180^0, tedy středová souměrnost. Transformujeme-li útvar nějaký U v útvar U_1, souměrný s U dle osy, U_1 pak v U_2 souměrný s U_1 dle osy kolmé k prvé ose (nebo v opačném pořádku) jest vzniklý útvar U_2 souměrný s U dle průsečíku obou os.

Analytické vyjádření orthogonální osové souměrnosti jest velmi jednoduché; zvolíme-li osu souřadnic Y za osu symmetrie, platí dle výměru $x_1 = -x$, $y_1 = y$. Jest viděti, že O_1^2 má výraz: $x_2 = -x_1 = +x$, $y_2 = y_1 = y$, a jest tedy identickou transformací.

Má-li osa O_1 obecnější polohu přímky jdoucí počátkem ($\eta = u\xi$), platí: předně spojnice bodů, daného (x, y) a transformovaného (x_1, y_1) jest kolma k O_1 čili

$$y_1 - y = -\frac{1}{u}(x_1 - x),$$

dále půlící bod této spojnice $\frac{x_1 + x}{2}$, $\frac{y_1 + y}{2}$ leží na O_1, t. j. $y_1 + y = u(x_1 + x)$; spojením obou rovnic dostaneme

$$x_1 = x\frac{1 - u^2}{1 + u^2} + y\frac{2u}{1 + u^2},$$

$$y_1 = x\frac{2u}{1 + u^2} - y\frac{1 - u^2}{1 + u^2}.$$

Těmto rovnicím transformačním lze dáti přehlednější tvar, dosadíme-li za u hodnotu jeho $tg\,\omega$; dostaneme

$$x_1 = x\cos 2\omega + y\sin 2\omega,$$
$$y_1 = x\sin 2\omega - y\cos 2\omega.$$

Výsledek transformace této O_1 a druhé dle osy $\eta = tg\,\omega'.\xi$:

$$O_2 \begin{cases} x_2 = x_1\cos 2\omega' + y_1\sin 2\omega', \\ y_2 = x_1\sin 2\omega' - y_1\cos 2\omega', \end{cases}$$

jest

$$O_2O_1 \begin{cases} x^2 = x\cos 2\omega\cos 2\omega' + y\sin 2\omega\cos 2\omega' + x\sin 2\omega\sin 2\omega' \\ \qquad - y\cos 2\omega\cos 2\omega' = \\ \qquad x\cos 2(\omega' - \omega) - y\sin 2(\omega' - \omega), \\ y_2 = x\sin 2(\omega' - \omega) + y\cos 2(\omega' - \omega), \end{cases}$$

čili nazveme-li úhel obou os $\omega' - \omega = \varphi$, jest výsledná transformace (rotace kolem počátku)

$$R \begin{cases} x_2 = x\cos 2\varphi - y\sin 2\varphi, \\ y_2 = x\sin 2\varphi + y\cos 2\varphi. \end{cases}$$

Rotace roviny jest transformace, při níž každý bod v rovině se otočí kolem téhož bodu (středu rotace) o týž úhel, tak totiž, že průvodič bodu v nové poloze vzhledem ke středu je roven starému průvodiči a svírá s ním úhel pro všechny dvojice korrespondujících bodů týž. Rotace je určena svým středem a úhlem. Různých rotací v rovině kolem pevného středu jest ∞^1, poněvadž existuje ∞ úhlů rotačních, a tvoří grupu ∞ členů kommutativních, ježto rotací o úhel α, potom β dostaneme týž výsledek jako rotací o úhel β, potom α, totiž ten, který plyne jedinou rotací o úhel $\alpha + \beta$.

To plyne také jednoduchým počtem: Rotace o úhel α kolem počátku a potom rotace o úhel β kolem téhož počátku, totiž

$$R_\alpha \begin{cases} x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y_1 = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \end{cases} \qquad R_\beta \begin{cases} x_2 = x_1 \cos \beta - y_1 \sin \beta, \\ y_2 = x_1 \sin \beta + y_1 \cos \beta, \end{cases}$$

dávají složeny transformaci

$$x_2 = x \cos(\alpha + \beta) - y \sin(\alpha + \beta),$$
$$y_2 = x \sin(\alpha + \beta) + y \cos(\alpha + \beta),$$

což je rotace kolem počátku o úhel $\alpha + \beta$ nebo $\beta + \alpha$. Píšeme tento výsledek

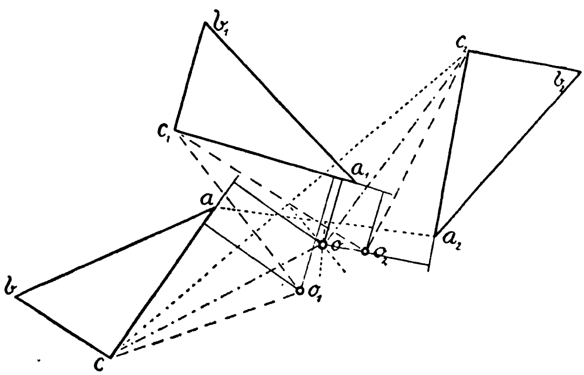
$$R_\alpha . R_\beta = R_{\alpha+\beta} = R_\beta . R_\alpha.$$

Rotace při pevném středu o úhel, jenž je dělitelem plného úhlu (nebo jeho k-násobku) tvoří grupu o konečném počtu členů, totiž rotace o úhel φ tvoří grupu s $n = \frac{2\pi}{\varphi}$ členy (po případě $\frac{2k\pi}{\varphi}$ členy); polohy bodu takto transformovaného všemi n rotacemi konečné grupy určují jako vrcholy pravidelný n-úhelník (po př. mnohoúhelník k-tého řádu).

