František Hanuš

O rovnici stupně čtvrtého

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 1, 32–34

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122417

O rovnici stupně čtvrtého.

Žákům středních škol píše

F. Hanuš,
assistent mineralogie při české vys. škole technické v Praze.

Budiž

(1) $$x^4 - \varphi_1 x^3 + \varphi_2 x^2 - \varphi_3 x + \varphi_4 = 0$$

rovnice stupně čtvrtého mající kořeny x_1, x_2, x_3, x_4, v níž lze φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 pokládati za základní souměrné úkony liter x_1, x_2, x_3, x_4, takže je lze uvésti na tvar

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4)\\
\varphi_2 &= x_1 x_2 + x_3 x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)\\
\varphi_3 &= x_1 x_2 (x_3 + x_4) + x_3 x_4 (x_1 + x_2)\\
\varphi_4 &= x_1 x_2 \,.\, x_3 x_4 .
\end{aligned}$$

Zavedeme-li pak označení

(2) $$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= y_1, \quad x_3 + x_4 = y_2,\\
x_1 x_2 &= z_1, \quad x_3 x_4 = z_2,\\
z_1 + z_2 &= u,
\end{aligned}$$

bude lze tyto rovnice psáti jak následuje:

(3) $$\left\{\begin{aligned}
y_1 + y_2 &= \varphi_1\\
y_1 y_2 &= \varphi_2 - u\\
z_1 y_2 + z_2 y_1 &= \varphi_3\\
z_1 z_2 &= \varphi_4 .
\end{aligned}\right.$$

Z prvých dvou rovnic této soustavy plyne, že y_1, y_2 jsou kořeny rovnice druhého stupně

(4) $$y^2 - \varphi_1 y + \varphi_2 - u = 0.$$

Vypočteme-li odtud y_1, y_2, a dosadíme-li do třetí z rovnic (3), obdržíme po odstranění odmocnin rovnici, v níž se vyskytuje pouze u a veličiny známé. K témuž cíli dospějeme však také následující cestou. Povyšením obou stran zmíněné rovnice na druhou mocnosť vznikne

$$\varphi_3^2 = z_1^2 y_2^2 + z_2^2 y_1^2 + 2 z_1 z_2 \,.\, y_1 y_2,$$

aneb vzhledem k rovnicím (3)

(5) $$\varphi_3^2 = z_1^2 y_2^2 + z_2^2 y_1^2 + 2\varphi_4(\varphi_2 - u).$$

Z rovnice (4) pak soudíme, že

$$\begin{aligned}
y_1^2 &= \varphi_1 y_1 + u - \varphi_2,\\
y_2^2 &= \varphi_1 y_2 + u - \varphi_2,
\end{aligned}$$

čímž rovnice (5) obdrží tvar

$$\varphi_3^2 = \varphi_1(z_1^2 y_2 + z_2^2 y_1) + (u - \varphi_2)(z_1^2 + z_2^2) + 2\varphi_4(\varphi_2 - u)$$

čili vzhledem k rovnici $z_1 + z_2 = u$,

(6) $$\varphi_3^2 = \varphi_1(z_1^2 y_2 + z_2^2 y_1) + (u - \varphi_2)(u^2 - 4\varphi_4).$$

Z třetí rovnice soustavy (3) plyne

$$z_1^2 y_2 = z_1\varphi_3 - z_1 z_2 y_1 = \varphi_3 z_1 - \varphi_4 y_1,$$
$$z_2^2 y_1 = z_2\varphi_3 - z_1 z_2 y_2 = \varphi_3 z_2 - \varphi_4 y_2,$$

takže máme

$$z_1^2 y_2 + z_2^2 y_1 = \varphi_3 u - \varphi_1\varphi_4,$$

čímž rovnice (6) přejde v tuto

(7) $$u^3 - \varphi_2 u^2 + (\varphi_1\varphi_3 - 4\varphi_4)u - [\varphi_3^2 - \varphi_4(\varphi_1^2 - 4\varphi_2)] = 0,$$

kterážto rovnice stupně třetího slouží k stanovení hodnoty u.

