Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

Geometrie kruhu. [V.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 6, 252--260

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122455`

Geometrie kruhu.

Pro žáky středních škol sestavil

Dr. Karel Zahradník.

(Dokončení.)

XXI. Další vlastnosti svazku kruhů.

36. Vlastnosti svazku kruhů, t. j. kruhů probíhajících dvěma body aneb, jak též jinak se vyjadřujeme, kruhů o společné chordále mohli jsme již při čl. 18. odvoditi, avšak odvození bude přehlednější, volíme-li chordálu za osu y a centrálu za osu x. Rovnice svazku kruhů při této volbě souřadnic zní:

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + k = 0. \tag{1}$$

Veličina k se nemění, je stálou pro všechny kruhy tohoto svazku; λ jest veličina proměnná, každé hodnotě za λ přisluší jeden určitý kruh tohoto svazku, což též jinak pronésti můžeme, pravíce, že λ jest parametrem toho kruhu. Proběhne-li λ všechny hodnoty reálné, obdržíme všechny kruhy celého svazku a poloha středu každého kruhu dána jest jeho parametrem λ, neb z rovnice (1) vysvítá, že střed každého kruhu tohoto svazku leží na ose x ve vzdálenosti λ od počátku souřadnic.

Položíme-li $x = 0$ do rovnice (1), obdržíme

$$y^2 + k = 0. \tag{2}$$

Rovnice tato podává pořadny bodů, v nichž osa y (chordála) svazek kruhů protíná a jelikož je tato rovnice na λ nezávislá, vysvítá, což arci již z počátku jsme předpokládali, že body

$$x = 0, \; y = \pm \sqrt{-k}$$

každý kruh daného svazku probíhati musí.

Tyto dva pevné body na chordále nazývají se základné body svazku kruhů. Body tyto jsou reálné, je-li

$$k = -c^2,$$

a jsou imaginárné, když

$$k = + c^2.$$

Rovnici (1) můžeme dáti následující tvar:

$$(x - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 - k, \tag{3}$$

kdež pravá strana čtverec poloměru dotčeného kruhu značí. Ze všech kruhů tohoto svazku jsou dva kruhy význačné, totiž ony, jež přísluší hodnotě

$$\lambda = \pm \sqrt{k}. \qquad (4)$$

Za tuto hodnotu pro λ obdržíme dva kruhy o poloměru rovném nulle; v případě tomto přešly kruhy ve dva body souměrně položené na ose x ku počátku souřadnic ve vzdálenosti $\sqrt{k}$. Body tyto nazval Poncelet*) „mezné body". Označme si body tyto**) písmeny L a L'; tyto jsou, jak z rovnice (4) vysvítá, reálné neb imaginárné, dle toho-li k se $+c^2$ neb $-c^2$ rovná. Toto můžeme vzhledem k rovnici (3) též následovně pronésti: jsou-li základní body svazku kruhů reálné, jsou mezné body imaginárné a naopak.

37. Mocnost počátku souřadnic O vzhledem ku všem kruhům svazku podaného rovnicí (1) jest

$$k = c^2, \qquad (5)$$

a jak z rovnice této vysvítá, jest nezávislá na parametru λ, tedy vzhledem ku každému kruhu daného svazku stejná, rovná se totiž čtverci vzdálenosti mezného bodu $L\,(L')$ od bodu O

Volme nyní libovolný bod H na chordále, jehož souřadnice buďtež (o, h). Mocnost bodu H vzhledem ku kruhům (1) bude se rovnati $h^2 + k$. Mocnost tato je však na parametru λ nezávislá, tedy pro všechny kruhy svazku stejná a přihlížíme-li k významu mocnosti bodu,***) bude

$$\overline{HM}^2 = h^2 + k, \qquad (6)$$

kde HM délku tečny z bodu H k nějakému kruhu tohoto svazku značí.

