Matyáš Lerch

O některých křivkách prostorových

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 1, 1–15

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122385

O některých křivkách prostorových.

Podává **M. Lerch** v Brně.

I.

V rovině Oxy uvažujme epicykloidu

$$x + iy = (R + r - re^{i\beta})\, e^{i\alpha}, \quad R\alpha = r\beta, \tag{1}$$

kterou vytvoří bod na hybném kruhu poloměru r při jeho kotálení po pevném kruhu poloměru R, jehož střed jest O; α značí odvalený úhel na kruhu pevném, β na kruhu hybném, a začáteční poloha ($\alpha = 0 = \beta$) hybného bodu jest $x = R$, $y = 0$, úvratní bod čáry.

Tuto epicykloidu volme za základnu válce směru Oz (t. j. kolmého na rovinu Oxy), a na něm uvažujme čáru šroubovou, která protíná jeho přímky pod stálým úhlem γ. Je-li $d\sigma$ prvek oblouku na základně, bude čára ta charakterisována differenciálním vztahem

$$\frac{dz}{d\sigma} = cotg\, \gamma = k. \tag{2}$$

Differencováním rovnice (1) vznikne

$$dx + idy = e^{i\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}\, d\sigma, \quad d\sigma = \frac{2r\,(R + r)}{R} \sin \frac{\beta}{2}\, d\beta, \tag{3}$$

a tudíž nalezneme jako integrál rovnice (2)

$$z = -k \frac{4r\,(R + r)}{R} \cos \frac{\beta}{2}, \tag{4}$$

což píšeme též

$$z = -2S \cos \frac{\beta}{2}, \quad S = \frac{2kr\,(R + r)}{R}. \tag{4°}$$

Rovnice (1) a (4) určují čáru šroubovou na našem válci.

Z rovnice (1) plyne

$$x^2 + y^2 = (R + r)^2 + r^2 - 2r\,(R + r)\cos\beta, \tag{5}$$

a z (4°)

$$z^2 = S^2\,(2 + 2\cos\beta),$$

a z obou těchto rovnic vychází

$$\frac{x^2 + y^2}{r\,(R + r)} + \frac{z^2}{S^2} = \frac{(R + 2r)^2}{r\,(R + r)}\,. \tag{6}$$

Rovnice ta vyjadřuje, že šroubová čára na epicykloidním válci leží na rotačním ellipsoidu, jehož rotační osa leží ve přímce Oz; jeho poloměry základní jsou

$$\mathfrak{A} = R + 2r,\quad \mathfrak{C} = \frac{S\,(R + 2r)}{\sqrt{r\,(R + r)}} = 2k\,\frac{R + 2r}{R}\sqrt{r\,(R + r)}. \tag{7}$$

Prvek oblouku ds na šroubové čáře naší má hodnotu

$$ds = \frac{d\sigma}{\sin\gamma}, \tag{8}$$

směrnice tečny, které obecně jsou dány výrazy

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds},$$

mají tedy dle (3) hodnoty

$$\sin\gamma\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right),\ \sin\gamma\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right),\ \cos\gamma. \tag{9}$$

Vytkněme nyní pevný bod F na přímce Oz, buď $OF = \delta$, a stanovme úhel ω, který svírá tečna libovolného bodu M naší čáry s vektorem FM.

Dle (9) bude

$$\frac{\cos\omega}{\sin\gamma} = \frac{x\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + y\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) + k\,(z - \delta)}{\sqrt{\Phi}},$$

$$\Phi = x^2 + y^2 + (z - \delta)^2;$$

výpočet dává

$$\frac{\cos\omega}{\sin\gamma} = \frac{P\cos\frac{\beta}{2} - k\delta}{\sqrt{\Phi}},\ P = R - k^2\,\frac{4r\,(R + r)}{R}. \tag{10}$$

