František Kadeřávek
O zvláštní ploše sborcené. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 2, 156--162

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122412`

běžkám přísluŝejí dvě společné příčky, reálné či imaginárné, vyplývá z úvahy naší věta:

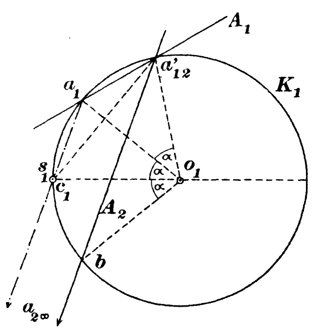
Leží-li pět projektivních svazků paprskových v různých rovinách, obsahuje každý z nich obecně šestnáct paprsků, z nichž každý je přeťat oběma transversálami homologických paprskův ostatních čtyř svazků, nebo jinak řečeno: existuje obecně 32 přímek, z nichž každá seče pět homologických paprsků daných svazků projektivných.

O zvláštní ploše sborcené.

Frant. Kadeřávek, assistent české techniky v Praze.

(Dokončení.)

Podobně z obrazce 6., v němž sestrojen půdorys A_1 libovolné površky dané plochy, jakož i centrálný obraz A_2 téže přímky na rovinu π pro střed promítání c (viz též znázor.



Obr. 6.

obr. 1[a]), vidno, že body a'_2 a $b \equiv A_2 \times K_1$ pohybují se v K_1 úhlovými rychlostmi 2α a α směrů opačných; i obaluje A_2 tentokráte známou hypocykloidu Steinerovu o třech úvratech, dotýkající se kružnice K_1 *).

Důležitý však pro naše vyšetřování jest obrys dané plochy na rovinu souměrnosti (Os) pro paprsky kolmé k této rovině.

---

*) Wieleitner: Sp. eb. K. p. 207 a 242.

Abychom jej vyšetřili, zvolme na dvojné přímce P dané plochy libovolný bod b; z něho vycházejí dvě k rovině (Os), již učiňme nárysnou ν, souměrné površky plochy, z jichž průsečíků s kružnicí K' vycházejí přímky plochy rovněž souměrné dle ν a stýkající se v bodě ${}^1b$ přímky P. Takto vytknuté čtyři površky dávají pouze dva nárysy A_2 a ${}^1A_2$ protínající v témž bodě a'_2 přímkový nárys kružnice K', nárys P_2 přímky P však ve dvou různých bodech b_2 a ${}^1b_2$; z toho vidno, že nárysy površek dané plochy vyvolávají v přímkách K'_2 a P_2 jednodvojznačnou příbuznost a sice v poloze redukované, poněvadž průsečík spojnic K'_2 a P_2 obou sdružených řad jest bodem samodružným.

14. I obalují nárysy přímek dané plochy kuželosečku, dotýkající se nárysu dvojné přímky co spojnice dvojznačného útvaru.*)

Ježto každá tečna nárysu plochy jest nárysem dvou na P se stýkajících přímek plochy, možno tvrditi, že:

15. roviny proložené přímkami plochy, stýkajícími se na přímce dvojné P, obalují válec druhého stupně a jsou protaty kteroukoli z rovin, dvojinou površek proloženou, ve svazku přímek druhé třídy.

Právě uvažovaný dotyčný válec dané plochy — označme jej ${}^1\varkappa'$ — a kterýkoli z kuželů ${}^1\varkappa'$ opsaný ploše s bodu dvojné křivky K' mají dvé rovin tečných společných (o pravdivosti se přesvědčíme, uvážíme-li válec ${}^1\varkappa'$, kužel ${}^1\varkappa$ a k tomuto dle roviny (Os) souměrný, rovněž dotyčný kužel ${}^1\varkappa''$ dané plochy); přecházejí tedy obecnou korrelací ve dvě kuželosečky $\varkappa'$ a $\varkappa$ mající dva body společné. Řídící přímka P dané plochy leží v rovině tečné válce ${}^1\varkappa'$, dotýkáť se P_2 průmětu plochy na rovinu (Os) co nárysnu, proto jí přidružená přímka protíná kuželosečku $\varkappa'$, do níž přechází korrelací válec ${}^1\varkappa'$. I jest korrelativní plocha dané plochy dána dvěma protínajícími se kuželosečkami a přímkou, protínající jednu z nich, je tedy tato plocha téhož druhu jako plocha daná. I platí pro danou plochu věta duální k větě 15, t. j.

*) Dr. Em. Weyr: Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde, p. 16.

