Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vincenc Jarolímek

Drobnosti z planimetrie a mathem. zeměpisu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 2, 257--264

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122396

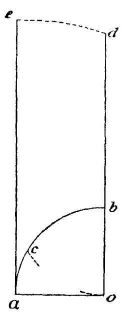
Drobnosti z planimetrie a mathem. zeměpisu.

Podává prof. V. Jarolímek.

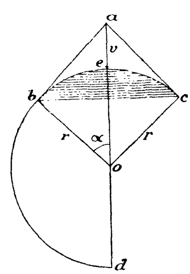
1. Ještě jedna přibližná rektifikace kružnice.

Obr. 1. Učiňme $\overline{ae} \parallel \overline{od} \perp \overline{oa} = r$, $\overline{bc} = r$, $\overline{bd} = 2r$, a ze středu c opišme kruhový oblouk $\widehat{de}$. Úsečka $\overline{ae} = \pi r$ přibližně. Výpočet dá

$$\overline{ae} = \frac{r}{2}\sqrt{21 + 4\sqrt{3}} = 3\text{·}14235\ldots r,$$



Obr. 1.



Obr. 2.

tak že chyba 0·00076 r i pro $r = 100$ *mm* (kružnice zajisté maximální při rýsování na papíře) toliko 0·076 *mm* v poloobvodě je pro praxi zcela bezvýznamná, jiż daleko převyšují chyby zaviněné nedokonalostí rýs. náčiní a zraku. Proto může naše konstrukce dobře konkurovati s obvyklými (prof. Tilšer, Desk. geom. p. 40., prof. Šrůtek, Čas. math. XXI., 83, prof. Pleskot, Čas. math. XXII., 152 a j.), ježto mnohé z nich svou jednoduchostí i předčí.

2. Dálka viditelného obzoru mořského.

Obr. 2. Přibližný výsledek obdržíme snadno dle jednoduchého vzorce

$$\alpha^0 = \sqrt{v}, \tag{1}$$

kdež $\overline{ae} = v$ je nadmořská výška pozorovatelova a vyjádřená v kilometrech, α pak již dálka č. sférický poloměr $\widehat{eb}$ viditelného obzoru v míře stupňové. V kilometrech bude pak

$$\widehat{eb} = \varrho = 111\,\alpha$$

pro kulový tvar země o středním poloměru.

Příklady:

v	4	2·25	1	0·1	0·01	0·001	kilom.
α	2	1·5	1	0·316	0·1	0·0316	stupně
ϱ	222	166·5	111	35·1	11·1	3·51	*km*
chyba	3·3	2·5	1·7	0·9	0·3	—	*km*

Hodnoty chyby udávají rozdíl mezi výpočtem trigonometrickým

$$\cos\alpha = \frac{r}{r + v}$$

pro $r = 6370$ *km* (který ovšem dává výsledek také jen přibližný) a hořejším ϱ. Tato chyba relativně nepatrná je pro skutečnost bez významu, protože pruh zšíří 1 — 3 *km* na samém obzoru ležící, pozorovaný ze vzdálenosti 11, resp. 150 *km*, jeví se oku pouhou čarou, tak že na př. loď, nacházející se právě na obzoru, nezapadne znatelně pod obzor, vzdálí-li se od oka o 1 *km*. Je-li paluba lodi na př. 10 metrů nad hladinou moře, zapadne loď (dle naší tabulky $v = 0·01$) pod obzor teprve tehdy, až vzdálí se za obzor na 11 *km*.

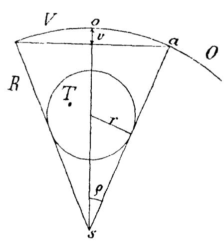
Mimo to vzorec $\alpha = \sqrt{v}$ má tu přednost, že i pro velmi malé výšky v (nízké pobřeží) dává dosti přesný výsledek, kdežto naše školní logarithmické tabulky pro tak malé úhly (α) nestačují.