Body styku M tečen vedených z bodu H ke všem kruhům svazku jsou dle rovnice (6.) od tohoto bodu stejně vzdáleny, tudíž jest místo jejich kruh, jehož středem jest H a poloměr rovná se délce HM; rovnice tohoto kruhu zní

$$x^2 + (y - h)^2 = h^2 + k. \qquad (7)$$

Označíme-li střed kruhu příslušného parametru λ písmenem S, bude

$$\overline{HM}^2 = h^2 + k$$
$$\overline{MS}^2 = \lambda^2 - k$$

*) Traité de Propriétés Projekt. pag. 41.

**) Výkres každý dle udání snadno si sestrojí.

***) Viz pag. 21. tohoto časopisu.

tedy

$$\overline{HM}^2 + \overline{MS}^2 = h^2 + \lambda^2.$$

Avšak též

$$\overline{OH}^2 + \overline{OS}^2 = h^2 + \lambda^2,$$

tedy

$$\overline{HM}^2 + \overline{MS}^2 = \overline{HS}^2, \tag{8}$$

z čehož následuje, že trojúhelník *HMS* jest pravoúhelný, že čtverec vzdáleností středů kruhů (3) a (7) rovná se součtu čtverců poloměru jejich, to jest, kruhy (3) a (7) protínají se pravoúhelně. Mimo to dokázáno dříve, že kruh (7) body meznými L a L' probíhá, neb $y = 0$, $x^2 = k$, pročež máme větu:

„*Vedeme-li z libovolného bodu na chordále tečny ku všem kruhům svazku* (1), *leží všechny body styku na kruhu, majícím za střed zmíněný bod; kruh tento probíhá meznými body L a L', a protíná kolmo všechny kruhy svazku* (1).

38. Shledali jsme ve čl. 34, že poláry libovolného bodu vzhledem ku všem kruhům svazku pevným bodem procházejí. Ze všech bodů sourovinných se svazkem kruhů význačné jsou opět mezné body L a L'. Jejich poláry vzhledem ku všem kruhům svazku nejenom že pevným bodem procházejí, ony samy jsou pevné.

Polára bodu $(x_1\, y_1)$ vzhledem ku kruhu (1) jest dána rovnicí

$$x(x_1 - \lambda) + yy_1 - \lambda x_1 + k = 0. \tag{9}$$

Polára bodu L $(\sqrt{k},\, 0)$ bude

$$x(\sqrt{k} - \lambda) + \sqrt{k}(\sqrt{k} - \lambda) = 0,$$

a zkrátíme-li činitelem $\sqrt{k} - \lambda$, obdržíme

$$x + \sqrt{k} = 0. \tag{10}$$

Podobně bude polára bodu L' $(-\sqrt{k},\, 0)$

$$x - \sqrt{k} = 0. \tag{11}$$

Rovnice (10) a (11) jsou nezávislé na parametru λ, nemění se, ať již určíme poláru bodu mezného ku kterémukoliv kruhu svazku, tudíž můžeme pronésti větu:

„*Polára jednoho mezného bodu jest vzhledem ke všem kruhům svazku rovnoběžná k chordále svazku a prochází druhým mezným bodem.*

39. Dán budiž pevný bod B_1 v rovině kruhu (1), poláry jeho vzhledem k těmto kruhům procházejí pevným bodem B' a naopak, poláry bodu B' procházejí bodem B_1. Prvá část již v čl. 34 odvozená a druhá část plyne sama sebou již z vlastnosti polár (čl. 21), předce však uvádím zde důkaz této věty přímý a jednoduchý.

Buďtež $x_1\, y_1$ souřadnice bodu B_1. Polára jeho vzhledem k svazku (1) dána jest rovnicí

$$x(x_1 - \lambda) + yy_1 - \lambda x_1 + k = 0$$

aneb

$$xx_1 + yy_1 + k - \lambda(x + x_1) = 0.$$

Rovnice tato má býti nezávislá na veličině λ (čl. 34), tudíž je

$$\begin{aligned} xx_1 + yy_1 + k &= 0 \\ x + x_1 &= 0 \end{aligned} \qquad (12)$$

První rovnice značí poláru bodu $(-x_1, -y_1)$ vzhledem ku kruhu danému rovnicí

$$x^2 + y^2 = k,$$

tedy ku kruhu opsanému nad $\overline{LL'}$ co průměrem. Bod $(-x_1, -y_1)$ jest souměrný bod bodu B_1 a označme jej písmenem B'_1.

