Věta Dandelinova a její applikace.

Napsal prof. **Jaroslav Doležal.**

(Dokončení.)

Můžeme tedy položiti ještě 2 *další podmínky*, aby rovina řezu byla úplně určena.

Jedná-li se však o *řez parabolický daného parametru p*, jest *poloha osy* této paraboly v osovém řezu kužele *určitě stanovena*; obalují pak výslední roviny zcela určitou rotační plochu kuželovou souosou s danou. Má-li tedy v tomto případě úloha býti určitou, nutno položiti ještě jednu podmínku.

Jako další položme si úlohu:

3. **Danou kuželosečkou proložiti rotační kužel dané výšky** d (resp. o daném úhlu osového řezu ω).

Pan prof. *Jos. Kálal* řešil tuto úlohu v 1. čísle roč. XXXVII. tohoto časopisu v článku:

„Společné tečny dvou kuželoseček“ na str. 85. a násl. známým způsobem pomocí stanovení geom. místa vrcholů takových kuželů[2]) danou kuželosečkou proložených.

Pokusíme se rozřešiti předloženou úlohu jiným způsobem.

Budiž $\overline{ab}$ hlavní osa, $\overline{fg}$ ohnisková vzdálenost dané kuželosečky, v vrchol, α úhel při základně, ω úhel při vrcholu osového řezu a d výška kužele; je-li dále p parametr dané kuželosečky, jest dle rovnice (4)

$$d = p \,.\, tg\alpha = p \,.\, cotg\,\frac{\omega}{2},$$

odkudž
$$cotg\,\frac{\omega}{2} = \frac{d}{p},\quad tg\,\frac{\omega}{2} = \frac{p}{d}.$$

Úhel $\frac{\omega}{2}$ lze na základě tohoto výrazu zcela jednoduše zobraziti (obr. 6), i jest pak vrchol v hledaného rotačního kužele průsečíkem přímky $P \,||\, \overline{ab}$ ve vzdálenosti d, obsažené v *hlavní rovině souměrnosti dané kuželosečky* s kruhovým obloukem K nad tětivou $\overline{ab}$ a nad středovým úhlem $asb = 360^0 - 2\omega$, obsaženým v téže hlavní *rovině souměrnosti*.

---

[2]) Viz na př. přednášky prof. K. Pelze z deskriptivní geometrie na české technice.

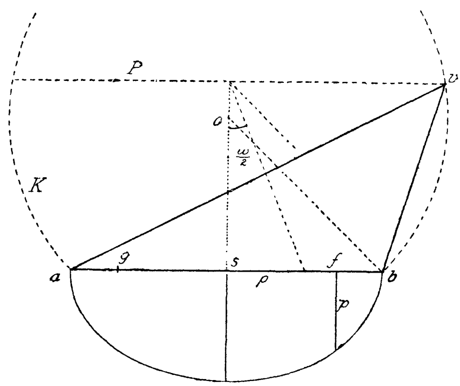
Úloha jest *jednoznačná*, ježto možné 4 výslední kužele jsou *shodny*.

Ještě jednodušší jest řešení, má-li hledaný kužel míti při vrcholu osového řezu *určitý úhel* ω. Potom jest jeho výška d z rov. (4)

$$d = p \cot g \frac{\omega}{2},$$

a konstrukce vrcholu v se shoduje s předešlou.

Obr. 6.



Má-li na př. *ellipsou* $E(a, b)$ proložen býti rotační kužel *pravoúhlý*, vychází z rovnice (4) jeho *výška*

$$v = p \,.\, \cot g\, 45^0 = p = \frac{b^2}{a}.$$

Kdyby se jednalo o kužel *rovnostranný*, pak obdobně

$$v = p \,.\, \cot g\, 30^0 = p \,.\, \sqrt{3} = \frac{b^2\sqrt{3}}{a}.$$

a t. pod.

