V. Rychlík

O Malfattiho problému. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 2, 245--250

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122398`

O Malfattiho problému.

Napsal **V. Rychlík.**

(Dokončení.)

Výsledek, ke kterému jsme dospěli, je zajisté dosti jednoduchý. Ale methoda, jíž jsme ho dosáhli, dá se stěží nazvati uspokojivou se stanoviska geometrického; prováděli jsme totiž řadu operací algebraických, které nemají vůbec významu geometrického, jimž neodpovídá nic ani v konstrukci ani v důkaze (ten jest vynechán, poněvadž by byl pouhou verifikací, že naše výrazy vyhovují rovnicím, od nichž jsme vyšli).

Kruhy Malfattiovy mají zajímavou vlastnost, která bezprostředně vede ke konstrukci, udané Steinerem. Význam její spočívá v tom, že lze ji, jak týž geometr ukázal, zevšeobecniti tím, že uvažujeme na místě trojúhelníka přímočarého trojúhelník z oblouků kruhových; ale to zde dokazovati nebudeme.

Předem však, než odvodíme tuto vlastnost, uvedeme dvě věty pomocné, jichž důkaz je dosti složitý a rušil by tedy svou délkou souvislost našich úvah. Věty ty ve znění, ve kterém jich potřebujeme, jsou zevšeobecněním vět zcela jednoduchých, a z těchto je lze také odvoditi transformací zvanou inverse. O této transformaci jedná článek p. B. Hostinského „O inversi" v Příloze r. 1905—06; ty z čtenářů, kdo by se jí chtěli více zabývati, odkazuji na onen článek; pro ty však, jimž není tento ročník Přílohy přístupný, zrekapituluji stručně nejdůležitější věty o inversi, pomocí jichž důkaz potřebných vět lze zcela provésti.

Spojíme-li každý bod A_1 jistého útvaru α_1 s pevným bodem S paprskem SA_1, a na tomto paprsku určíme bod A_2 tak, že $\overline{SA_1} \,.\, \overline{SA_2}$ je veličina stálá, tvoří souhrn bodů A_2 jistý útvar α_2, který nazýváme inversním k α_1. Pevný bod S nazýváme středem inverse, stálý součin $\overline{SA_1} \,.\, \overline{SA_2}$ mocností inverse. Dle toho, je-li mocnost kladná nebo záporná, musíme bráti úsečky $\overline{SA_1}$, $\overline{SA_2}$ ve směru stejném nebo protivném.

Jsou-li dva obrazce inversní k třetímu dle téhož středu, ale různých mocností, jsou si navzájem podobny a podobně položeny. Je totiž

$$\overline{SA_1} \,.\, \overline{SA_2} = c_1, \quad \overline{SA_1} \,.\, \overline{SA_3} = c_2$$

tudíž

$$\overline{SA_2} : \overline{SA_3} = c_1 : c_2.$$

Jsou tedy paprsky k stejnolehlým bodům A_2, A_3 úměrné; a úhly mezi nimi jsou rovné, jsouce buď totožné nebo vrcholové.

Útvarem inversním k přímce procházející středem inverse je přímka ta sama.

Útvarem inversním k přímce středem inverse neprocházející je kruh, který prochází středem inverse. Abychom to dokázali, spusťme ze středu inverse kolmici na přímku $\overline{SA_1}$, sestrojme k patě této kolmice A_1 bod inversní A_2, tak že $\overline{SA_1} \,.\, \overline{SA_2} = c$, a opišme nad průměrem $\overline{SA_2}$ kruh; ten je hledaným útvarem inversním k přímce. Neboť pro každý jiný bod přímky B_1 je průsečík paprsku SB_1 s kruhem B_2 bod k B_1 inversní, jak vyplývá z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $\triangle SA_1B_1 \sim \triangle SB_2A_2$; pak je totiž $\overline{SA_1} \,.\, \overline{SA_2} = \overline{SB_1} \,.\, \overline{SB_2} = c$.

Inversním útvarem ke kruhu procházejícímu středem inverse je přímka kolmá na průměr kruhu jdoucí středem inverse.

Inversním útvarem kruhu, neprocházejícího středem inverse, je opět kruh. Je-li mocnost inverse rovna mocnosti středu inverse vzhledem ke kruhu, je kruh sám k sobě inversní, neboť inversí přejdou v sebe průsečíky paprsku jdoucího středem inverse. Je-li mocnost inverse jiná, užijeme první z uvedených vět. Daný kruh budeme pokládati za inversní sám k sobě (to je možno), hledaný útvar je k témuž kruhu inversní dle jiné mocnosti; je tedy dle oné věty hledaný útvar kruh podobně ležící k danému, a střed inverse je středem podobnosti.

Další důležitá vlastnost inverse je, že se jí úhly nemění. Dvě přímky svírají týž úhel, jako kruhy k nim inversní. Jsou totiž tečné ve středu inverse na kruhy vedené rovnoběžné s přímkami, neboť průměry kruhů stojí kolmo na přímkách. Rovněž i dva kruhy protínají se pod týmž úhlem jako kruhy k nim inversní. Abychom to seznali, sestrojíme kruhy, které procházejí středem inverse a dotýkají se daných kruhů v průsečíku. Po inversi tyto kruhy přejdou v tečné v průsečíku kruhů transformovaných, jež tedy svírají týž úhel jako tyto kruhy a jako tečné kruhů původních.