Všech různých rotací v rovině jest ∞^3 v souhlase s tím, že jest v rovině ∞^2 bodů, kolem nichž jako středů rotace může nastati, a při každém ∞ různých úhlů rotačních. Jaký je výsledek dvou rotací při různých středech?

Abychom to vyšetřili, všimněme si, jak lze sestrojiti neznámý střed rotace k dvěma útvarům, z nichž jeden vznikl z druhého touto transformací. Střed rotace leží patrně na symmetrále každé úsečky spojující dva korrespondující body; průsečík dvou takových symmetrál je hledaný střed.

Applikujeme-li na daný útvar abc (obr. 5.) rotaci dle středu o_1 o úhel φ_1, na útvar tak vzniklý $a_1b_1c_1$ pak rotaci kol středu o_2 o úhel φ_2, povstane útvar $a_2b_2c_2$, který lze obdržeti z abc jedinou rotací kolem středu o o úhel $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Výsledek tento podává konstrukce a úvaha i počet jej potvrzuje; máme-li na zřeteli nejprve třebas úsečku ac a její transformované a_1c_1, a_2c_2, jest jisto, že symmetrály spojnic aa_2, cc_2 určí svým průsečíkem střed rotace, která převádí ac v a_2c_2; touž



Obr. 5.

rotací přejde však také útvar nad ac sestrojený v útvar s ním shodný, sestrojený nad a_2c_2 (s podmínkou, že úhly útvaru $a_2b_2c_2$, a tedy celý útvar ten, jsou smyslu souhlasného s úhly útvaru původního abc). Že pak úhel výsledné rotace je součtem úhlů jednotlivých obou rotací, viděti odtud, že přímka ac přejde rotací první v přímku a_1c_1, při čemž úhel rotační φ_1 udán jest úhlem kolmic spuštěných na ac a a_1c_1 ze středu o_1, rotací druhou pak přejde a_1c_1 v přímku a_2c_2, a úhel rotace druhé φ_2 jest zase úhlem kolmic na a_1c_1 a a_2c_2 ze středu o_2; rotací výslednou přejde pak ac v přímku a_2c_2 a úhel příslušných kolmic z nového středu o, totiž úhel výsledné rotace $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, ježto kolmice na a_1c_1 ze středů o_1, o_2, o jsou rovnoběžné, rovněž kolmice ze středů o_1 a o na ac a ze středů o_2, o na a_2c_2. Vychází tedy, že

$$R_{o_2,\,\varphi_2} \, . \, R_{o_1,\,\varphi_1} = R_{o,\,\varphi}, \text{ kde } \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Za účelem analytického podání věci nutno vzorce pro rotaci zobecniti pro libovolný střed rotace (m, n). Jest patrno, že bod, jehož souřadnice vzhledem k $(0, 0)$ jsou (x, y), má vzhledem k (m, n) souřadnice $(x - m, y - n)$, podobně $(x_1\, y_1)$ zase $(x_1 - m, y_1 - n)$.

Platí tedy pro rotaci kol středu (m, n) o úhel φ_1 tyto vzorce transformační:

$$R_{o_1,\,\varphi_1} \begin{cases} x_1 = (x - m)\cos\varphi_1 - (y - n)\sin\varphi_1 + m, \\ y_1 = (x - m)\sin\varphi_1 + (y - n)\cos\varphi_1 + n. \end{cases}$$

Připojíme-li potom transformaci

$$R_{o_2,\,\varphi_2} \begin{cases} x_2 = (x_1 - m')\cos\varphi_2 - (y_1 - n')\sin\varphi_2 + m', \\ y_2 = (x_1 - m')\sin\varphi_2 + (y_1 - n')\cos\varphi_2 + n' \end{cases}$$

dle středu (m', n') o úhel φ_2, dostaneme substitucí ze vzorců pro $R_{o_1,\,\varphi_1}$ do vzorců $R_{o_2,\,\varphi_2}$ transformační rovnice, které svým tvarem svědčí o rotaci $R_{o,\,\varphi}$, kde $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Celé odvození lze jinak podati tím, že každou rotaci $R_{o,\,\varphi}$ kolem středu o různého od počátku, převedeme na rotaci kolem počátku. Útvar abc převedeme zajisté v $a_1b_1c_1$ buď přímo rotací kolem středu o, nebo také postupným provedením těchto transformací: translací celé roviny tak, aby o přišel do počátku, rotací kol počátku o úhel φ, potom translací celé roviny takovou, aby počátek přišel zase do o (tato druhá translace je ovšem inversní k prvé) čili platí

$$R_{o_1,\,\varphi_1} = T_1 \, . \, R_{\varphi_1} \, . \, T_1^{-1},$$

podobně

$$R_{o_2,\,\varphi_2} = T_2 \, . \, R_{\varphi_2} \, . \, T_2^{-1},$$

tedy konečně

$$R_{o_2,\,\varphi_2} \, . \, R_{o_1,\,\varphi_1} = T_1 \, . \, R_{\varphi_1} \, . \, T_1^{-1} \, . \, T_2 \, . \, R_{\varphi_2} \, . \, T_2^{-1},$$

což je rotace, jestliže produkt translace a rotace jest rotací. To pak jest už z toho důvodu, že translaci možno pokládati za rotaci se středem v nekonečnu.