Z rovnic (12) vysvítá, že polára bodu B_1 pevným bodem B' prochází, jehož souřadnice obdržíme, řešíme-li rovnice (12) dle x a y; jest tudíž

$$\begin{aligned} x'x_1 + y'y_1 + k &= 0 \\ x' + x_1 &= 0, \end{aligned} \qquad (13)$$

souvislost mezi souřadnicemi bodu B_1 a B', a ze souměrnosti vysvítá vlastnost reciprocity.

40. Opišme nyní nad $\overline{B_1 B'}$ co průměrem kruh; rovnice jeho zní

$$\left(x - \frac{x_1 + x'}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y'}{2}\right)^2 = \left(x_1 - \frac{x_1 + x'}{2}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{y_1 + y'}{2}\right)^2$$

aneb vzhledem k rovnicím (12) po vyloučení x' a y'

$$x^2 + \left(y - \frac{x_1^2 + y_1^2 - k}{2y_1}\right)^2 = x_1^2 + \left(\frac{x_1^2 - y_1^2 - k}{2y_1}\right)^2. \qquad (14)$$

Kruh tento probíhá body meznými, neb vyhovují této rovnici hodnoty

$$x^2 = k, \quad y = 0.$$

Budiž C_1 střed kruhu (1) probíhajícího bodem B_1; souřadnice středu budou $\left(\frac{x_1^2 + y_1^2 + k}{2x_1}, 0\right)$ směrnice přímky $\overline{C_1 B_1}$ rovnati se bude

$$-\frac{2x_1 y_1}{k + y_1^2 - x_1^2},$$

směrnice přímky $\overline{B_1 B'}$ bude

$$\frac{y_1 - y'}{x_1 - x'}$$

a součin jejich vzhledem k rovnicím (8) jest

$$-\frac{2x_1 y_1}{k + y_1^2 - x_1^2} \cdot \frac{y_1 - y'}{x_1 - x'} = -\frac{2x_1 y_1}{k + y_1^2 - x_1} \cdot \frac{y_1 - \dfrac{x_1^2 - k}{y_1}}{2x_1} = -1,$$

z čehož vysvítá, že $\overline{C_1 B_1}$ kolmo stojí na $\overline{B_1 B'}$ t. j. že $\overline{B_1 B'}$ je tečnou; podobně odvoditi lze, že přímka $\overline{C' B'}$ kolmo stojí na $\overline{B_1 B'}$, tedy i k druhému kruhu je $\overline{B_1 B'}$ tečnou, což nám podává větu: *Spojivá přímka dvou bodů B_1 a B' majících vlastnost reciprokou* (poláry jednoho vzhledem ku kruhům svazku procházející bodem druhým a naopak) *je tečnou společnou k dvěma kruhům svazku.*

XXII. Stanovení úhlu dvou přímek nezávislé na jakosti souřadnic.

41. Dány buďtež dvě přímky P a P_1 svými rovnicemi v souřadnicích homogenních

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

a označíme-li písmenem φ úhel těchto, bude

$$tg\,\varphi = \frac{ab_1 - a_1 b}{aa_1 + bb_1}. \tag{2}$$

Vytkněme si za úkol, vyjádřiti $tg\,\varphi$ takým způsobem, by nezávisela na jakosti souřadnic.

Přímka úběžná protíná dané dvě přímky P a P_1 v bodech p a p_1. Body tyto jsou určeny rovnicemi

$$p \dots \begin{cases} ax + by = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

$$p \dots \begin{cases} ax_1 + b_1 y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Označmež imaginárné body kruhové v nekonečnu písmeny k a k_1.