Výraz Φ je kvadratická funkce proměnné $\cos\frac{\beta}{2}$; chceme určiti konstantu δ tak, aby Φ byla úplným čtvercem. Tu nalezneme pomocí (5) a (4)

$$\Phi = A\cos^2\frac{\beta}{2} + 2B\cos\frac{\beta}{2} + C,$$

$$A = 16k^2\frac{r^2(R+r)^2}{R^2} - 4r(R+r),$$

$$B = 4k\delta\frac{r(R+r)}{R},\quad C = \delta^2 + (R+2r)^2.$$

Podmínka hledaná $B^2 = AC$ se přepíše po dosazení hodnot a krácením na $4r(R+r)$ takto

$$k^2\delta^2 \,.\, \frac{4r(R+r)}{R^2} = [(R+2r)^2 + \delta^2]\left[k^2\frac{4r(R+r)}{R^2} - 1\right],$$

z čehož po redukci vychází

$$\delta^2 = (R+2r)^2\left[4k^2\frac{r(R+r)}{R^2} - 1\right]$$

čili dle (7)

$$\delta^2 = \mathfrak{C}^2 - \mathfrak{A}^2.$$

To znamená, že žádaná vlastnost výrazu Φ se objeví jen pro případ, že bod F jest jedním ze společných ohnisek meridiánů plochy (6).

V našem případě máme též

$$C = \delta^2 + \mathfrak{A}^2 = \mathfrak{C}^2,$$

tedy $\sqrt{C} = \mathfrak{C}$, načež

$$\frac{\sqrt{A}}{B} = \frac{1}{\sqrt{C}} = \frac{1}{\pm\mathfrak{C}}. \tag{12}$$

Odmocnina výrazu Φ má pak hodnotu

$$\sqrt{\Phi} = \frac{A\cos\frac{\beta}{2} + B}{\sqrt{A}},$$

takže rovnice (10) podá

$$\frac{\cos\omega}{\sin\gamma} = \frac{P\cos\frac{\beta}{2} - k\delta}{A\cos\frac{\beta}{2} + B}\sqrt{A};$$

jak snadno se ukáže, jest determinant

$$\begin{vmatrix} P & -k\delta \\ A & B \end{vmatrix} = 0,$$

a tedy vyjde

$$\frac{\cos\omega}{\sin\gamma} = \sqrt{A}\,\frac{-k\delta}{B} = \mp \frac{k\delta}{\mathfrak{C}}.$$

Veličina

$$\frac{\delta}{\mathfrak{C}} = E$$

je číselná výstřednost meridiánu, a poslední výsledek podává bez ohledu na znamení

$$\cos\omega = E\cos\gamma. \qquad (13)$$

Naše čára (1) (4) protíná tedy přímky kuželů, jimiž se promítá z ohnisek rotačního ellipsoidu, pod stálým úhlem ω, určeným z rovnice (13).

Čára ta je šroubovicí na válci (1) a na dvou kuželích, i nazývá se šroubovicí dvojkuželovou (bikonickou)*).

Je-li ellipsoid sploštěný, jsou tyto dva kužele pomyslny. Hodnota E je dána vzorcem

$$E^2 = 1 - \frac{R^2\,tg^2\,\gamma}{4r\,(R+r)}.$$

II.

Z dané plochy rozvinutelné možno deformací vytvořiti nekonečně mnoho tvarů ploch rozvinutelných, které po rozvinutí v rovinu dávají tentýž útvar; při našich transformacích zůstává poloměr křivosti úvratnice nezměněn, poněvadž se nemění její oblouk a úhel kontingenční.

Uvažujme rozvinutelnou plochu tvořenou tečnami čáry Γ (úvratnice její), a na ní stanovme jednu z pravoúhlých trajektorií přímek Ω.

Můžeme provésti transformaci tím způsobem, že položíme trajektorii Ω na libovolnou plochu; máme při tom v moci zvoliti polohu jedné přímky dle libosti, tak aby svírala s plochou úhel

*) G. Pirondini, Crelleův Journal sv. 118 (1897).

ostrý; ostatní přímky pak zaujmou polohy zcela určité, bude určitou křivka nastoupivší na místo trajektorie Ω a bude také zcela určitou úvratnice nové plochy rozvinutelné.

Chceme zvláště uvažovati případ, kdy trajektorie Ω je přinucena padnouti do roviny Oxy; v tom případě plocha rozvinutelná má stálý spád — jejž možno voliti dle libosti — a čára úvratní je čára šroubová.

Touto deformací vznikají z rozvinutelné plochy šroubové příslušné ke šroubovici kruhového válce vesměs plochy tečen šroubovic válců kruhových.

