Vincenc Jarolímek

Jak strojiti plochu druhého stupně danou sedmi rovinami tečnými a dotyčným bodem v jedné z nich

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 1, 24--28

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122387`

kde X, Y, Z značí cosiny úhlů normály plochy, jsme vedeni na rovnici pro určení ξ, η, ζ tvaru

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}=2k\,(1+2f^2)\,\Theta;$$

3. partikulárná řešení lineárně neodvislá dávají ξ, η, ζ, z nichž určí se souřadnice x, y, z vztahy

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\begin{vmatrix}\eta, & \zeta\\ \frac{\partial\eta}{\partial v}, & \frac{\partial\zeta}{\partial v}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\begin{vmatrix}\eta, & \zeta\\ \frac{\partial\eta}{\partial u}, & \frac{\partial\zeta}{\partial u}\end{vmatrix}.$$

Jak strojiti plochu druhého stupně danou sedmi rovinami tečnými a dotyčným bodem v jedné z nich.

Od prof. **Vinc. Jarolímka.**

K řešení této úlohy jest třeba několika vět z geometrie polohy, jež klademe v čelo své úvahy.

Z theorie *svazku kuželoseček,* jenž dán buď základními body a, b, c, d, známa jest věta:

α) *Přímky, z nichž každá prochází jedním základním bodem, protínají kuželosečky svazku v bodových řadách projektivných.* Body homologické leží na téže kuželosečce. Procházejí-li na př. přímky P_1, P_2 dvěma *různými* základními body svazku, P_1 bodem a, P_2 bodem b, protínají se svazkem kuželoseček v řadách *perspektivných*; majíť tyto samodružný bod v průsečíku (P_1P_2), jímž, jako každým bodem vůbec, prochází také určitá křivka svazku. Střed perspektivný leží na spojnici ostatních dvou bodů základních $\overline{cd}$.

Procházejí-li však přímky P_1, P_2 *týmž* bodem základním, jsou řady jejich toliko prostěprojektivné, nikoli perspektivné, leč by v tom bodě dva základní body se sjednocovaly, na př. $a\equiv b$, tedy všecky křivky svazku v něm navzájem se dotýkaly.

β) Duální pak věta, platná pro *osnovu* kuželoseček, jest tato:

Z bodů, z nichž každý leží na jedné základně osnovy kuželoseček, promítají se tyto křivky paprskovými svazky projektivnými. Paprsky homologické dotýkají se téže kuželosečky. Buďtež přímky A, B, C, D základnami osnovy, jichž kuželosečky se dotýkají, na základně A kdekoli bod p_1, na základně B bod p_2. Kterákoli kuželosečka osnovy „promítá se" z bodu p_1 dvěma tečnami A, E_1 (vlastně jich úhlem) a z bodu p_2 tečnami B, E_2; jiná křivka tečnami A, F_1 resp. B, F_2 atd. Svazky $p_1 (E_1 F_1 \ldots) \barwedge p_2 (E_2 F_2 \ldots)$. Jsou-li body p_1, p_2 na základnách *různých*, jsou svazky p_1, p_2 *perspektivné*, majíce samodružný paprsek $\overline{p_1 p_2}$, jehož se také (jako každé přímky vůbec) určitá křivka osnovy dotýká. Protínají se tudíž homologické paprsky v bodech $(E_1 E_2)$, $(F_1 F_2) \ldots$, jež leží na jedné přímce P, ose perspektivní, která prochází průsečíkem základen (CD), (na nichž body p_1, p_2 neleží).

Vytkneme-li body p_1, p_2 na *téže* základně, zůstane projektivnost $p_1 \barwedge p_2$ v platnosti, nikoli však perspektivnost.