Vzdálí-li se vrchol kužele v do nekonečna, vznikne rotační válec; svírá-li jeho strana s s rovinou kuželosečky úhel $\gamma = 90^0 - \beta$

(obr. 5.), jest patrně

$$\cos\gamma = \sin\beta = \frac{e}{a},$$

jak uvedli jsme v úloze 2.

Patrno zároveň, ježto $\sin\beta < 1$, že lze *rotační válec proložiti toliko ellipsou.*

Položme si dále za úlohu:

4. Stanoviti osy (parametr) vrženého stínu koule. [1])

Volme při centrálném osvětlení zdroj světla s i střed koule o v průmětně druhé. Koule daná o poloměru r dotýkej se první průmětny v bodu f (ohnisku), a je-li $\overline{kf}$ průměr kolmý ku I. průmětně, již zvolíme za *rovinu vrženého stínu*, jest vržený stín g bodu k druhým ohniskem vrženého stínu; budiž dále $\overline{I\,II} = 2a$ *hlavní osa*, $\overline{III\,IV} = 2b$ *osa vedlejší*, $\overline{fg} = 2e$ *ohnisková vzdálenost*, $p = \frac{b^2}{a}$ *parametr vrženého stínu*, $\sphericalangle\ \omega$ úhel při vrcholu světelného kužele, $\sphericalangle\ \gamma$, $\sphericalangle\ \delta$ úhly při vrcholech I, II trojúhelníka $I\,II\,s$.

Mimo poloměr koule r budiž dána *poloha zdroje světla s* vzdálenostmi: $\overline{sm} = d$ od roviny stínu, a $\overline{so} = s$ od středu koule.

Veďme $\overline{kl} \# \overline{fm}$ i jest (obr. 7.)

$$\triangle\, gfk \sim kls$$

pročež

$$\overline{gf} : \overline{fk} = \overline{kl} : \overline{ls}$$

čili

$$2e : 2r = \sqrt{s^2 - (d-r)^2} : (d - 2r)$$

odkudž ihned

$$e = \frac{r}{d-2r}\sqrt{(s+d-r)(s+r-d)}.$$

Dale, jak patrno z obrazce, jest

$$\overline{fI} = a + e = r\,.\,\mathrm{cotg}\,\frac{\gamma}{2},\ \overline{fII} = a - e = r\,.\,\mathrm{cotg}\,\frac{\delta}{2},$$

pročež

$$b^2 = a^2 - e^2 = (a+e)(a-e) = r^2\,\mathrm{cotg}\,\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\delta}{2}.$$

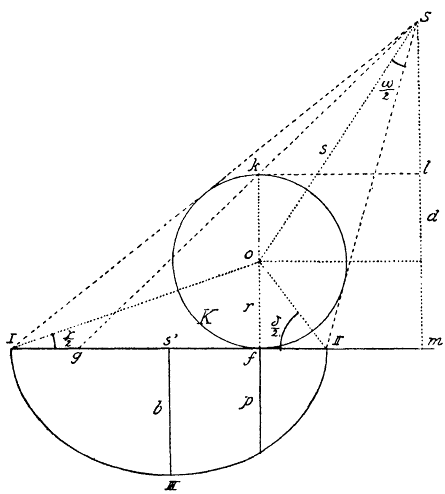
---

[1]) Upozorňujeme zde na pěkný článek o témže thematě od p. prof. V. Hübnera, uveřejněný v tomto časopise, roč. XXXIV.

Však v úloze 2. našich úvah nalezli jsme

$$b^2 = \frac{d^2 \cos^2 \alpha}{\sin(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)} = \frac{d^2 \cdot \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\sin \gamma \sin \delta}.$$

Obr. 7.