Došli jsme toho výsledku tedy, že všechny rotace v rovině v počtu ∞^3 tvoří grupu; její členové, jak se snadno přesvědčíme, nejsou kommutativní. Dále vychází, že rovněž všechny translace a rotace tvoří dohromady grupu; složíme-li translaci

$$T \begin{cases} x_1 = x + m \\ y_1 = y + n \end{cases} \quad \text{s rotací kol počátku}$$

$$R \begin{cases} x_2 = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, \\ y_2 = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi, \end{cases}$$

dostáváme transformaci

$$RT \begin{cases} x_2 = (x + m) \cos\varphi - (y + n) \sin\varphi, \\ y_2 = (y + m) \sin\varphi + (y + n) \cos\varphi, \end{cases}$$

jindy

$$TR \begin{cases} x_2 = x \cos\varphi - y \sin\varphi + m \\ y_2 = x \sin\varphi + y \cos\varphi + n, \end{cases}$$

tak že vychází odtud $RT \neq TR$, čili translace a rotace nejsou kommutativní.

Hlavní výsledky jsou: *Osová pravoúhlá souměrnost je transformace involutorní; existuje ∞^2 různých osových souměrností pravoúhlých v rovině, jež nejsou kommutativní, vyjímaje případ kolmých os. Dvě osové souměrnosti při různých osách jsou ekvivalentní rotaci, jejíž střed jest v průsečíku os a úhel rotační dvojnásobek úhlu jejich. Všechny rotace kol pevného středu tvoří grupu ∞^1 členů záměnných; pozoruhodné jsou grupy pravidelných mnohoúhelníků (s konečným počtem členů). Všechny rotace v rovině tvoří grupu ∞^3 členů nekommutativních.*

Už bylo uvedeno, že translace a rotace tvoří také grupu; mezi rotace patří jako zvláštní případ ($\varphi = 180^0$) středové souměrnosti. Všechny tyto transformace mění pouze polohu útvaru rovinného, nemění jeho tvar, velikost ani smysl. Grupa těchto transformací sluje *grupou pohybů* v rovině (déplacement, Bewegung); má ∞^3 členů. Útvary transformované jsou při této grupě *shodné* s původními a stejného smyslu s nimi. Rozšíříme-li transformace grupy pohybů v rovině o osové souměrnosti pravoúhlé, vznikne opět grupa, jejíž transformace zachovávají tvar i velikost útvarů, měníce po případě smysl jejich; útvary transformované jsou s původními shodné a smyslu souhlasného nebo protivného. *Nepromĕnnými (invariantními) při této nejširší grupě,* ke které jsme dospěli dosud, *jsou* tedy *tvar a velikost útvarů* rovinných. Dva útvary shodné, v rovině jakkoli položené, přecházejí jeden v druhý nějakou transformací uvedené grupy.

3. Geom. útvar proměníme v *homothetický* dle daného středu a daného poměru, spojíce každý bod útvaru se středem a rozdělíce každou tuto spojnici dle téhož daného poměru, totiž tak, aby poměr vzdálenosti transformovaného bodu od středu a vzdálenosti původního bodu od středu byl konstantní (p). Strany přímočarého útvaru transformovaného jsou rovnoběžné s korrespondujícími stranami původního, spojujíce koncové body stejnolehlých úseků ve svazku paprskovém. Transformaci uvedenou nazveme H; je charakterisována poměrem p a středem s. Skládejme homothetické transformace

a) *při pevném středu s*. Zde platí

$$H_p \,.\, H_q = H_{pq},$$

t. j. dvě homothetické transformace dle poměru p a q, provedené postupně, jsou ekvivalentní jedné takové transformaci dle poměru, jenž je součinem oněch jednotlivých poměrů (pq). Neboť jsou-li bod původní a, první transformovaný a_1, druhý a_2, jest dle definice

$$\frac{a_1 s}{as} = p, \quad \frac{a_2 s}{a_1 s} = q,$$

a proto

$$\frac{a_2 s}{as} = \frac{a_2 s}{a_1 s} \cdot \frac{a_1 s}{as} = q \cdot p.$$

Homothetická transformace nemění v ničem daného útvaru, je-li poměr její 1. Má-li výslední transformace býti identita, jest nutno, by $pq = 1$, t. j. $q = \frac{1}{p}$.

Homothetická transformace pevného středu i poměru, applikovaná n-krát vede k výslední transformaci $H_p{}^n$, jejíž poměr je p^n; píšeme $(H_p)^n = H_p{}^n$. Aby homothetická transformace byla involutorní, t. j. aby $(H_p)^2 = 1$, jest nutno, aby $p^2 = 1$, i vychází, že $p = \pm 1$; v prvním případě jest to identická transformace, v druhém souměrnost středová, vyšetřovaná v odst. 1.

Jest z uvedeného jasno, že všechny homothetičnosti dle pevného středu tvoří grupu ∞ transformací, jejíž členy jsou kommutativní. Jediné totiž, co určuje transformaci takovou při pevném středu, jest její poměr, poměr pak výsledné transformace jest $pq = qp$.

Transformace homothetická dle středu (0, 0) a poměru p jest dána rovnicemi

$$\frac{x_1}{x} = p, \quad \frac{y_1}{y} = p,$$

čili

$$H_p : x_1 = px, \quad y_1 = py.$$

Druhá homothetičnost téhož středu poměru p' jest

$$H_{p'} : x_2 = p'x_1, \quad y_2 = p'y_1,$$

výsledná pak $H_{p'} . H_p = H_{p'p}$:

$$x_2 = p'px, \quad y_2 = p'py.$$

b) dle různých středů. Převedeme-li útvar U v homothetický U_1 dle středu s_1 a poměru p_1 : $U_1 = H_1(U)$, tento pak v homothetický U_2 dle jiného středu s_2 a poměru p_2 : $U_2 = H_2(U_1)$, ukazuje se, že spojnice korrespondujících bodů útvarů U a U_2 procházejí jediným bodem s, jenž leží na přímce $s_1 s_2$ a je středem nové homothetie $H = H_2 . H_1$: poměr její $p = p_2 p_1$.