Pro geometrii kruhu mají svazky kruhů podobně důležitý význam, jako svazek přímek pro geometrii přímky, a bylo by možno též analogicky definovati svazek kruhů jako souhrn všech kruhů procházejících dvěma body. Ale tu narazíme na obtíž; dva reálné kruhy neprotínají se vždy, může se státi, že průsečíky jejich jsou, jak říká analytická geometrie, imaginární. I v tomto případě je však reálnou přímka, která spojuje oba průsečíky, chordála, a mocnost jejího bodu vzhledem ke všem kruhům svazku je táž. Můžeme tedy definovati svazek jako soustavu kruhů, jež mají společnou chordálu.

Opíšeme-li kol bodu chordály kruh, který protíná jeden z kruhů svazku v pravém úhlu, protne tento kruh všechny kruhy svazku v pravém úhlu. A všechny kruhy takto sestrojené tvoří opět svazek, jehož chordálou je středná kruhů svazku původního. Protínaly-li se kruhy svazku původního, neprotínají se kruhy svazku orthogonálního, a naopak; dotýkaly-li se kruhy svazku původního chordály, dotýkají se kruhy svazku orthogonálního původní středné.

Pomocí inverse můžeme každý svazek, jehož kruhy se protínají, převésti ve svazek přímek, každý svazek, jehož kruhy se neprotínají, na soustavu kruhů soustředných (již tedy lze pokládati též za svazek), konečně svazek kruhů se dotýkajících na soustavu rovnoběžek. K tomu stačí položiti v prvém a třetím případě střed inverse do společného bodu kruhů, v druhém do průsečíku kruhů orthogonálních k daným. Inversí totiž přejde v druhém případě svazek kruhů v soustavu kruhů, které protínají svazek přímek v pravém úhlu, a to jsou kruhy soustředné.

Nyní snadno dokážeme věty pomocné, jichž užijeme později. První je věta:

Dotýkají-li se dva kruhy dvou daných kruhů, leží body dotyku na kružnici.

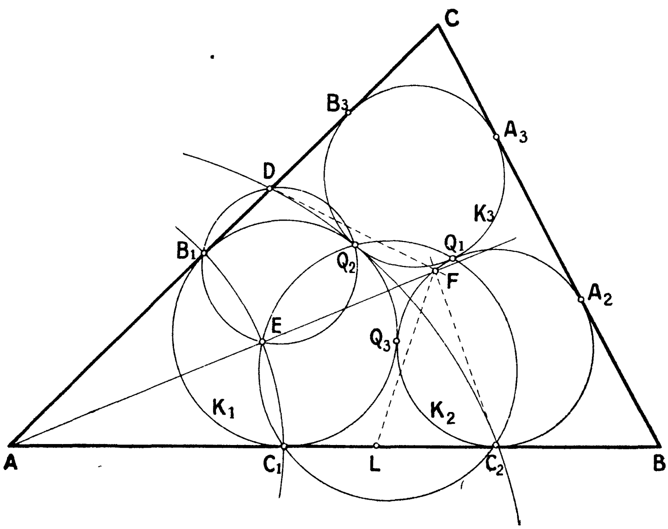
Druhá věta zní:

Všechny kruhy, které se dvou daných kruhů dotýkají v témž smyslu, protínají každý kruh svazku definovaného danými kruhy ve stejném úhlu.

Inversí totiž převedeme tyto věty na jejich speciální případy, kdy dané kruhy degenerují na přímky, nebo jsou soustředné; a pak ty věty jsou tak jednoduché, že netřeba jich zvláště dokazovati.

Přistoupíme nyní k vlastní úloze, dokázati větu: Společné tečné kruhů Malfattiových dotýkají se každá dvou kruhů vepsaných do trojúhelníků, na které se daný trojúhelník rozpadá symmetrálami úhlů.

Zachovávajíce označení obrazce 1. sestrojme kruh, který dotýká se kruhů K_1 a K_3 v bodu Q_2 a prochází bodem C_2.



Obr. 2.

Tento kruh protíná dle druhé věty pomocné všechny kruhy, které se K_1 a K_3 zevně dotýkají, ve stejném úhlu, tedy i stranu AC, kruh K_2 a stranu AB, jež se kruhu K_2 v bodu C_2 dotýká. Označíme D průsečík tohoto kruhu pomocného se stranou AC a sestrojíme v bodech C_2 a D k němu tečny, jež se protnou v bodu F. Pak je $\sphericalangle CDF = \sphericalangle AC_2F$.

Na straně AB najdeme bod L tak, že $\sphericalangle FLC_2 = \sphericalangle FC_2L$. Pak je $\triangle ADF \cong \triangle ALF$ dle třetí věty; z toho je patrno, že paprsek AF rozpoluje $\sphericalangle BAC$.