Ke vzorci tomu dospěli jsme touto úvahou. Za oblouk $\varrho = \widehat{eb}$ můžeme položiti přibližně tečnu $\overline{ab}$ (obr. 2.), tak že $\varrho^2 = \overline{ae} \,.\, \overline{ad}$, tedy $= \sqrt{v(2r - v)}$; ale v^2 je proti $2rv$ velmi nepatrné, pročež lze položiti $\varrho = \sqrt{2rv} = \sqrt{12740\,v} = 112\sqrt{v}$, čili $\alpha^0 \doteq \sqrt{v}$. Vzorec $\varrho = 113\sqrt{v}$ dal by výsledek ještě přesnější.

3. Kterak měřiti plochy na obloze.

V pojednání dra. Augusta *Seydlera* (od r. 1881—1891 professora theoretické fysiky a astronomie na české universitě) „O slunečném teple a světle“, uveřejněném roku 1885 v „Osvětě“, čteme na str. 865:

„Kdybychom s povrchu slunce rozhlíželi se po obloze, spatřili bychom mezi jinými hvězdami malý kotouček (prostým zrakem ovšem pouhý světlý bod), jichž by 2250 milionů bylo potřebí, aby byl jimi pokryt celý povrch oblohy. Kotouček ten — toť naše země; k ní druží se ještě několik podobných kotoučků — oběžnic, jež souhrnem pokrývají as desetkráte větší plochu. Z toho následuje, že jen 225,000.000tá část paprsků



Obr. 3.

světelných a teplových sluncem vyzářených v naší soustavě planetárné se zachycuje, a potřebám soustavy této se věnuje, kdežto ostatní ohromné množství oné zářící energie do nezměrných vzdáleností, do pustého prostoru světového prchá a na zmar přichází.“

Namítají se tu mimovolně otázky: 1. jak vypočítá se číslo uvedené, a 2. jak měřiti vůbec a srovnávati různé plochy na obloze? Úlohu prvou řešíme takto (obr. 3.). Představme si oblohu plochou kulovou O, jejíž poloměr R je nesmírně veliký, a v středu jejím s pozorovatele, který z oka svého těla nebeská na oblohu O promítá. Tak na př. koule T promítne se na O do kulového vrchlíka V, který nazvati lze také „sférickým kruhem“, jehož sférickým středem jest bod o a oblouk $\widehat{oa}$ sférickým poloměrem. Poměr plochy V k povrchu celé koule O

jest dle známého pravidla stereometrického

$$\frac{V}{O}=\frac{v}{2R},$$

je-li v výška vrchlíka. Avšak $v = R - R \cos \varrho$, kdež ϱ je zdánlivý poloměr koule T; jest tedy

$$\frac{V}{O}=\frac{1-\cos \varrho}{2}=\sin^2 \frac{\varrho}{2}. \tag{2}$$

Zorný úhel ϱ, kterým se vidí poloměr r Země T s místa s, slove *denní parallaxou* místa s, tedy na př. parallaxou Slunce, je-li s jeho střed. Střední hodnota této parallaxy (ježto vzdálenost Země od Slunce čili průvodič elliptické dráhy Země se mění) dle Newcomba $\varrho = 8{\cdot}80''$, tudíž

$$\frac{V}{O}=\sin^2 4{\cdot}4''.$$

Pro tak malý úhel lze sinus nahraditi obloukem; ježto pak

$$\operatorname{arc} 4''{\cdot}4 = 0{\cdot}000021331802\ldots,$$

bude

$$\frac{V}{O}=0{\cdot}000000000455045\ldots,$$

tudíž

$$\frac{O}{V}\doteq 2197,580000.$$

Větší poněkud číslo Seydlerovo odpovídá střední parallaxe Slunce $8''{\cdot}7$, kdežto nověji byla tato stanovena hodnotou $8{\cdot}80''$.

Také druhá otázka zodpověděna jest rovnicí (2), béřeme-li celou oblohu (povrch *celé* koule světové) za jednotku, a má-li plocha zdánlivý tvar kruhu.

Tak na př. pro kotouč Slunce při střední vzdálenosti od Země, na níž předpokládáme pozorovatele (v této úloze jest na obr. 3. s Země, T Slunce, ϱ zdánlivý jeho poloměr), jest $\varrho = 16'$, tedy

$$\frac{V}{O}=\sin^2 8' = 0{\cdot}0000054154l\ldots,$$

neboli

$$\frac{O}{V}=18465{\cdot}8,$$

číslo, které udává, kolikrát jest celá obloha větší, nežli zdánlivá velikost Slunce.