Máme-li totiž (obr. 6.) na zřeteli úsečku ab, platí o její transformované $\overline{a_1 b_1}$, že jest $a_1 b_1 \parallel ab$ a $\frac{a_1 b_1}{ab} = p_1$; o transformované této, totiž $\overline{a_2 b_2}$, platí $a_2 b_2 \parallel a_1 b_1$ a $\frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} = p_2$; tedy celkem $a_2 b_2 \parallel ab$ a $\frac{a_2 b_2}{ab} = p_2 p_1$. Jsou proto paprsky $a_2 s$, as, dále $b_2 s$, bs v poměru témž $p_2 p_1$, útvary ab, $a_2 b_2$ souvisí spolu transformací homothetickou o středu s a poměru $p_2 p_1$. Střed s leží na $s_1 s_2$: vedeme-li totiž pomocné rovnoběžky $a_1 t \parallel a_2 s$, $b_1 t \parallel b_2 s$, jsou trojúhelníky $a_2 b_2 s$, $a_1 b_1 t$ homothetické středu s_2, tedy body s, t, s_2 leží na téže přímce, rovněž trojúhelníky abs, $a_1 b_1 t$ jsou homothetické středu s_1, což znamená, že s, t, s_1 leží na jediné přímce; zmíněné dvě přímky majíce dva body společné (s, t) jsou totožné, čili s leží s body s_1, s_2 v přímce.

Analytické vyjádření transformace homothetické při středu (m_1, n_1) a poměru p_1 plyne, podobně jako prve, z rovnic

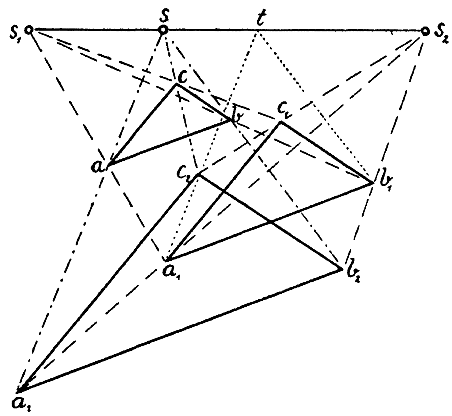
$$\frac{x_1 - m_1}{x - m_1} = p_1, \quad \frac{y_1 - n_1}{y - n_1} = p_1,$$

totiž

$$x_1 = p_1 x - (p_1 - 1)\, m_1, \quad y_1 = p_1 y - (p_1 - 1)\, n_1.$$

Druhá transformace středu (m_2, n_2) poměru p_2 má výraz:

$$x_2 = p_2 x_1 - (p_2 - 1)\, m_2, \quad y_2 = p_2 y_1 - (p_2 - 1)\, n_2,$$



Obr. 6.

tak že složením obou vychází transformace

$$x_2 = p_2 p_1 x - (\overline{p_2 p_1 - 1}\, m_1 + \overline{p_2 - 1}\, m_2),$$
$$y_2 = p_2 p_1 y - (\overline{p_2 p_1 - 1}\, n_1 + \overline{p_2 - 1}\, n_2).$$

Protože poměr složené transformace jest, jak už známo, nebo jak udává součinitel u x a y ve vzorcích, součin $p_2 p_1$, jsou souřadnice středu nové homothetičnosti

$$\frac{p_2 (p_1 - 1) m_1 + (p_2 - 1)\, m_2}{p_2 p_1 - 1}, \quad \frac{p_2 (p_1 - 1) n_1 + (p_2 - 1)\, n_2}{p_2 p_1 - 1}.$$

Neboť výraz pro x_1 (na př.) ukazuje, že úsečku středu m_1 dostaneme, dělíce absolutní člen jeho, záporně vzatý $(\overline{p_1 - 1}\, m_1)$

výrazem $p_1 - 1$, totiž číslem udávajícím poměr transformace zmenšeným o 1. Souřadnice nového středu

$$\frac{p_2(p_1-1)}{p_2p_1-1}m_1+\frac{p_2-1}{p_2p_1-1}m_2,\quad \frac{p_2(p_1-1)}{p_2p_1-1}n_1+\frac{p_2-1}{p_2p_1-1}n_2,$$

mají tvar $\varkappa m_1 + \lambda m_2$, $\varkappa n_1 + \lambda n_2$, což znamená, že nový střed leží na spojnici obou daných středů.

Kdybychom na útvar U_2 applikovali další homothetickou transformaci, jejíž střed r bychom zvolili na s_1s_2, dostaneme útvar U_3, který s U souvisí zase homothetií o středu položeném na přímce s_1s_2r. Jest viděti, že všechny homothetičnosti, jichž středy leží na téže přímce, tvoří grupu ∞^2 transformací; ∞^2 v souhlase s ∞ počtem poměrů a ∞ počtem středů na této přímce volitelných.

Všech homothetických transformací v rovině jest ∞^3, ježto středů jejich lze zvoliti ∞^2 a poměrů v každém případě ∞. Tvoří grupu transformací nekommutativních. Útvary homothetické jsou podobné, transformace homothetická zachovává *tvar* útvarů geometrických; vedle toho jsou podobně položeny, zvláštní to případ vztahu perspektivního. Spojnice stejnolehlých bodů procházejí pevným bodem, středem homothetičnosti, stejnolehlé přímky jsou rovnoběžné, lze tedy říci, že se protínají na společné ose, přímce v nekonečnu.