16. Kterákoli rovina proložená dvěma různoběžnými površkami plochy protíná ostatní površky v bodech kuželosečky*).

Znajíce obrysy plochy na rovinách π a $\nu \equiv (Os)$ můžeme snadno řešiti úlohu: z daného nárysu bodu plochy sestrojiti půdorys a naopak. V onom případě třeba jen daným nárysem vésti tečny k obrysové kuželosečce a z takto získaných nárysů površek odvoditi prvé obrazy a na nich hledané půdorysy, jichž vychází čtvero. Dán-li naopak půdorys bodu plochy, třeba jím vésti tečny k obrysové kardioidě co půdorysy površek, na nichž leží body plochy, jichž půdorysy spadají s bodem daným. Není-li však kardioida obrysová narýsována, uvažme, že pro libovolný bod půdorysu A_1 některé površky A (obr. 1.) jakožto oko jest bod a_1 bodem lesku na kružnici K_1 pro svítící bod s_1. Proto, máme-li z daného půdorysu bodu plochy sestrojiti nárys, považujme jej za oko, vyhledejme body lesku na kružnici K_1 pro s_1 co svítící bod, což jest úloha známá **), pak spojnice těchto bodů lesku s daným bodem jsou půdorysy hledaných površek, na nichž leží žádané body o daném půdorysu.

Kdybychom měli v některém bodě u površky A dané plochy sestrojiti rovinu tečnou, sestrojili bychom v průsečících a a a' přímky A s kružnicemi K a K' tečny k těmto a nechali bychom v nich pohybovati se body a a a' rychlostmi o poměru 1 : 2. Spojnice odpovídajících si poloh pohybujících se bodů vytvářejí hyperbolický paraboloid mající s danou plochou přímku A a s ní soumeznou společnou, to jest dotyčný paraboloid uvažované plochy. Tím bychom danou úlohu vyřešili. Ale i bez něho mohli bychom tečnou rovinu v bodě u sestrojiti. Rovina ϱ, jdoucí bodem u rovnoběžně k rovině π kružnice K seče (dle věty 10.) plochu v úpatnici U kružnice vytčené rovinou ϱ na kuželi $(c'K)$ pro průsečík (ϱP) co pól. Křivce U, jíž netřeba rýsovati, lze snadno v bodě u sestrojiti tečnu, a ta určuje s površkou A žádanou tečnou rovinu.

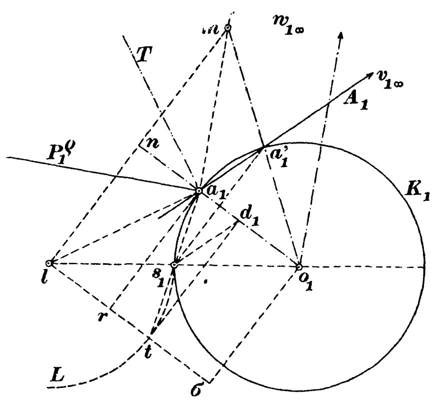
---

*) Tvar její určíme rovinou, vrcholem řídícího kužele rovnoběžně k dané vedenou.

**) K. Pelz: Über das Problem der Glanzpunkte. Sitz.-Berichte d. k. Akademie d. Wissensch. Vídeň 1872.

Z konstrukce tečného hyperb. paraboloidu patrno, že přímky plochy spadající do roviny souměrnosti, dvojnou přímku P vyjímaje, jsou torsální přímky plochy; jsou dvě a tři jejich průsečíky s útvary dvojnými plochy jsou kuspidální body plochy uvažované.

Tečným hyp. paraboloidem mohli bychom též vyhledati pro površku A asymptotickou rovinu, leč možno pokračovati i následovně:



Obr. 7.