Poznámka k článku předcházejícímu.

Napsal

Matyáš Lerch,

docent při české vysoké škole technické v Praze.

Pan kollega Hanuš dospěl k resolventě (7) samostatně jakožto abiturient, aniž znal řešení odjinud. Resolventa tato shoduje se s onou, již podal Ferrari, avšak způsob odvození jest jiný, a třeba by řešení rovnic stupně 4. bylo dnes úkolem naprosto hotovým, považuji nicméně za vhodné, tuto methodu uveřejniti, ana vyniká jednoduchostí principu.

Aby řešení rovnice (1) bylo dovedeno ku konci, dlužno ještě ustanoviti, jak lze z kořenů resolventy (7) určiti kořeny rovnice (1).

Především poznamenejme, že nahradíme-li v třetí rovnici soustavy (3) veličiny y_2, z_2 hodnotami $\varphi_1 - y_1$, $\frac{\varphi_4}{z_1}$, vznikne rovnice linearná vzhledem k y_1, z níž plyne řešením

(8) $$y_1 = \frac{z_1(\varphi_1 z_1 - \varphi_3)}{z_1^2 - \varphi_4}.$$

Z rovnic $z_1 z_2 = \varphi_4$, $z_1 + z_2 = u$ však plyne, že z_1, z_2 jsou kořeny rovnice

(9) $$z^2 - uz + \varphi_4 = 0;$$

tu je pak zřejmo, že veličina z připouští 6 hodnot, ano u jest jakožto kořen rovnice kubické veličinou trojznačnou. Že tomu skutečně tak, plyne odtud, že existuje 6 amb $x_\alpha x_\beta$, z nichž každé možno voliti za z_1. Pak ale odpovídá každému z_1 jediné y_1, které se určí vzorcem (8).

Z rovnic

$$x_1 + x_2 = y_1, \quad x_3 + x_4 = \varphi_1 - y_1,$$

$$x_1 x_2 = z_1, \quad x_3 x_4 = \frac{\varphi_4}{z_1}$$

pak plyne, že x_1, x_2 jsou kořeny rovnice

$$x^2 - y_1 x + z_1 = 0,$$

a x_3, x_4 kořeny rovnice

$$x^2 - (\varphi_1 - y_1)\, x + \frac{\varphi_4}{z_1} = 0.$$

Máme tedy následující výsledek: Značíli u kterýkoli z kořenů resolventy

(3) $\quad u^3 - \varphi_2 u^2 + (\varphi_1\varphi_3 - 4\varphi_4)\, u - [\varphi_3^2 - \varphi_4(\varphi_1^2 - 4\varphi_2)] = 0,$

z kterýkoli z obou kořenů rovnice

(9) $$z^2 - uz + \varphi_4 = 0,$$

budou kořeny rovnic

$$x^2 - yx + z = 0, \quad x^2 - (\varphi_1 - y)\, x + \frac{\varphi_4}{z} = 0,$$

$\left[\text{kde} \quad y = \dfrac{\varphi_1 z^2 - \varphi_3 z}{z^2 - \varphi_4}\right]$, zároveň kořeny rovnice bikvadratické

$$x^4 - \varphi_1 x^3 + \varphi_2 x^2 - \varphi_3 x + \varphi_4 = 0,$$

kde φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 jsou libovolné veličiny konečné.

Je velmi zajímavo porovnati tento výsledek s ostatními způsoby řešení rovnic bikvadratických, najmě s methodou *Lagrangeovou*, o níž čtenář nalezne bližšího a snadně přístupného vysvětlení v článku p. prof. *Ed. Weyra* v XI. roč. Čas. (pod pseudonymem M. R.), kde zároveň probrány jsou rovnice stupně 2. a 3. S jiné stránky zajímavé jsou dva způsoby řešení prostředkem zvláštních tvarů determinantních, které v XIII. a XIV. roč. Čas. podali pp. *Studnička* a *Le Paige*.