Poměr dvou různých kotoučů jest

$$V_1 : V_2 = sin^2 \frac{\varrho_1}{2} : sin^2 \frac{\varrho_2}{2}. \qquad (3)$$

Na př. pro $\varrho_1 = 10^0$, $\varrho_2 = 20^0$ obdržíme

$$V_1 : V_2 = 0{\cdot}0075961 : 0{\cdot}030157$$
$$= \quad 1 : 3{\cdot}9696,$$

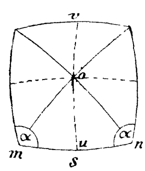
pro $\varrho_1 = 30^0$, $\varrho_2 = 60^0$

$$V_1 : V_2 = 1 : 3{\cdot}73205,$$

a pro $\varrho_1 = 45^0$, $\varrho_2 = 90^0$ (polokoule č. viditelná část oblohy)

$$V_1 : V_2 = 1 : 3{\cdot}41421 = 1 : (2 + \sqrt{2});$$

zdvojnásobí-li se tedy (zdánlivý č. sférický) poloměr kruhu, nezvětší se zdánlivá plocha čtyřikráte, a poměr $V_2 : V_1$ zmenšuje



Obr. 4.

se s rostoucím poloměrem. Okolnost tato vysvětluje se tím, že dvě plochy ležící na *téže* ploše kulové (tedy i dva vrchlíky), nejsou-li shodny, nemohou být geometricky sobě podobny.

Podobné plochy sférické musí ležeti na dvou *různých* koulích, jichž poloměry jsou v témž k sobě poměru, jako kterékoli dva stejnolehlé sférické rozměry obou ploch. —

Bude však případnější, učiniti měrou ploch sférických místo povrchu celé koule toliko malou část jeho, na př. *sférický čtvereční stupeň Č.* Jest to čtyřúhelník (obr. 4.), jehož každá strana $\widehat{mn} = s = 1^0$, úhly pak α jsou stejné, ale ovšem tupé. Úhlopříčkami rozdělí se $Č$ ve čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky pravoúhlé. V $\triangle$ *mno* jest

$$cos\ s = cotg^2 \frac{\alpha}{2}, \qquad (4)$$

tedy

$$cotg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{cos\, 1^0} = 0{\cdot}999847695156\ldots,$$

pročež

$$\frac{\alpha}{2} = 45^0\, 0'\, 7{\cdot}854380'' \ldots$$

a celý úhel čtverce

$$\alpha = 90^0\, 0'\, 15{\cdot}70876'' \ldots \tag{5}$$

Plocha $\triangle\, mno$

$$\frac{Č}{4} = \pi R^2 \,.\, \frac{\alpha^0 - 90^0}{180^0},$$

tedy poměr $Č$ k celému povrchu koule

$$\frac{Č}{O} = \frac{\alpha^0 - 90^0}{180^0} = 0{\cdot}0000242419147\ldots, \tag{6}$$

dosadíme-li hodnotu α z rovnice (5).

Naopak jest tudíž v povrchu koule obsaženo sférických čtverečních stupňů

$$\frac{O}{Č} = 41250{\cdot}86694406\ldots \tag{7}$$

Plocha libovolného čtverce sférického o straně s_1 a úhlu α_1 bude pak

$$\frac{P_1}{O} = \frac{\alpha_1^0 - 90^0}{180^0}, \tag{8}$$

kdež

$$cotg \frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{cos\, s_1^0}. \tag{9}$$

Násobíme-li posléze hodnotu (8) číslem (7), obdržíme plochu P_1 vyjádřenou ve sfér. čtverečních stupních. Pro $s_1 = 10^0$ na př. dostaneme dle rovnice (9) $\alpha_1 = 90^0\, 26'18''$, dle (8)

$$\frac{P_1}{O} = 0{\cdot}00243518\ldots$$

a z rovnice (7) posléze

$$P_1 = 100{\cdot}45\, Č.$$

Je pozoruhodno, že číslo toto jest o něco větší, nežli s_1^2. Vůbec jest poměr dvou sférických čtvercův o stranách s_1, s_2 a úhlech α_1, α_2,

$$P_1 : P_2 = (\alpha_1 - 90^0) : (\alpha_2 - 90^0).$$

Pro $s_1 = 10^0$, $s_2 = 20^0$ bude $P_1 : P_2 = 1 : 4{\cdot}0646$,
„ „ 30^0, „ 60^0 „ „ $= 1 : 4{\cdot}729$,
„ „ 45^0, „ 90^0 „ „ $= 1 : 9{\cdot}1098$,

tak že poměr vzrůstá *více* než dvojmoc strany, zdvojnásobujeme-li tuto.