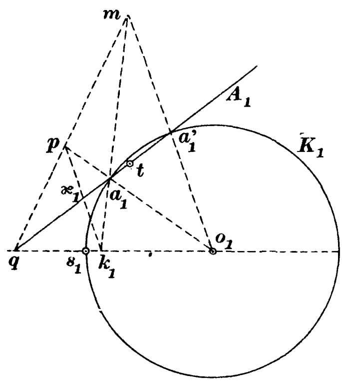
Veďme bodem s (obr. 7., srov. obr. 1[a]) rovnoběžku k površce plochy A, pak její stopa d na rovině π kružnice K přináleží, dle věty 7., úpatnici U kružnice $L \cong K$ a této se v průmětu s_1 bodu s dotýkající pro bod o_1 co pól. Úpatnice U jest však stopou řídícího kužele o vrcholu s, proto tečna její v bodě d_1 (sestrojíme ji snadno pomocí normály $\overline{d_1\sigma}$ procházející okamž. středem otáčení $\sigma \equiv (\overline{o_1\sigma}, \overline{lt})$, kdež učiněno $\overline{o_1\sigma} \perp \overline{o_1d_1}$ a $\overline{lt} \parallel \overline{o_1d_1}$) jest stopou roviny rovnoběžné k hledané asymptotické rovině. Proto rovnoběžka $P_1\varrho$ k oné tečně bodem a_1 vedená jest hledanou stopou roviny asymptotické ϱ na rovině π. Učiníme-li $\overline{lm} \perp \overline{a_1o_1}$ a označíme-li průsečík $(\overline{lm}, \overline{a_1o_1})$ písmenou n, učinivše $\overline{ln} = \overline{nm}$, jest $\overline{nm} \# \overline{td_1}$, $\overline{na_1} \# \overline{t\sigma}$, proto i $\overline{ma_1} \parallel \overline{d_1\sigma}$; i jest kolmice k $\overline{ma_1}$ v bodě a_1 vztyčená totožna s $P_1\varrho$. Ale $\overline{mo_1}$ jde bodem a'_1 a $\overline{ma'_1} = \overline{a'_1o}$, z toho patrna jednoduchá konstrukce stopy roviny asymptotické na π: třeba jen prodloužiti $\overline{o_1 a_1'}$ o touž délku do bodu m a vésti bodem a_1 žádanou stopu kolmo k $\overline{ma_1}$.

Učiníme-li v bodě a_1 přímku $T \perp \overline{la_1}$, jest T tečnou jisté hyperboly a $P_1\varrho$ jest k této tečně dle $\overline{a_1 o_1}$ souměrna; i vidíme, že obálka stop asympt. rovin v π_1, stopa to rozvinutelné asympt. plochy uvažované plochy sborcené, souvisí s hyperbolou o ohnisku l a poloose $\overline{s_1 o_1}$ tak, že tečny obou křivek, protínající se na kružnici K_1, jsou k sobě dle příslušného poloměru souměrny.

Řada dotyčných bodů na površce sborcené plochy jest, jak známo, projektivní k svazku rovin tečných, tedy i projektivní k svazku jejich stop na libovolné rovině. Pro površku A (obr. 7.) dané plochy známe však pro body a, a' a úběžný bod v_∞ i příslušné roviny tečné. Určeme si na π stopy těchto rovin. Tečné rovině bodu a přísluší co stopa tečna v a_1 ke K_1, stopa tečné roviny bodu a' jest rovnoběžna k tečně kružnice K_1 v bodě a'_1, a stopu $P\varrho$ roviny asymptotické známe určiti [$\overline{a'_1 o_1} = \overline{a'_1 m}$, $P_1\varrho$ bodem a_1 kolmo k $\overline{m_1 a_1}$]. Spustíme-li s bodu o_1 kolmice k právě sestrojeným stopám, přímky to $\overline{a_1 o_1}$, $\overline{a'_1 o_1}$ a $\overline{o_1 w_1} \parallel \overline{ma_1}$, a k stopám ostatních rovin tečných, jest svazek těchto kolmic projektivní k svazku rovin tečných a tedy i k řadě příslušných dotyčných bodů na površce A. I vytíná onen svazek na přímce $\overline{ma_1}$ řadu $a_1 m w_\infty \ldots$ projektivní k řadě průmětů dotyč. bodů $a_1 a'_1 v_{1\infty} \ldots$, ale tyto řady mají bod a_1 společný a body úběžné obou odpovídají si vzájemně, i jsou spojnice sdružených bodů spolu rovnoběžny. Na základě toho lze snadno k libovolné rovině jdoucí površkou A sestrojiti dotyčný bod. Třeba jen na její stopu v rovině π spustiti s bodu o_1 kolmici a průsečíkem této s přímkou $\overline{ma_1}$ vésti rovnoběžku k $\overline{ma'_1}$, ta pak protíná A_1 v půdoryse hledaného bodu.

Stanovme právě uvedeným způsobem půdorys dotyčného bodu roviny τ vedené površkou A kolmo k rovině souměrnosti (Os); t. j. hledejme půdorys nárysného obrysu dané plochy uvažovaného sub 14.

Stopa roviny τ jde bodem a_1 kolmo k $\overline{o_1 s_1}$, tudíž kolmice k ní z o_1 spuštěná jest totožna s $\overline{o_1 s_1}$. Označme průsečík její s $\overline{a_1 m}$ (obr. 8.) písmenou k_1, pak $\overline{k_1 \varkappa_1} \parallel \overline{o_1 m}$ protíná A_1 v hledaném půdorysu $\varkappa_1$ dotyčného bodu. Prodlužme $\overline{k_1\varkappa_1}$ do bodu p o délku rovnou $\overline{k_1\varkappa_1}$, pak přímky $\overline{o_1s_1}$, $a_1{}^1a_1 \equiv A_1$ a $\overline{mp}$ procházejí jediným bodem q, z čehož vidno, že čtveřina $(a'_1\varkappa_1a_1q)$ jest harmonická. I lze sestrojiti jednotlivé body $\varkappa_1$ půdorysu nárysného obrysu dané sborc. plochy jednoduše tak, že na půdorysech površek dané plochy vyhledá se bodu a'_1 harmonický $\varkappa_1$ k bodům a_1 a q, průsečíku to přímky A_1 s $\overline{o_1s_1}$. Křivka bodem $\varkappa_1$ popisovaná jest stupně 4. a lze ji stanoviti snadno i z tečen.