Znásobením vychází

$$b^4 = \frac{d^2 r^2 \cdot \sin^2 \frac{\omega}{2}}{4 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \text{ tedy } b^2 = \frac{d\, r \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{2 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\delta}{2}}.$$

Z poslední rovnice vypočteme

$$\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\delta}{2} = \frac{dr}{2b^2} \cdot \sin \frac{\omega}{2},$$

a spojením s druhým výrazem pro b^2

$$\cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\delta}{2} = \frac{b^2}{r^2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\delta}{2} = \frac{d}{2r} \cdot \sin \frac{\omega}{2},$$

načež

$$\cos \frac{\gamma + \delta}{2} = \sin \frac{\omega}{2} = \frac{d}{2} \cdot \sin \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{b^2} \right).$$

tedy

$$2b^2 r = d\,(b^2 - r^2),$$

odkudž posléze

$$b = r\,.\sqrt{\frac{d}{d-2r}}\,.$$

Ježto výraz pro vedlejší poloosu b nezávisí na vzdálenosti zdroje světelného od středu koule, nalézáme tím zajímavou větu:

Zůstává-li výška zdroje světelného nad rovinou vrženého stínu koule stálou, zůstává stálou též vedlejší (imaginárná) poloosa stínu vrženého.

Parametr vrženého stínu

$$p = d\,.\,tg\frac{\omega}{2} = \frac{dr}{\sqrt{s^2 - r^2}} = \frac{dr}{\sqrt{(s+r)\,(s-r)}}\,.$$

Pro *hlavní poloosu* a máme rovnice

$$a = b^2 + e^2,\ a = \frac{b^2}{p}\,,$$

jež vedou k témuž výsledku

$$a = \frac{r}{d-2r}\,.\sqrt{(s+r)\,(s-r)}\,.$$

Aby stín vržený byl *reálným*, stačí vzhledem k výrazům pro a a p, aby bylo

$$s > r,$$

t. j., aby *zdroj světla byl vně koule.*

Je-li $d = 2r$, jest $a = b = e = \infty$, avšak *parametr* stínu

$$p = \frac{dr}{\sqrt{(s+r)\,(s-r)}}$$

zůstává *určitým*; stín vržený jest *parabolický.*

Je-li $d > 2r$, jsou *obě poloosy reálné* a *konečné,* stín vržený jest *elliptický.*

Je-li $d < 2r$, *poloosa vedlejší b stává se imaginárnou,* vržený stín jest *hyperbolický.*

Vzdálí-li se zdroj světla s do nekonečna $d = s = \infty$, nastává případ *osvětlení geometrálného.* Svírá-li v tom případě směr světla s rovinou stínu úhel γ, jest, jak jsme shledali v úloze 3. a 2.,

$$\cos\gamma = \frac{e}{a};$$

poloosa vedlejší

$$b = r \,.\, \sqrt{\frac{d}{d - 2r}} = r \,.\, \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2r}{d}}} = r,$$

a dále

$$b^2 = a^2 - e^2 = a^2 \sin^2\gamma,$$

tedy

$$a = \frac{r}{\sin\gamma}, \quad p = \frac{b^2}{a} = r \,.\, \sin\gamma.$$

Můžeme stanoviti také výraz pro *číselnou výstřednost* ε stínu vrženého. Jest pak

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \sqrt{\frac{(s + r - d)(s - r + d)}{(s + r)(s - r)}};$$

při osvětlení geometrálném

$$\varepsilon = \cos\gamma.$$

Nedotýká-li se koule roviny stínu, a je-li vzdálenost zdroje světla od roviny stínu d', jest nový stín vržený ku předešlému *podobný a podobně položený* vzhledem ku středu světla s. Jsou-li tedy poloosy tohoto nového stínu vrženého a', b', parametr p', výstřednost e', jest patrně

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{e'}{e} = \frac{p'}{p} = \frac{d'}{d};$$

lze tedy délky ty stanoviti užitím nalezených vzorců.