Tyto jsou dány rovnicemi (čl. 7.)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

aneb

$$k \dots \begin{cases} x + iy = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$k_1 \dots \begin{cases} x - iy = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Dvojpoměr těchto čtyř bodů, jež dle odvození leží na přímce úběžné, označme písmenem q, tedy

$$q = (kk_1 \; pp_1)\,. \tag{3}$$

Tyto čtyři body jsou průsekem přímek

$$\begin{aligned} x + iy &= 0 \\ x - iy &= 0 \\ ax + by &= 0 \\ a_1 x + b_1 y &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

s přímkou úběžnou $z = 0$, musí se tudíž dvojpoměr těchto přímek rovnati taktéž q.*)

Jest však **)

$$q = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}\,. \tag{5}$$

Vzhledem k rovnicím (4) jest

$$\lambda_1 = i, \qquad \lambda_2 = -i$$

$$\lambda_3 = -\frac{a}{b}, \quad \lambda_4 = \frac{a_1}{b_1}\,.$$

Zavedeme-li hodnoty tyto do rovnice (5), obdržíme

$$q = \frac{(bi + a)}{(bi - a)} : \frac{b_1 i + a_1}{b_1 i - a_1}$$

---

*) Viz *Zahradník* „Symboly analytické geometrie a jejich upotřebení" Časop. mathm. III. díl pag. 163.

**) Viz „Symboly analytické geom. „Časop. math. II. díl, pag. 177.

aneb

$$q = \frac{(bi + a)\,(b_1 i - a_1)}{(bi - a)\,(b_1 i + a_1)}.$$

Provedeme-li násobení, obdržíme

$$q_1 = \frac{aa_1 + bb_1 - (ab_1 - a_1 b)\,i}{aa_1 + bb_1 + (ab_1 - a_1 b)\,i}.$$

Přihlížíme-li k rovnici (2), totiž

$$ab_1 - a_1 b = (aa_1 + bb_1)\,tg\,\varphi,$$

přejde hořejší rovnice po zkrácení činitelem $aa_1 + bb_1$

$$q = \frac{1 - i\,tg\,\varphi}{1 + i\,tg\,\varphi} = e^{-2i\varphi}, \tag{6}$$

z čehož plyne buď

$$tg\,\varphi = \frac{q-1}{q+1}\,.\,i \tag{7}$$

neb

$$\varphi = \frac{i}{2}\,l\,q. \tag{8}$$

Kdyby $q = -1$, tvořily by přímky (4) harmonický svazek a z rovnice (7) plyne

$$tg\,\varphi = \infty,$$

t. j. přímky P a P_1 stojí na sobě kolmo, což též jinak pronésti můžeme.

Každý pár kolmých přímek rozděluje harmonicky vzdálenost imaginárných bodů kruhových v nekonečnu.

XXIII. Rovnice kruhu v souřadnicích přímkových čili tangentiální rovnice kruhu.

42. Při bodové rovnici kruhu brali jsme bod za prvek kruhu, jejž jsme jeho souřadnicemi určili. Podobně můžeme tečnu kruhu za prvek pojímati a určiti ji jejími souřadnicemi,*) totiž úseky jejími na osách. Tu obdobně ku článku 1. obdržíme následující výměr kruhu:

„Přímky dané roviny, které od pevného bodu téže roviny stejně vzdálené jsou, tvoří kruh, an jest jejich obálkou.“

Značí-li u, v souřadnice libovolné přímky, která jak patrno bude tečnou kruhu, a, b souřadnice bodové středu jeho C, r jeho

---

*) Viz mé pojednání „O symbolech anal. geometrie atd.“ Čas. math. r. III.

poloměr, a předpokládáme-li pravoúhlé souřadnice, což na věci nic nemění, bude

$$ux + vy + 1 = 0$$

rovnice také tečny a vzdálenost její od středu C bude

$$\frac{ua + vb + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = r. \tag{1}$$

Rovnice tato vyjadřuje, že tečna (u, v) od bodu pevného (ab) středu to kruhu danou vzdálenost má. Jsou-li u, v proměnné, vyjadřuje rovnice (1) relaci mezi souřadnicemi libovolné tečny kruhu a stálými a, b, r, t. j. rovnici kruhu, již též psáti můžeme

$$(ua + vb + 1)^2 = r^2 (u^2 + v^2). \tag{2}$$

Rovnice tato podává nám normálný tvar rovnice kruhu v souřadnicích přímkových, aneb vztah, jemuž souřadnice dané přímny u, v vyhověti musí, má-li tato býti tečnou kruhu.