γ) Promítneme-li tyto útvary z libovolného bodu s v prostoru, bude promítkou osnovy kuželoseček *osnova kuželových ploch druhého stupně*, jež majíce společný střed s, dotýkají se čtyř pevných rovin $(sA) \equiv \alpha$, $(sB) \equiv \beta$, $(sC) \equiv \gamma$, $(sD) \equiv \delta$, procházejících týmž bodem s. Roviny ty slovou *základnami* osnovy. Věta β) applikovaná na tento útvar zní pak takto:

Z paprsků, z nichž každý, procházeje středem osnovy kuželů, leží na jedné základně osnovy, promítají se tyto kužele rovinovými svazky projektivnými; roviny homologické jsou tečnými k témuž kuželi. Dána-li tedy osnova kuželů rovinami α, β, γ, δ, jež procházejí týmž bodem s, a vytkneme-li v rovině α paprsek sP_1, v rovině β paprsek sP_2, procházejí ke každému kuželi osnovy přímkou P_1 dvě tečné roviny α, ε_1 a přímkou P_2 tečné roviny β, ε_2; k jinému kuželi tečné roviny α, φ_1, resp. β, φ_2 atd. Svazky $P_1 (\varepsilon_1 \varphi_1 \ldots) \barwedge P_2 (\varepsilon_2 \varphi_2 \ldots)$. Jsou-li přímky P_1, P_2 v základnách *různých*, na př. α, β, jsou svazky rovinové P_1, P_2 *perspektivné*, majíce samodružnou rovinu $\overline{(P_1 s P_2)}$. Protínají se tudíž homologické roviny v přímkách $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, $\varphi_2 \varphi_2, \ldots$, jež ležíce v jedné rovině π, vyplňují svazek paprskový o středu s. Rovina perspektivní π prochází průsečnicí základen $\overline{\gamma\delta}$ (na nichž přímky P_1, P_2 neleží).

Vytkneme-li přímky P_1, P_2 na *téže* základně, zůstane projektivnost $P_1 \barwedge P_2$ v platnosti, perspektivita však se zruší (vyjímaje případ, kdy dvě základny s rovinou P_1P_2 splývají).

Přistupme nyní k řešení úlohy svrchu vytčené.

Plocha druhého stupně φ^2 buď dána tečnými rovinami α, β, γ, δ, ε, φ, τ a dotyčným bodem u v rovině τ. Stanovme průsečíky rovin $(\alpha\beta\tau) \equiv x$, $(\gamma\delta\tau) \equiv y$, $(\varepsilon\varphi\tau) \equiv z$ a jejich spojnice $\overline{yz} \equiv X$, $\overline{xz} \equiv Y$, $\overline{xy} \equiv Z$, $\overline{xu} \equiv P$, $\overline{yu} \equiv N$, $\overline{zu} \equiv M$. Z bodů x, y, z promítá se plocha φ^2 tečnými kuželi $\varkappa$, λ, μ, jež procházejí bodem u. Kužel $\varkappa$ dotýká se rovin α, β, τ (této podél přímky P); kužel λ dotýká se rovin γ, δ a roviny τ podél N, kužel μ rovin ε, φ a roviny τ podél M. Přímkou Z jdou ku ploše φ^2 dvě tečné roviny τ, ζ, jichž také kužele $\varkappa$, λ dotýkati se musí; přímkou Y jdou ku φ^2 tečné roviny τ, η, jichž dotýkají se kužele $\varkappa$, μ; a přímkou X jdou ku φ^2 tečné roviny τ, ξ, jichž dotýkají se i kužele λ, μ. Rovinami ξ, η, ζ budou kužele $\varkappa$, λ, μ stanoveny (na př. kužel $\varkappa$ tečnými rovinami α, β, ζ, τ a dotyčnou površkou P v rovině τ), a jimi bude i úloha rozřešena.