Obdobně počítají se i plochy jiných tvarů. Jde-li na př. o libovolný sférický trojúhelník, jehož úhly jsou α, β, γ, sférický excess $\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - 180^0$, jest

$$\frac{P}{O} = \frac{\varepsilon}{720},$$

což znásobeno číslem (7) dá plochu sfér. trojúhelníka

$$P = 57{\cdot}2928707556 \ldots \varepsilon$$

sférických stupňů čtverečních.

Plocha sférického kruhu o sfér. poloměru ϱ bude dle (2)

$$\frac{P}{O} = sin^2 \frac{\varrho}{2}.$$

Pro Slunce pozorované se Země vypočítali jsme na str. 260.

$$\frac{P}{O} = sin^2 8' = 0{\cdot}00000541541 \ldots,$$

což znásobeno (7) dá

$$P = 0{\cdot}22339 \ldots Č.$$

Přibližně touž velikost má Měsíc pozorovaný se Země. Naproti tomu Země s Měsíce jeví se, ježto střední parallaxa Měsíce $\varrho = 58'$, plochou

$$\frac{P}{O} = 0{\cdot}0000711603 \ldots$$

čili

$$P = 2{\cdot}93542\ Č,$$

tedy bezmála tří stupňů čtverečních. —

Konečně budiž připomenuto, že plochu kulovou na sfér. čtverečné stupně Č spojitě rozděliti nelze, ano že ani čtyři Č nelze připojiti k sobě okolo společného vrcholu, aniž by se částečně pokrývaly, neboť zajisté součet úhlův okolo tohoto vrcholu dle rovnice (5) $= 4\alpha > 360^0$. Avšak ani kulový pás nelze složiti z ploch Č. Klademe-li je na kouli do řady za sebou tak, aby střední příčky připadly na hlavní kružnici koule, nevejde se jich na obvod 360, nýbrž toliko 359 se zbytkem $z <$ Č. Příčinou toho jest, že střední příčka $\widehat{vu} = p$ (obr. 4.) v Č jest delší než strana $\widehat{mn} = s = 1^0$. Jest totiž v $\triangle$ *mou*

$$\sin\frac{p}{2} = tg\frac{s}{2} \cdot cotg\, 45^0 = tg\, 0^0 30',$$

z čehož

$$\frac{p}{2} = 0^0\, 30'\, 0{\cdot}0685'',$$

tedy

$$p = 1^0\, 0'\, 0{\cdot}137'',$$

posléze

$$360\, p = 360^0\, 0'\, 49{\cdot}3'',$$

t. j. 360 Č vyplní pás celý, avšak poslední Č pokryje již malou část Č prvého. Mimo to meze pásu toho nemají tvar kružnic, nýbrž čar lomených. —

Sférický čtverec (obr. 4.) nerozdělí se středními příčkami ve čtyři sférické čtverce, nýbrž ve čtyřúhelníky, z nichž každý má tři úhly pravé, čtvrtý však tupý, α dle rovnice (5). —

Plochu kulovou lze rozděliti přesně a spojitě toliko na 6 shodných sférických čtverců, jež obdržíme, vepíšeme-li do koule krychli a promítneme-li stěny krychle na povrch koule ze středu jejího. Strana každého čtverce $s = 70^0 31' 43''$, ježto $\cos s = \frac{1}{3}$, a každý úhel jeho $\alpha = 120^0$.

O přenášení energie do dálky.

Napsal prof. Dr. **F. Pietsch.**

Naše doba jest dobou úžasného vývoje věd přírodních. Od vynálezu parního stroje, jeví se překotný vývoj v upotřebení sil přírodních takže se zdá, že lidstvo chce dohonit vše, co po staletí zanedbávalo. Přímo závratnou rychlostí pokračovala nauka