Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Cornelius Plch

Průměrová rovnice ellipsy v podobě vzorce pro záchvěje elliptické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 6, 277--279

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122454

Průměrová rovnice ellipsy v podobě vzorce pro záchvěje elliptické.

Podal

P. Cornelius Pich v Bohosudově.

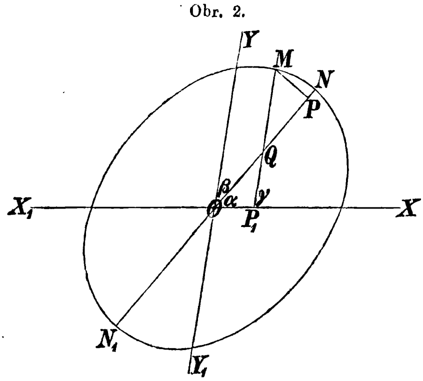
Buďtež a_1 i b_1 rozchvěje dvou vln, γ úhel těchto rozchvějů φ rozdíl jich měn a λ délka vlny. Položíce k vůli stručnosti $2\pi \frac{\varphi}{\lambda} = \delta_1$, najdeme, jak povědomo, pro výslední pohyb průsečného bodu dvou křižujících se pořadí vln rovnici této doby:

$$b_1{}^2 x^2 + a_1{}^2 y^2 - 2a_1 b_1 \cos\delta_1 xy = a_1{}^2 b_1{}^2 \sin^2\delta_1 \qquad \text{(I)}$$

Tato rovnice sluje ve fysice *vzorcem pro záchvěje elliptické* a jest, jak zřejmo, **průměrovou rovnicí ellipsy.**

Pro mnohého mathematika bude snad zajímavo, uzří-li rovnici ellipsy postupem výlučně mathematickým na dobu (I) uvedenu.

Obr. 2.



Pro pravoúhlé souřadnice jest, jak známo, středová rovnice ellipsy o polouosách a i b tato

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 . \qquad (1)$$

Novými osami souřadnic buďte směry XX_1 a YY_1 dvou libovolných průměrů, které s hlavní osou NN_1 příslušné úhly α i β tvoří. Tu jest pro každou polohu ellipsy

$$\alpha + \beta = \gamma = XOY .$$

Chtějíce rovnici (1) jinak vyjádřiti, klademe

$$x = y_1 \cos\beta + x_1 \cos\beta$$
$$y = y_1 \sin\beta - x_1 \sin\alpha,$$

kdežto x_1 a y_1 nové souřadnice znamenají; neboť pro libovolný bod M ellipsy jest za příčinou $MP \perp ON$ a $MP_1 \parallel OY$

$$y = MP = MQ \sin\beta = (MP_1 - QP_1) \sin\beta = \left(y_1 - OP_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) \sin\beta$$
$$= \left(y_1 - x_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) \sin\beta = y_1 \sin\beta - x_1 \sin\alpha;$$

$$x = OP = PQ + OQ = MQ \cos\beta + OP_1 \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$= \left(y_1 - x_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right) \cos\beta + x_1 \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$$
$$= y_1 \cos\beta - x_1 \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta} + x_1 \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta} + x_1 \cos\alpha$$
$$= y_1 \cos\beta + x_1 \cos\alpha.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty pro x a y do rovnice (1), obdržíme, píšíce, jak obyčejno, x a y místo x_1 a y_1, rozvedouce a upravíce rovnici

$$(a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha)\, x^2 + (a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta)\, y^2$$
$$- 2\,(a^2 \sin\alpha \sin\beta - b^2 \cos\alpha \cos\beta)\, xy = a^2 b^2. \qquad (2)$$

Položíme-li zkrátka

$$a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha = B^2 \sin^2\gamma \qquad (3)$$
$$a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta = A^2 \sin^2\gamma \qquad (4)$$

a znásobíme-li tyto rovnice podle vzorce

$$(m^2 + n^2)(p^2 + q^2) = (mp - nq)^2 + (mq + np)^2,$$

dostaneme snadným převodem rovnici

$$(a^2 \sin\alpha \sin\beta - b^2 \cos\alpha \cos\beta)^2 + a^2 b^2 \sin^2\gamma = A^2 B^2 \sin^4\gamma. \quad (5)$$

Ježto pak je čtverec $(a^2 \sin\alpha \sin\beta - b^2 \cos\alpha \cos\beta)^2$ v každém případě kladným, jest nezbytně

$$a^2 b^2 \sin^2\gamma \leqq A^2 B^2 \sin^4\gamma,$$

pročež i

$$\frac{a^2 b^2}{A^2 B^2 \sin^2\gamma} \leqq 1.$$

Položíme-li tudíž k vůli stručnosti

$$\frac{a^2 b^2}{A^2 B^2 \sin^2\gamma} = \sin^2\delta,$$

vyplyne odtud

$$a^2 b^2 = A^2 B^2 \sin^2\gamma \sin^2\delta. \qquad (6)$$

Dosazením této hodnoty do (5) obdržíme snadným převodem

$$a^2 \sin\alpha \sin\beta - b^2 \cos\alpha \cos\beta = AB \sin^2\gamma \cos\delta . \quad (7)$$

Dosadíme-li posléz (3), (4), (6), (7) do (2) vznikne, nám rovnice

$$B^2 \sin^2\gamma x^2 + A^2 \sin^2\gamma y^2 - 2AB \sin^2\gamma \cos\delta\, xy = A^2 B^2 \sin^2\gamma \sin^2\delta$$

neboli

$$B^2 x^2 + A^2 y^2 - 2AB \cos\delta\, xy = A^2 B^2 \sin^2\delta .$$

Tato **průměrová rovnice ellipsy** jest připodobena ke *vzorci pro záchvěje elliptické* (I).

O původu a rozvoji nauky o determinantech.

Sepsal

Dr. F. J. Studnička.

(Dokončení.)

Cauchy četl své pojednání, jímž položen základ k nauce o determinantech, dne 30. listopadu 1812 ve francouzském Institutu, kdež arci zasedali nejčelnější tehdáž mathematikové Francie a tudíž bezprostředně poznali výsledky nových těchto výzkumů; ale pojednání samo vyšlo tiskem až na počátku r. 1815, takže ostatní svět mathematický teprv později mohl míti příležitost seznámiti se s touto novou naukou i theoreticky i prakticky tak důležitou.

Dvojí okolnost vadila však rychlejšímu a obsáhlejšímu rozšíření theorie determinantů; jednak byla Evropa ještě rozvlněna neukrotitelnou ctižádostí samozvance Korsikánského, jednak nebylo uveřejnění této práce mathematické v sborníku tak málo v ostatních zemích rozšířeném, jako jest „Journal de l'école polytechnique", tomu valně příznivo. Cauchy pak sám nevěnoval tomuto svému mnohoslibnému dítku později tolik pozornosti, aby je byl přivedl k samostatné platnosti a všestrannému uznání, jakého zjednal jiným svým vynálezům a výzkumům, ba ve svých pozdějších Exerc. de Math. a Exerc. d'Analyse ani nezachoval stále pojmenování „determinant", vraceje se často k Laplaceovu názvu „resultant".