Kuželové plochy 2. stupně o společném vrcholu x, jež dotýkají se rovin α, β, a roviny τ podél přímky P (k nimž náleží i plocha $\varkappa$), tvoří osnovu, jejíž dvě základní roviny splývají ($\equiv \tau$). Plochy tyto promítají se z přímek Y, Z (dle věty γ) dvěma projektivnými svazky rovinovými $(\tau\nu_1\varrho_1\sigma_1 \ldots) \barwedge (\tau\nu_2\varrho_2\sigma_2 \ldots)$. Tyto svazky jsou perspektivné, majíce samodružnou rovinu τ. Rovina perspektivní, již vyplňují průsečnice homologických rovin $\overline{\nu_1\nu_2}$, $\overline{\varrho_1\varrho_2}$, ... tvoříce svazek paprskový o středu x, budiž ω. Označme tyto svazky $Y_1 \barwedge Z_2$. Obdobně stanoví svazek Y_1 prostřednictvím osnovy kuželů z vrcholu z, jež dotýkají se rovin ε, φ a roviny τ podél přímky M, na ose X svazek rovinový $X_1 \barwedge Y_1$; a svazek Z_2 prostřednictvím kuželů z vrcholu y, jež dotýkají se rovin γ, δ a roviny τ podél přímky N, na ose X svazek rovinový $X_2 \barwedge Z_2$. Soumístné svazky rovinové $X_1 \barwedge X_2$ jsou tudíž projektivné, a splývají-li dvě homologické roviny jejich (v rovině samodružné), stane se to patrně v rovině ξ, jíž dotýkají se kužele λ a μ. Projektivné svazky X_1, X_2 určíme třemi družinami, jež sestrojíme (bez kuželův osnovy) takto: Osnova kuželů $(\alpha\beta\tau P)$ z vrcholu x obsahuje jeden kužel zvrhlý ve dvě přímky; jsou to průsečnice rovin $\overline{\alpha\beta}$ a přímka P; obě procházejí bodem x. Roviny $(\overline{\alpha\beta}, Y) \equiv \nu_1$, $(\overline{\alpha\beta}, Z) \equiv \nu_2$ dají tedy jednu družinu svazků rovinových $Y_1 \barwedge Z_2$. Dále položme přímkou Y rovinu ϱ_1 a stanovme k ní homologickou ϱ_2 ve svazku Z_2, jakožto tečnou rovinu položenou přímkou Z ke kuželi, který jest určen tečnými rovinami α, β, ϱ_1, τ a površkou P. Rovinu ϱ_2 sestrojíme větou Brianchonovou, applikovanou na kužel 2. stupně o vrcholu x. Označme tečné roviny kužele $\varrho_1 \equiv 1$, $\beta \equiv 2$, $\alpha \equiv 3$, $\tau \equiv 4 \equiv 5$ (tečná rovina podél přímky $P \equiv \overline{45}$), a stanovme tečnou rovinu $\varrho_2 \equiv 6$ procházející přímkou $\overline{56} \equiv Z$. Těchto šest rovin omezuje šestihran (opsaný kuželi), jehož úhlopříčné roviny (z nichž každá obsahuje dvě protější hrany) protínají se v jedné přímce G. Průsečnice rovin $\overline{12}$ a $\overline{45} \equiv P$ stanoví rovinu ψ, průsečnice $\overline{23}$ a $\overline{56}$ rovinu ν_2; průsečnice rovin $\overline{\psi\nu_2} \equiv G$, $\overline{34}$ a $\overline{61}$ budou ležeti v jedné rovině. Stanovme tedy rovinu $(\overline{34}, G)$, její průsečnici $\overline{61}$ s rovinou 1, a proložme rovinu $(\overline{61}, Z) \equiv 6 \equiv \varrho_2$. Sestrojme ještě třetí družinu σ_1, σ_2 pomocí roviny perspektivné $\omega \equiv (\overline{\alpha\beta}, \overline{\varrho_1\varrho_2})$: položme přímkou Y libovolnou rovinu σ_1, průsečnicí pak $\overline{\sigma_1\omega}$ a přímkou Z rovinu σ_2. Svazky rovinové $Y_1 \barwedge Z_2$ jsou určeny družinami $\nu_1\nu_2$, $\varrho_1\varrho_2$, $\sigma_1\sigma_2$. Dále sestrojme týmž způsobem z bodu z k rovinám ν_1, ϱ_1, σ_1 homologické ν'_1, ϱ'_1, σ'_1 ve svazku X_1 (na ose X) pomocí osnovy kuželů $(\varepsilon, \varphi, \tau, M)$, a z bodu y k rovinám ν_2, ϱ_2, σ_2 homologické ν'_2, ϱ'_2, σ'_2 ve svazku X_2 (na ose X) pomocí osnovy kuželů $(\gamma\delta\tau N)$. Rovinové svazky projektivné X_1 $(\nu'_1, \varrho'_1, \sigma'_1 \ldots) \barwedge X_2$ $(\nu'_2, \varrho'_2, \sigma'_2 \ldots)$ jsouce soumístné (o společné ose X), mají dvě roviny samodružné ξ, ξ', reálné nebo imaginárné, takže daná úloha je dvojznačná. Z tečných rovin ξ (je-li reálná), γ, δ, τ a dotyčné površky N sestrojíme kužel λ o vrcholu y, z tečných rovin ξ, ε, φ, τ a dotyčné površky M kužel μ o vrcholu z. Posléze proložme ke kuželi λ přímkou Z tečnou rovinu ζ (druhá je τ), a sestrojme kužel $\varkappa$ z tečných rovin ζ, α, β, τ a dotyčné površky P. Třemi tečnými kuželi $\varkappa$, λ, μ (o vrcholech x, y, z) je žádaná plocha φ^2 určitě stanovena; povrchové kuželosečky její A, B, C na tečných kuželech procházejí bodem u, dotýkajíce se v něm roviny τ. Křivku A sestrojíme takto. Kužele $\varkappa$, λ mají mimo τ ještě jednu společnou tečnou rovinu π, obsahující přímku $\overline{xy} \equiv Z$, která se kuželů dotýká podél přímek K, L. Průsečík