Rozviňme plochu v rovinu; tím přešla trajektorie Ω v určitou čáru Ω_0, povrchové přímky přešly v její normály, a její evoluta Γ_0 je transformovaná úvratnice Γ. Naopak můžeme každou plochu rozvinutelnou vytvořiti *detorsí* z normál dané rovinné čáry Ω_0. Myslíme si rovinu hmotnou, kterou nakrojením podél normál učiníme schopnou ohybu kolem těchto; zkroucením roviny tak, aby čára Ω_0 přešla v čáru Ω na dané ploše, obdržíme plochu rozvinutelnou.

Základní čáru Ω_0 charakterisujme na př. pravoúhlými souřadnicemi $x_0 y_0$ v libovolné soustavě, poloměr křivosti buď ϱ_0, oblouk s_0, dále buď τ_0 úhel, který tečna *kladného směru* čáry svírá s osou úseček; pak jest

$$dx_0 = ds_0 \cos \tau_0, \quad dy_0 = ds_0 \sin \tau_0, \quad \varrho_0 = \frac{ds_0}{d\tau_0},$$

kdež ds_0 je kladné, při kladném pošinutí $dx_0\, dy_0$.

Proveďme detorsi normál čáry Ω_0, tak aby čára Ω_0 zaujala polohu čáry Ω_1 v rovině Oxy; pro tuto čáru můžeme zvoliti jeden bod příslušný k určité normále, a její tečnu v něm, rovněž lze zvoliti libovolně úhel $\gamma \gtreqless 0$, jejž příslušná přímka po detorsi svírá s osou Oz. Po zvolení těchto prvků je čára Ω_1 určena. Dvě sousední normály přešly ve dvě sousední přímky na ploše rozvinutelné, jichž průměty do Oxy jsou dvě sousední normály čáry Γ_1; délky přímek od čáry Ω_1 až k úvratnici mají hodnotu ϱ_0; průmět $\varrho_0 \sin \gamma$ je pak poloměr křivosti čáry Ω_1. Značí-li τ_1 úhel tečny čáry Ω_1 s osou Ox, bude

$$d\tau_1 = \frac{ds_0}{\varrho_0 \sin \gamma},$$

poněvadž prvek oblouku ds_1 rovná se prvku ds_0 na Ω_0.

Tudíž

$$d\tau_1 = \frac{d\tau_0}{\sin\gamma},$$

a odtud

$$\tau_1 = \frac{\tau_0}{\sin\gamma} + \vartheta,$$

kde ϑ jest úhel stálý. Pro souřadnice $x_1 y_1$ bodu na Ω_1 tedy bude

$$dx_1 + i dy_1 = ds_1 e^{i\tau_1} = ds_0 e^{\frac{i\tau_0}{\sin\gamma} + i\vartheta}$$

čili

$$x_1 + i y_1 = e^{i\vartheta} \int e^{\frac{i\tau_0}{\sin\gamma}} \varrho_0 d\tau_0. \qquad (1)$$

Otočením souřadnic docílíme libovolného ϑ, a pošinutím soustavy docílíme libovolného počátku integrace.

Tato rovnice udává čáru, která je stopou rozvinutelné plochy stálého spádu, v niž přešla soustava normál čáry Ω_0 detorsí.

Je-li čára Ω_0 kruh, bude poloměr křivosti čáry Ω_1 veličina stálá $\varrho_0 \sin\gamma$, tedy jest Ω_1 opět kruh, a rozvinutelná plocha je rotační kužel (tvoření kornoutů). Je-li Ω_0 přímkou, jest Ω_1 rovněž přímka, pokud $\gamma \gtrless 0$. Vyloučený případ $\gamma = 0$ je zde možný a sice pro libovolně zvolenou čáru Ω_1, což vede na plochy válcové směru Oz.