Obr. 8.

Myslíme si totiž k půdorysu A_1 soumezný ${}^1A_1$ a na něm body ${}^1a'_1$, ${}^1\varkappa_1$, ${}^1a_1$, ${}^1q$, jest též $({}^1a'_1, {}^1a_1, {}^1\varkappa_1, {}^1q) = -1$, t. j. řada

$$(a'_1a_1\varkappa_1q) \barwedge ({}^1a'_1{}^1a_1{}^1\varkappa_1{}^1q);$$

jest tedy $\overline{a'_1{}^1a'_1}$, $\overline{a_1{}^1a_1}$, $\overline{\varkappa_1{}^1\varkappa_1}$, $\overline{q^1q}$, A_1 a ${}^1A_1$ šest tečen kuželosečky L. Přímky A_1 a ${}^1A_1$ protínají se v bodě t dělícím úsečku $a_1a'_1$ v poměru 1 : 2 (viz pozn. u věty 11.), i jest určena kuželosečka L tečnou A, s dotyčným bodem t, tečnami kružnice K_1 v bodech a_1 a a'_1 a přímkou $\overline{o_1s_1} \equiv \overline{q^1q}$. Tečnu $\overline{\varkappa_1{}^1\varkappa_1}$ lze snadno sestrojiti poučkou Brianchonovou.

I oskulační hyperboloid podél libovolné površky A dané plochy lze snadno určiti. Známe totiž tři body, bod c', střed a úběžný bod úsečky $\overline{oo'}$ (obr. 1[a]), z nichž ploše opsané kužely dotýkají se podél křivek rovinných (věty 3, 11, 12). Tak na př. kužel s bodu c' dotýká se plochy podél kružnice K, sestrojíme-li tedy k přímce A harmonickou přímku B vzhledem k tečně T kružnice K v bodě a a površce $\overline{c'a}$ uvažovaného kužele, jest B řídící přímkou hyperboloidu zborceného, oskulujícího danou plochu podél přímky A. Druhé dvě řídící přímky našli bychom tímtéž způsobem pomocí kuželů s ostatních bodů zmíněných ploše opsaných. Jak by se oskulačních hyperboloidů dané plochy užilo, je známo a netřeba se o tom šířiti.

Poznámka: Předpokládejme, že z veškerých bodů přímky $\overline{cs}$ (obr. 1[a]) vycházejí světelné paprsky. Pak tvoří ony paprsky, které se od rotačního válce **V** o ose O jen jedenkráte odrazily a to pouze v bodech kružnice K paprskovou kongruenci 6. stupně. Kongruence ta obsahuje ∞^1 ploch affinních k uvažované ploše a veškery tyto plochy obsahují kružnici K a dotýkají se kardioidického válce **C** původně uvažované ploše směrem O opsaného. Z toho patrno, že kongruenčních paprsků spadajících do určité roviny ϱ je šestero, jest to totiž oněch šest tečen, jež lze k průsečné křivce roviny ϱ s válcem **C** průsečnými body kružnice K a roviny ϱ vésti. Libovolným bodem p lze vésti tři tečné roviny válci **C** a v každé z nich leží dva paprsky jdoucí bodem p a protínající kružnici K. I jde libovolným bodem v prostoru rovněž šest paprsků uvažované kongruence, čímž dovozeno, že táž jest 6. stupně.

Konečně, svítí-li celá přímka $\overline{sc}$, a odrážejí-li se paprsky ve všech bodech válce **V**, vytvářejí jednou odražené paprsky velmi specielní komplex, sestávající z veškerých tečen kardioidického válce **C**. Jakého druhu jsou komplexní křivky a kužely, jest patrno z věci samé.

Poznámka o Legendre-Jacobiově symbolu $\left(\frac{P}{Q}\right)$.

Napsal **K. Petr.**

V pojednání „Über eine Darstellung des Legendre'schen Zeichens" (Sitzungsb. der k. Akad. der W. in Wien, Bd. CXIII. Abt. II*a*, 1904) podal *F. Mertens* vyjádření Legendrova sym-