Applikujeme-li na útvar, vzniklý transformací homothetickou z daného útvaru, některou z transformací dříve uvedených (*pohyb*), dostaneme útvar původnímu zajisté podobný (pohyb nemění tvaru), ne však vždy podobně položený. Transformujeme-li U homotheticky v U_1 (m, n střed, p poměr), tento translací v U_2 ($x_2 = x_1 + u$, $y_2 = y_1 + v$), souvisí U_2 s U transformací TH:

$$x_2 = px - (p-1)m + u,$$
$$y_2 = py - (p-1)n + v,$$

což jest, jak patrno, homothetická transformace o poměru p a středu $\frac{(p-1)m-u}{p-1}$, $\frac{(p-1)n-v}{(p-1)}$, t. j. střed výsledné homothetičnosti je posunut o

$$\frac{u}{p-1},\quad \frac{v}{p-1},$$

čili o délku

$$\frac{1}{1-p}\sqrt{u^2+v^2}$$

směrem, jehož tg jest $\frac{v}{u}$ (opačným směrem, jímž vykonáme T, o délku $(p-1)$ krát menší).

Homothetická transformace složena s rotací nedává už homothetičnost; máme zde dva útvary (původní a po druhé transformovaný), jež jsou pouze podobny; transformační vzorce, které dostaneme obdobným dosazením jako vždy, podávají x_2, y_2 jako výrazy 1. stupně v x a y, stručně lineární funkce argumentů x a y. Transformace taková, obecně tvaru $x_2 = ax + by + c$, $y_2 = dx + ey + f$, sluje affinita; povaha affinity bez analytické geometrie bude vyložena později. Lze tedy výslednou naši transformaci (produkt homothetičnosti a pohybu), zvláštní to případ affinity, nazvati *podobnostní affinitou.*

Jako nejdůležitější výsledky vyšetřování předcházejícího jest uvésti: *Produkt dvou homothetických transformací jest homothetičnost, jejíž poměr je součinem poměrů složek. Homothetické transformace téhož středu tvoří grupu* ∞^1 *členů záměnných; transformace, jichž středy leží na přímce, tvoří grupu* ∞^2 *členů nekommutativních.*

4. Rozšiřme transformaci v útvar osově souměrný (odst. 2.) tím, že vypustíme požadavek vésti z bodů daného útvaru kolmice na osu, stanovíce pouze, že jest vésti z bodů těch rovnoběžné přímky, svírající totiž s osou stálý úhel. Proměníme tedy útvar U v útvar U_1, *osově šikmo souměrný* s U dle osy O v úhlu α, vedeme-li z bodů útvaru U přímky téhož směru, odchýlené od O o úhel α, a prodloužíme-li je za osu o vzdálenost uvažovaného bodu od průsečíku přímky s osou.

Osová šikmá souměrnost je transformace involutorní. Analyticky ji vyjádříme nejjednodušími rovnicemi, zvolíme-li za osu souměrnosti souřadnou osu X, dále budiž $tg\,\alpha = k$; i platí v pravoúhlé soustavě souřadnic, že body $\frac{x_1+x}{2} = \xi$, $\frac{y_1+y}{2} = \eta$ leží na ose X (průsečík přímky, vedené body korrespondujícími a odchýlené o úhel α od osy; s osou), dále $y - \eta = k(x - \xi)$.

Dosadíce za ξ a η do poslední rovnice (při naší volbě osy souměrnosti jest $\eta = 0$), obdržíme $y = k\left(x - \frac{x_1 + x}{2}\right)$, odtud pak $x_1 = x - \frac{2}{k}\, y$, k tomu přistupuje $\eta = \frac{y_1 + y}{2} = 0$ čili $y_1 = -y$.

Inversní transformace $\check{S}_1^{-1}$ (od útvaru U_1 k U) má rovnice

$$x = x_1 - \frac{2}{k}\, y_1,$$

$$y = -\, y_1,$$

jak plyne z předcházejících, i jest patrno, že

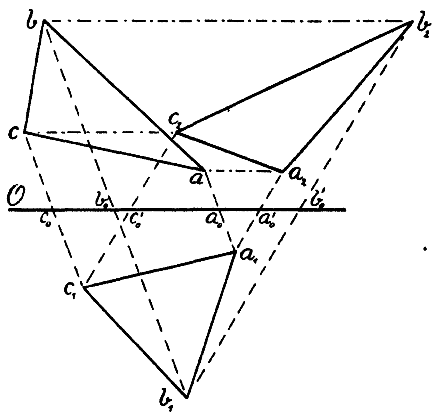
$$\check{S}_1^{-1} = \check{S}_1, \quad \text{t. j.} \quad \check{S}_1^2 = 1.$$

Spojnice korrespondujících bodů dvou útvarů osově šikmo symmetrických jsou spolu rovnoběžné, jak uvedeno ve výměru této transformace, možno tedy říci, že se protínají v jediném bodě úběžném. Korrespondující přímky protínají se na ose souměrnosti, ježto body této osy jsou samodružné, sdruženy se sebou samými; vychází to také odtud, že sdružené přímky (na př. ab, a_1b_1) a osa spojují mezné body úměrných úseček (aa_0, bb_0; a_0a_1, b_0b_1), položených na rovnoběžkách (aa_1, bb_1), procházejí tudíž všechny tři společným bodem. Transformace roviny šikmou souměrností osovou je určena osou a směrem, v němž (vzhledem k ose) vedena osnova rovnoběžek; jest tedy takových transformací v rovině ∞^3. Skládejme transformace ty nejprve při pevné ose, potom při pevném směru.