Zbývá ještě stanoviti úvratnici rozvinutelné plochy. Její půdorys jest evoluta čáry Ω_1 a má komplexní vyjádření dle vzorce

$$x + iy = x_1 + iy_1 + i\,\frac{d(x_1 + iy_1)}{d\tau_1},$$

t. j. dle hořejších vzorců

$$x + iy = x_1 + iy_1 + i \sin\gamma\, \varrho_0\, e^{\frac{i\tau_0}{\sin\gamma} + i\vartheta}. \qquad (2^0)$$

Pro prvek oblouku na půdoryse $d\sigma$ nám identita

$$d(x + iy) = i \sin\gamma\, e^{\frac{i\tau_0}{\sin\gamma} + i\vartheta} d\varrho_0$$

podává

$$d\sigma = d\varrho_0 \sin\gamma,$$

a čára Γ jakožto šroubová hoví rovnici

$$dz = d\sigma \, cotg \, \gamma = d\varrho_0 \, . \, cos \, \gamma;$$

odtud při stálém K

$$z = K + \varrho_0 \, cos \, \gamma.$$

Konstanta K není libovolna. Délka tečny od čáry Γ ku čáře Ω_1 má býti ϱ_0, tedy

$$\varrho_0^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2;$$

avšak dle (2^0) jest

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \varrho_0^2 \, sin^2 \gamma,$$

takže rovnice předešlá platí jen pro $K = 0$. Máme pak čáru úvratní Γ na rozvinutelné ploše danou rovnicemi

$$x + iy = i \, sin \, \gamma \, \varrho_0 \, e^{\frac{i\tau_0}{sin \gamma} + i\vartheta} + e^{i\vartheta} \int \varrho_0 e^{\frac{i\tau_0}{sin \gamma}} d\tau_0$$

$$z = \varrho_0 \, cos \, \gamma; \tag{2}$$

řez plochy tečen s rovinou $z = 0$ je čára (1), příslušná k základní čáře Ω_0.

1. Jako příklad volme logarithmickou spirálu

$$(\Omega_0) \quad r = ae^{c\varphi};$$

zde sice $\tau_0 = \varphi_0 + arc \, cotg \, c$, ale možno vynechati konstantu, takže

$$\tau_0 = \varphi, \quad \varrho_0 = a\sqrt{1 + c^2} \, e^{c\varphi} = r\sqrt{1 + c^2} = cs_0;$$

náš integrál tu zní

$$\int \varrho_0 e^{\frac{i\tau_0}{sin \gamma}} d\tau_0 = a\sqrt{1 + c^2} \int e^{c\varphi + \frac{i\varphi}{sin \gamma}} d\varphi = \frac{a\sqrt{1 + c^2}}{c + \frac{i}{sin \gamma}} e^{\left(c + \frac{i}{sin \gamma}\right)\varphi}.$$

Znamenejme

$$c \, sin \, \gamma = c_0, \quad \frac{\varphi}{sin \gamma} = \psi,$$

a obdržíme

$$x + iy = a\sqrt{1 + c^2} \, sin \, \gamma \, e^{i\vartheta}\left(i + \frac{1}{c \, sin \, \gamma + i}\right) e^{(c_0 + i)\psi},$$

při čemž jsme již specialisovali počátek v rovině xy. Tu zvolíme dále ϑ tak, aby výraz

$$i + \frac{1}{c \sin \gamma + i} = \frac{i c \sin \gamma}{c \sin \gamma + i} = \frac{ic_0}{i + c_0} = \frac{c_0}{1 - ic_0}$$

měl hodnotu

$$\frac{c_0}{\sqrt{1 + c_0^2}} e^{-i\vartheta}$$

t. j. klademe

$$\vartheta = - \operatorname{arctg} c_0 ;$$

pak bude uvažovaná čára Γ

$$\left.\begin{aligned} x + iy &= \frac{a\sqrt{1 + c^2}}{\sqrt{1 + c_0^2}} c_0 \sin \gamma \, e^{c_0\psi + i\psi} \\ z &= a\sqrt{1 + c^2} \cos \gamma \, e^{c_0\psi} \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Stopa plochy tečen na rovině $z = 0$ jest logarithmická spirála (1)

$$x + iy = - e^{i\vartheta} \frac{ia\sqrt{1 + c^2} \sin \gamma}{1 - ic_0} e^{\left(c + \frac{i}{\sin \gamma}\right)\varphi};$$

$$e^{i\vartheta} = \frac{1 - ic_0}{\sqrt{1 + c_0^2}},$$

tedy

$$x + iy = - ia \sin \gamma \frac{\sqrt{1 + c^2}}{\sqrt{1 + c_0^2}} e^{c_0\psi + i\psi}. \qquad (A_1)$$