$(KL) \equiv p$ leží na křivkách A, B; je to zároveň dotyčný bod tečné roviny π na ploše φ^2. Kužele $\varkappa$, μ mají mimo τ ještě společnou tečnou rovinu obsahující přímku $\overline{xz} \equiv Y$; její dotyčný bod q na ploše φ^2, zároveň průsečík křivek A, C, obdržíme obdobně jako prve bod p. Body p, q, u, jež náležejí kuželosečce A, proložme rovinu a sestrojme její pronik A s kuželem $\varkappa$. Obdobně stanovíme i křivky B a C, a z těchto tří kuželoseček známým již způsobem plochu φ^2 samu. Rovina ξ' dá posléze druhou plochu úloze hovící. Analogickým způsobem řešíme i případ speciální: sestrojiti paraboloid daný šesti rovinami tečnými a směrem osy.

Nová interpretace Cauchyovy věty.

Napsal **Bohuslav Hostinský**.

1. Budiž $f(x)$ jednoznačná a spojitá funkce reální proměnné x v intervallu $a \leqq x \leqq b$. Arithmetickým středem $A[f]$ hodnot $f(x)$ v tomto intervallu nazývá se číslo

$$A[f] = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k}{n} \cdot \overline{b-a}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx. \quad (1)$$

Geometrickým středem $G[f]$ hodnot $f(x)$ (je-li $f(x) \neq 0$ pro každé x) v témže intervallu nazveme číslo

$$G[f] = \lim_{n=\infty} \prod_{k=1}^{n} \sqrt[n]{f\left(a + \frac{k}{n} \cdot \overline{b-a}\right)}.$$

Logarithmováním poslední rovnice obdržíme

$$\log G[f] = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log f\left(a + \frac{k}{n} \cdot \overline{b-a}\right) = A[\log f], \quad (2)$$

$$G[f] = e^{A[\log f]}.$$

2. Označme nyní symbolem $f(z)$ analytickou funkci komplexní proměnné z jednoznačnou uvnitř i na obvodě kružnice C středu $z = z_0$ a o poloměru r; předpokládáme, že $f(z)$ nemá v tomto oboru žádné singularity ani nullového bodu.

Jest známo, že $f(z_0)$ jest arithmetickým středem $A[f]$ hodnot $f(z)$ na obvodě kružnice C; zavedeme-li totiž v Cau-