Transformujeme-li útvar $U_1 = \check{S}_1(U)$ dle téže osy, *v jiném* však *směru* (transformací $\check{S}_2$) v útvar $U_2 = \check{S}_2\check{S}_1(U)$ (obr. 7.), není nesnadno vyšetřiti, jak souvisí U_2 s U. Platí zajisté $a_1a_0 : a_1a = a_1a'_0 : a_1a_2 = 1 : 2$, pro body b, c, d, ... obdobné úměry; tuto, a obdobně ostatní, lze doplniti poměrem $a_0a'_0 : aa_2$ ($= 1 : 2$). Dále jest viděti, že $\overline{a_0a'_0}$, $\overline{b_0b'_0}$, $\overline{c_0c'_0}$, ... jsou v poměru vzdáleností bodů $a_1, b_1, c_1, \ldots$ od osy (jsouce stejnolehlými stranami v podobných trojúhelnících $a_0a_1a'_0$, $b_0b_1b'_0$, ...), tedy také v poměru vzdáleností bodů a, b, c, ... od osy (jež jsou předešlým vzdálenostem rovny); ve spojení s předcházející větou $\overline{aa_2} = 2\overline{a_0a'_0}$, $\overline{bb_2} = 2 \,.\, \overline{b_0b'_0}$, ... máme $\overline{aa_2} : \overline{bb_2} : \overline{cc_2} : \ldots =$ poměru vzdáleností bodů a, b, c, ... od osy. Výsledek všeho jest, že spojnice korrespondujících bodů v útvarech U a U_2 jsou rovnoběžny s osou a úměrny vzdálenostem bodů těch od osy. Transformace taková sluje *elace* (E); píšeme

$$\check{S}_2 \,.\, \check{S}_1 = E,$$

dvě šikmé souměrnosti s touže osou a různými směry dávají



Obr. 7.

dohromady elaci. Ježto

$$\check{S}_1 \begin{cases} x_1 = x - \dfrac{2}{k}\, y, \\ y_1 = -\, y, \end{cases}$$

podobně nazveme-li $tg\,\beta = l$ (β je úhel rovnoběžek v $\check{S}_2$ s osou)

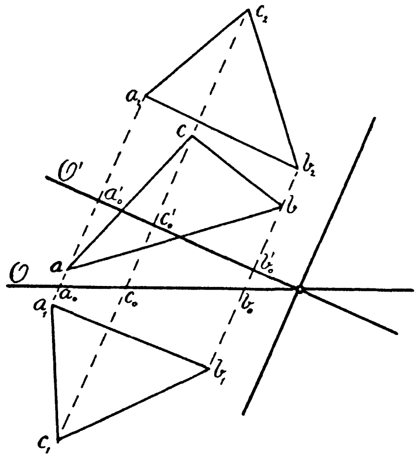
$$\check{S}_2 \begin{cases} x_2 = x_1 - \dfrac{2}{l}\, y_1, \\ y_2 = -\, y_1, \end{cases}$$

vychází

$$E = \check{S}_2 \,.\, \check{S}_1 \begin{cases} x_2 = x - 2\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{l}\right) y, \\ y_2 = y \end{cases}$$

což píšeme stručněji $x_2 = x - \dfrac{2}{m}\, y$, kladouce $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{l} = \dfrac{1}{m}$, nebo $x_2 = x + ay$, $y_2 = y$. Vzorce tyto udávají totéž, co odvozeno úvahou: vzdálenost bodu od osy při transformaci E se nemění, každý bod se posune směrem osy o délku úměrnou své vzdálenosti od osy.

Převeďme útvar U v útvar U_1 dle osy O, U_1 pak v U_2 *dle jiné osy* O', neměníce však osnovu rovnoběžek (obr. 8.); ukazuje se, že útvar U_2 jest s U ve vztahu, k jakému jsme



Obr. 8.

dospěli předešle, totiž $U_2 = E(U)$. Osa této elace prochází průsečíkem os O, O' a jest rovnoběžná s oním směrem osnovy rovnoběžek. Důkaz je jednoduchý: přímky aa_2, bb_2, cc_2, ... jsou rovnoběžny; úsečky aa_2, bb_2, cc_2. jsou dvojnásobky úseček $a_0a'_0$, $b_0b'_0$, $c_0c'_0$, úměrných svým vzdálenostem od průsečíku os. K vůli analytickému důkazu volme za osu souměrnosti přímku $y = ux$, směr transformace však budiž rovnoběžný s osou X, tedy $tg\,\alpha = 0$; obdobně jako prve jest $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = k = 0$, tedy $y_1 = y$, dále $\frac{x_1 + x}{2}$, $\frac{y_1 + y}{2} = y$ je bod osy, pročež platí $y = u\,\frac{x_1 + x}{2}$, z čehož vycházejí vzorce transformační

$$x_1 = -x + \frac{2}{u}\,y, \quad y_1 = y.$$

Transformujeme-li po druhé dle osy $y = u'x$, při čemž jest

$$y_2 = -x_1 + \frac{2}{u'} y_1, \quad y_2 = y_1,$$

jest produkt obou transformací dán vzorci

$$x_2 = x - 2\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u'}\right) y, \quad y_2 = y.$$

Jest to elace, jejíž osou je osa souřadnic X, rovnoběžná se směrem šikmých souměrností a jdoucí průsečíkem (0, 0) jednotlivých os.