Volíme-li počátek souřadnic za střed kruhu, bude $a = b = 0$; a rovnice (2) přejde ve

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2}. \tag{3}$$

Jsou-li osy tečnami kruhu, bude $a = b = r$, a tudíž nabude rovnice (2) tvaru

$$uv - \frac{u + v}{r} + \frac{1}{r^2} = 0. \tag{4}$$

XXIV. Podmínky, za kterými obecná rovnice stupně druhého v souřadnicích přímkových kruh značí.

43. Obecná rovnice stupně druhého v souřadnicích přímkových jest

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0,$$

a normální tvar rovnice kruhu rozvedený zní

$$(a^2 - r^2)\, u^2 + 2\, abuv + (b^2 - r^2) v^2 + 2au + 2bv + 1 = 0.$$

Mají-li obě rovnice jeden a týž kruh vyjádřovati, musí se rovnice druhá úplně prvé rovnici rovnati, až na jistého faktora, kterým všechny členy mohly byti zkráceny. Násobíme-li rovnici (2) takým faktorem λ, budou rovnice (1) a (2) identické, t. j.

$$\begin{array}{ll} \lambda\,(a^2 - r^2) = A & \lambda\,(b^2 - r^2) = C \\ \lambda\, ab = B & \lambda\, a = D \\ \lambda\, b = E & \lambda = F. \end{array} \tag{3}$$

Rovnice (1) má šest stálých, rovnice (2) znásobená činitelem λ má pouze čtyři, z čehož vysvítá, že musí oněch šest stálých určitě dvěma podmínkám vyhověti, má-li rovnice (1) značiti kruh. Tyto podmínky obdržíme z rovnic (3).

Jest totiž

$$\lambda^2 ab = DE$$
$$\lambda^2 ab = BF$$

tedy

$$BF = DE, \qquad (4)$$

co první hledaná podmínečná rovnice. Odčítáme-li rovnice (3) prvého řádku, obdržíme

$$\lambda (a^2 - b^2) = A - C.$$

Jest však

$$a = \frac{D}{\lambda}, \quad b = \frac{E}{\lambda}, \quad \lambda = F;$$

zavedeme-li hodnoty tyto do hořejší rovnice, obdržíme

$$\frac{D^2 - E^2}{F} = A - C,$$

aneb

$$D^2 - AF = E^2 - CF \qquad (5)$$

co druhou hledanou podmínečnou rovnici.

44. Podobně jako v souřadnicích bodových mohli bychom v souřadnicích tečnových (přímkových) geometrii kruhu odvoditi; místo bodu nastoupila by tečna kruhu co prvek jeho, a tak bychom obdobně ku předcházejícímu celou řadu vět odvoditi mohli pomocí souřadnic přímkových, jak jsme to již o přímce[1]) a bodu[2]) zevrubně byli provedli, pročež zde přestáváme na dvou článcích 42. a 43. a odvození samo zůstavuje se co cvičení. Znění jejich podává zákon duality, o němž svým místem[3]) učiněna byla zmínka. Složitější věty vztahující se k jednomu a více kruhům, mimo jiné zvlášť o středech a osách podobnosti, o problému Apollonia, o kruhu devíti bodů pro příští ročník si ponecháváme.

---

[1]) Časopis mathematiků „O symbolech analytické geometrie a jejich upotřebení", roč. II. Praha.

[2]) ibid. ročník III.

[3]) ibid. pag. 157. roč. III.