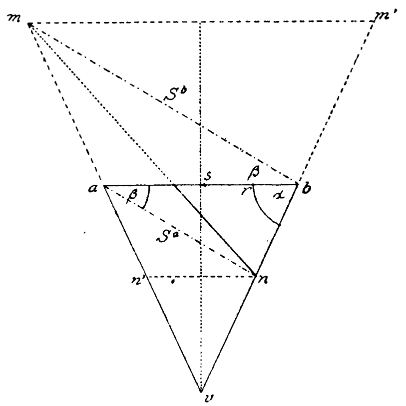
Budiž naší další úlohou:

5. **Stanoviti osy stínu vrženého dovnitř dutého kužele rotačního při osvětlení geometrálném.**

Směr světla S zvolme v II. průmětně, rovnoramenný $\triangle\, abv$ ve II. průmětně nechať jest *osovým řezem* kužele, strana kužele $\overline{av} = \overline{bv} = s$, poloměr kruhové hrany $\overline{ao} = \overline{bo} = r$, úhel strany s rovinou kruhové hrany $\sphericalangle\, vab = vba = \alpha$, úhel směru světla s rovinou kruhové hrany $\sphericalangle\, van = vmb = \beta$.

Jest pak vržený stín n bodu a dovnitř kužele *nejnižším* bodem, vržený stín m bodu b dovnitř kužele (ideální stín) *nejvyšším* bodem vrženého stínu, takže $\overline{mn} = 2a$ jest jeho *hlavní osa.*

Vržený stín oblouku hrany kruhové dovnitř kužele může býti jen *elliptický*, ježto existuje jen při $\sphericalangle\, \beta < \alpha$.



Obr. 8.

Označme dále úseky na stranách obrysových $\overline{vm} = n$, $\overline{vn} = m$ a učiňme $\overline{nn'} \parallel \overline{ab}$, $\overline{mm'} \parallel \overline{ab}$ (obr. 8.), i bude $\overline{mn'} = \overline{m'n} = 2e =$ *ohniskové vzdálenosti elliptického stínu* (řezu), $\triangle\, mn'n$ *pak charakteristickým* $\triangle$ *stínu* (*řezu*).

Z $\triangle\, vna$, vmb vychází, položíme-li

$$\sphericalangle\, vna = \alpha + \beta = \delta, \quad \sphericalangle\, vmb = \alpha - \beta = \gamma,$$

$$m = s \,.\, \frac{\sin\gamma}{\sin\delta}, \quad n = s \,.\, \frac{\sin\delta}{\sin\gamma},$$

tedy

$$m \,.\, n = s^2,$$

a dále

$$n - m = 2e = \frac{s(\sin^2 \delta - \sin^2 \gamma)}{\sin \gamma \sin \delta}$$

$$= \frac{s(\sin \delta + \sin \gamma)(\sin \delta - \sin \gamma)}{\sin \gamma \sin \delta},$$

$$2e = \frac{s \,.\, \sin 2\alpha \sin 2\beta}{\sin(\alpha + \beta) \,.\, \sin(\alpha - \beta)}.$$

V lichoběžníku $mm'nn'$ označme $\overline{mm'} = z_1$, $\overline{nn'} = z_2$, i jest, jak známo,

$$z_1 \,.\, z_2 = (2a)^2 - (2e)^2,$$

tedy

$$b^2 = a^2 - e^2 = \frac{z_1 \,.\, z_2}{4}.$$

Avšak

$$z_1 = 2m \,.\, \cos \alpha, \quad z_2 = 2n \,.\, \cos \alpha,$$

pročež

$$b^2 = mn \cos^2 \alpha = s^2 \cos^2 \alpha,$$

tedy

$$b = s \,.\, \cos \alpha = r.$$

Délka vedlejší poloosy b nezáleží na směru světla. Nalézáme tedy novou zajímavou větu:

Nechať jest směr světelných paprsků jakýkoli, ba dokonce i úhel strany rotačního kužele s rovinou kruhové jeho hrany jakýkoli, jest vedlejší poloosa stínu vrženého obloukem hrany základné dovnitř kužele stálá, a sice rovna poloměru kruhové hrany kužele.

Hlavní poloosu stínu vrženého dovnitř nelze vyjádřiti jednoduchým výrazem; jest

$$a = \sqrt{e^2 + b^2} = s \,.\, \sqrt{\left[\frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{\sin(\alpha + \beta) \,.\, \sin(\alpha - \beta)}\right]^2 + \cos^2 \alpha}.$$