Produkt dvou šikmých osových souměrností při různých osách i směrech jest affinita; neboť spojením příslušných vzorců transformačních vycházejí souřadnice bodu v U_2 jako lineární funkce souřadnic bodu v U. Pouze ve zvláštním případě, kdy volíme osu druhé transformace rovnoběžnou se směrem prvé transformace a zároveň směr druhé souměrnosti rovnoběžný s osou prvé, jsou útvary U a U_2 ve vztahu velmi jednoduchém, jsou totiž spolu souměrně sdruženy dle středu, jímž jest průsečík obou os. Důkaz toho nečiní žádných obtíží.

Nastává nyní úkol vyšetřiti novou transformaci, ku které jsme dvakrát byli přivedeni, totiž *elaci*. Spojnice korrespondujících bodů jsou spolu rovnoběžny, rovněž s osou, mají tedy všechny společný bod v nekonečnu na ose. Poněvadž pak vzdálenosti spojnic těch (na př. aa_2, bb_2) od osy jsou úměrny jich délce, protínají se korrespondující přímky (ab, a_2b_2) na ose. Elace jest určena osou a koefficientem, jenž udává, kolikrát je posunutí bodu podél osy větší než jeho vzdálenost od osy; existuje v rovině proto ∞^3 různých elací.

Jest samozřejmé, že produkt dvou elací při pevné ose jest zase elace s touže osou, jejíž koefficient je součtem koefficientů jednotlivých elací; analyticky vycházejí ovšem také z rovnic

$$E_1 \begin{cases} x_1 = x + ay \\ y_1 = y \end{cases}, \quad E_2 \begin{cases} x_2 = x_1 + a'y_1 \\ y_2 = y_1 \end{cases}$$

rovnice

$$E_2E_1 \begin{cases} x_2 = x + (a + a')\,y \\ y_2 = y \end{cases}.$$

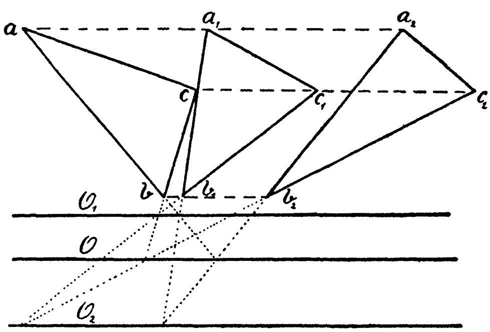
Na pořádku koefficientů a, a' v prvé rovnici patrně nezáleží. Tvoří tedy elace při pevné ose grupu ∞ členů kommutativních.

Jaký je výsledek dvou elací, jejichž osy jsou rovnoběžny? Analytický výraz elace, jejíž osou jest přímka, rovnoběžná s osou X ve vzdálenosti m, jest

$$E_m \begin{cases} x_1 = x + a\,(y - m) \\ y_1 = y \end{cases};$$

obdobně elace, jejíž osa je o délku n vzdálena od X:

$$E_n \begin{cases} x_2 = x_1 + b\,(y_1 - n) \\ y_2 = y_1 \end{cases};$$



Obr. 9.

i jest produkt obou

$$E_n \,.\, E_m \begin{cases} x_2 = x + (a + b)\,y - am - bn \\ y_2 = y \end{cases},$$

což jest, jak vidno, elace, jejíž koefficient jest součet koefficientů obou složek a jejíž osa jest rovnoběžná s osami složek, majíc od X vzdálenost $\dfrac{am + bn}{a + b}$ (obr. 9.). Soustava elací s osami rovnoběžnými jest tedy grupou; grupa ta má ∞^2 členů (∞ rovnoběžných os, ∞ koefficientů) kommutativních.

Všechny (∞^3) elace v rovině netvoří grupu, neníť produkt dvou elací při osách různých a obecně položených elace, nýbrž jen affinita.

Hlavní obsah předcházejících úvah opakujeme: *Osová šikmá souměrnost je transformace involutorní, je určena osou a směrem. Dvě takové souměrnosti při pevné ose jsou ekvivalentní elaci podél osy, rovněž dvě souměrnosti při pevném směru jsou ekvivalentní elaci podél osy, jdoucí průsečíkem os jejich rovnoběžně se směrem jejich. Elace při téže ose tvoří grupu ∞ členů záměnných, podobně elace při rovnoběžných osách grupu ∞^2 členů záměnných.*

Osová šikmá souměrnost mění tvar, ale nemění *plochu* geometrických útvarů; neboť (obr. 7.) $\triangle abc =$ pětiúhelník a_0abcc_0 — čtyrúhelník a_0acc_0, obdobně $\triangle a_1b_1c_1 = a_0a_1b_1c_1c_0$ — $a_0a_1c_1c_0$, dále pak $a_0abcc_0 = a_0a_1b_1c_1c_0$, $a_0acc_0 = a_0a_1c_1c_0$ (rovné základny a výšky u lichoběžníků). Útvary přímočaré lze pak rozložiti v trojúhelníky, křivočaré lze pokládati za mezní případ přímočarých; platí tedy rovnost ploch obecně. Nemění následkem toho velikost ploch ani elace, ani affinity, k nimž jsme dospěli složením osových šikmých souměrností při různých osách a směrech a složením elací při různých osách. Jest případno proto nazvati *affinity* tyto *stejnoplochými*. Že na př. elace nemění velikost plochy trojúhelníka s vrcholy (x, y), (x', y'), (x'', y''), vychází analyticky pouhou proměnou determinantu: trojúhelník s vrcholy transformovanými má plochu

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x'_1, & y'_1, & 1 \\ x''_1, & y''_1, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + ay, & y, & 1 \\ x' + ay', & y', & 1 \\ x'' + ay'', & y'', & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x', & y', & 1 \\ x'', & y'', & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} ay, & y, & 1 \\ ay', & y', & 1 \\ ay'', & y'', & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x', & y', & 1 \\ x'', & y'', & 1 \end{vmatrix} + 0,$$

což je plocha trojúhelníka původního.