Poněvadž ve čtyřúhelníku AC_2FD je součet dvou úhlů $\sphericalangle ADF + \sphericalangle AC_2F = \pi$, je úhel $DFC_2 = \pi - \alpha$. Náleží tudíž k oblouku DC_2 kruhu DQ_2C_2 středový úhel α, a obvodový úhel je tedy $\sphericalangle DQ_2C_2 = \pi - \frac{\alpha}{2}$. Z toho plyne

$$\sphericalangle ADQ_2 + \sphericalangle AC_2Q_2 = 2\pi - \left(\pi - \frac{\alpha}{2} + \alpha\right) = \pi - \frac{\alpha}{2}.$$

Dle první věty pomocné leží body $C_1C_2Q_1Q_2$ na kruhu.

Veďme ještě kruh body B_1DQ_2. Ten nechť protíná kruh $C_1C_2Q_1Q_2$ kromě bodu Q_2 v bodu E. Pak je

$$\begin{aligned}\sphericalangle B_1EC_1 &= 2\pi - (\sphericalangle B_1EQ_2 + \sphericalangle C_1EQ_2)\\ &= 2\pi - (\pi - \sphericalangle B_1DQ_2 + \pi - \sphericalangle C_1C_2Q_2)\\ &= \sphericalangle B_1DQ_2 + \sphericalangle C_1C_2Q_2 = \pi - \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

To je však obvodový úhel příslušný středovému úhlu α; poněvadž je $AB_1 = AC_1$, leží bod E na kruhu kol A poloměrem AB_1 opsaném.

Kruh $C_1C_2Q_1Q_2$ protíná přímky AB a AE ve stejném úhlu, neboť $AC_1 = AE$. Dále protíná i AB a kruh DQ_2C_2 v rovných úhlech, neboť v průsečících se obě tyto čáry dotýkají kruhu K_1. A poněvadž se C_2F kruhu DQ_2C_2 dotýká v bodu C_2, je úhel, ve kterém kruh $C_1C_2Q_1Q_2$ přímku C_2F protíná, rovněž roven úhlu, ve kterém protíná AB.

Podobně kruh Q_2DB_1 protíná v tomtéž úhlu všechny kruhy, jež se v Q_2 navzájem dotýkají, a tedy je protíná v druhých průsečících v rovných úhlech, a to kruh K_1, a tedy i stranu AC v bodu B_1, a kruh C_2Q_2D a jeho tečnu DF v bodu D. Protože je $AE = AB_1$, protíná ve stejném úhlu též přímky AC a AE.

Z toho vyplývá, že AE prochází bodem F, t. j. že je to symmetrála úhlu CAB. Kdyby totiž přímka AE bodem F neprocházela, protínala by na př. DF v bodu H a prodlouženou C_2F v bodu G, a tyto body byly by od F různé, tvoříce trojúhelník FGH. Pak vyplývá z rovnosti úhlů, v nichž C_2G a EG protínají kruh $C_1C_2Q_1Q_2E$

$$C_2G = EG$$

podobně z rovnosti úhlů, v nichž DH a EH protínají kruh Q_2DB_1E

$$DH = EH.$$

Konečně tečné kruhu DQ_2C_2 jsou si rovny

$$C_2P = DF.$$

Bylo by tedy

$$C_2G = C_2F + FG = DF + FG = EG.$$

Ale tu je

$$DF = DH + HF$$
$$EG = EH + HG.$$

Dostali bychom tudíž rovnici

$$HF + FG = HG$$

mezi stranami trojúhelníka HFG, jehož úhel HFG je jistě od 0 a π různý, což je nemožno, nesplývají-li body H, G s bodem F, jak jsme tvrdili.

Dospěli jsme tudíž k tomu výsledku, že kruh $C_1C_2Q_1Q_2$ protíná v rovných úhlech stranu AB, symmetrálu úhlu BAC a tečné kruhů K_3K_2 a K_3K_1 v bodech Q_1, Q_2. Kdybychom v úvaze vyměnili body C_1Q_1 s body C_2Q_2, dospěli bychom toutéž cestou k tomu, že i úhel, ve kterém kruh $C_1C_2Q_1Q_2$ protíná symmetrálu úhlu ABC, je roven úhlu, v němž protíná stranu. Sestrojíme-li tedy kruh s tímto kruhem soustředný, jenž se jedné z těchto přímek dotýká, bude se dotýkati všech. Ale pak bude vepsán trojúhelníku ABM (kde M značí střed kruhu vepsaného do $\triangle ABC$).

Provedeme-li podobnou úvahu pro druhé dvě strany trojúhelníka, seznáme, že společná tečná kruhů K_2K_3 v bodu Q_1 dotýká se i kruhu vepsaného do $\triangle ABM$ i do $\triangle ACM$. Se symmetrálou, která se též těchto kruhů dotýká, obecně tato tečná totožna není, je to tedy druhá společná tečná těchto kruhů. A to je věta, kterou jsme chtěli dokázati. Konstrukce i důkaz plynou z rozboru.