5. Jako jsme zobecnili středovou souměrnost v homothetičnost, nahradivše její poměr -1 poměrem obecným p, rozšíříme také šikmou souměrnost osovou tím, že za poměr vzdálenosti transformovaného bodu od osy a původního bodu od osy volíme místo -1 obecné číslo p. Transformaci takovou jmenujme (názvem dále odůvodněným) *perspektivní* (homologickou) *affinitou.*

K útvaru rovinnému sestrojíme útvar perspektivně affinní při dané ose, daném směru a daném poměru, vedeme-li body útvaru osnovu rovnoběžek udaného směru a na každé nalezneme bod té vlastnosti, že poměr vzdálenosti jeho od průsečíku rovnoběžky s osou a vzdálenosti původního bodu od téhož průsečíku je roven danému poměru a ovšem stálý. Transformaci tuto nazývejme A. Je jasno, že spojnice korrespondujících bodů dvou útvarů perspektivně affinních jsou veskrze rovnoběžné, dále že korrespondující přímky protínají se na ose; důvody jsou tytéž jako při osové šikmé symmetrii. Jestliže útvar U přechází v U_1 affinitou perspektivní dle poměru p (A_p), přechází U_1 v U affinitou dle poměru $\frac{1}{p}$ jest tedy $A_{\frac{1}{p}}$ transformace inversní k A_p; A_1 je identická transformace, A_{-1} jediná involutorní (šikmá, ve zvl. případě kolmá osová souměrnost).

Převedeme-li U v U_1 affinitou A_p, U_1 pak v U_2 transformací A_q, *dle téže osy* a *při témž směru*, souvisí U s U_2 transformací $A_q \,.\, A_p$, což je affinita A_r, téže osy a téhož směru, jejíž poměr r je součinem poměrů původních affinit qp. Protínají-li totiž přímky aa_1a_2. bb_1b_2. cc_1c_2 osu v bodech resp. a_0, b_0, c_0, platí následkem A_p: $\frac{a_1a_0}{aa_0} = \frac{b_1b_0}{bb_0} = \frac{c_1c_0}{cc_0} = p$, následkem A_q pak $\frac{a_2a_0}{a_1a_0} = \frac{b_2b_0}{b_1b_0} = \frac{c_2c_0}{c_1c_0} = q$, tedy spojením obojího $\frac{a_2a_0}{aa_0} = \frac{b_2b_0}{bb_0} = \frac{c_2c_0}{cc_0} = pq$. Perspektivní affinity při pevné ose a směru tvoří grupu ∞ členů záměnných.

Užitím souřadnic, zvolíme-li osu X za osu affinity, udáme-li směr transformace úhlem α, který svírá s osou (tak že $tg\,\alpha = k$), a nazveme-li poměr její p, lze psáti

$$\frac{x_1 - x_0}{x - x_0} = p, \quad \frac{y_1 - y_0}{y - y_0} = p, \quad \frac{y_0 - y}{x_0 - x} = k,$$

kde x_0, y_0 $(= 0)$ je bod osy, průsečík její s přímkou spojující dva body sobě odpovídající (x, y), (x_1, y_1). Odtud plyne

$$A_p \begin{cases} x_1 = x + \dfrac{p-1}{k}\, y, \\ y_1 = py. \end{cases}$$

Obdobně jest

$$A_q \begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{q-1}{k} y_1, \\ y_2 = q y_1, \end{cases}$$

tak že

$$A_q \,.\, A_p : x_2 = x + \frac{pq-1}{k} y, \quad y_2 = pqy;$$

tím potvrzen znova uvedený výsledek.

Jest nyní úkol skládati affinity perspektivní *při pevné ose*, avšak *při různých směrech a poměrech*. Applikujeme li na rovinu nejprve transformaci

$$A_{k,\,p} \begin{cases} x_1 = x + \frac{p-1}{k} y, \\ y_1 = py, \end{cases}$$

potom

$$A_{k',\,p'} \begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{p'-1}{k'} y_1, \\ y_2 = p' y_1, \end{cases}$$

jest úhrnná transformace

$$A_{k',\,p'} \,.\, A_{k,\,p} \begin{cases} x_2 = x + y \frac{k'(p-1) + kp(p'-1)}{kk'}, \\ y_2 = p'py, \end{cases}$$

i jest patrno, že tento produkt dvou affinit je zase affinita při téže ose (ose X), jejíž poměr jest $p'p$ a směr dán funkcí

$$tg\,\alpha'' = k'' = \frac{k'k}{k'(p-1) + kp(p'-1)} \,.\, (pp'-1)$$

$$= \frac{k'k(pp' - p + p - 1)}{k'(p-1) + kp(p'-1)} = \frac{k'kp(p'-1) + k'k(p-1)}{kp(p'-1) + k'(p-1)} .$$

Platí tedy

$$A_{k',\,p'} \,.\, A_{k,\,p} = A_{k'',\,pp'},$$

t. j. všechny persp. affinity při téže ose tvoří grupu ∞^2 členů nekommutativních.

(Dokončení.)