Půdorys čáry (A) je logarithmická spirála

$$r = a_0 e^{c_0\psi}, \quad a_0 = a \sqrt{\frac{1 + c^2}{1 + c_0^2}} c_0 \sin \gamma,$$

dále nám při označení

$$b = a\sqrt{1 + c^2} \cos \gamma$$

druhá rovnice dává

$$z = b e^{c_0\psi},$$

takže vychází

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = \frac{a_0^2}{b^2}, \quad \frac{a_0}{b} = \frac{c_0 \operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{1 + c_0^2}}, \qquad (A_2)$$

jakožto rovnice rotačního kužele obsahujícího naši čáru.

Čára tato protíná přímky kužele pod stálým úhlem a sluje šroubovice cylindro-konická*).

2. Jako druhý příklad uvažujme hypocykloidu

$$x_0 + iy_0 = (R - r + re^{-i\beta})\, e^{i\alpha}, \quad R\alpha = r\beta.$$

Vypočteme

$$ds_0 = \frac{2r\,(R-r)}{R} \sin\frac{\beta}{2}\, d\beta,$$

$$\tau_0 = \pi - \frac{\beta}{2} + \alpha = \pi - \frac{R-2r}{2R}\,\beta.$$

Znamenáme-li na okamžik

$$A = \frac{R-2r}{R\sin\gamma}, \quad \vartheta + \frac{\pi}{\sin\gamma} = \vartheta',$$

obdržíme dle (2)

$$x + iy = -i \sin\gamma\, \frac{4r\,(R-r)}{R-2r} \sin\frac{\beta}{2}\, e^{i\vartheta' - Ai\frac{\beta}{2}}$$

$$+ \frac{2r\,(R-r)}{R}\, e^{i\vartheta'} \int \sin\frac{\beta}{2}\, e^{-Ai\frac{\beta}{2}}\, d\beta;$$

integrál má hodnotu

$$\frac{e^{-i\frac{\beta}{2}(A-1)}}{A-1} - \frac{e^{-i\frac{\beta}{2}(A+1)}}{A+1}, \qquad (\alpha)$$

a tudíž vychází pro půdorys Γ_1 úvratnice šroubové čáry

$$x + iy = \frac{2Rr\,(R-r)}{R-2r} \sin^2\gamma\, e^{i\vartheta'}$$

$$\times \left[\frac{e^{-i\frac{\beta}{2}(A-1)}}{R-2r-R\sin\gamma} + \frac{e^{-i\frac{\beta}{2}(A+1)}}{R-2r+R\sin\gamma} \right].$$

Pokud $A - 1 > 0$, je tato křivka epicykloidou, a úvratnice Γ je šroubovice bikonická na ellipsoidu rotačním. V případě $A < 1$ pak je Γ_1 hypocykloida a úvratnice Γ leží na rotačním hyperboloidu jednoplochém (viz Časopisu roč. 42., str. 8., čl. 6.).

Výjimečné případy jsou jednak $R = 2r$ a pak $R - 2r = \pm R \sin\gamma$.

*) Další vlastnosti viz Teixeira, Traité des courbes, II. díl, str. 396 a násl.

Při $R = 2r$ však čára základní je přímka, a zbývá jen případ $R - 2r = \pm R \sin\gamma$, t. j. $A \mp 1 = 0$.

Zde integrál není více dán výrazem (α), jenž tu pozbývá smyslu, nýbrž bude jeho hodnota

$$-i\frac{\beta}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-i\beta} \quad \text{pro} \quad A = 1,$$

$$\frac{i\beta}{2} - \tfrac{1}{2}e^{i\beta} \quad \text{pro} \quad A = -1.$$

Omezme se na případ $A = 1$; půdorys čáry Γ má tu vyjádření

$$x + iy = \frac{r(R-r)}{R} e^{i\vartheta'}(e^{-i\beta} - i\beta - 1).$$

Zvolíme

$$\vartheta' = \frac{\pi}{2},$$

a píšeme

$$\frac{r(R-r)}{R} = a,$$

obdržíme pro vyjádření čáry úvratní

$$x = a(\beta + \sin\beta)$$
$$-y = a(1 - \cos\beta);$$

pro třetí souřadnici vyjde

$$z = -4a \operatorname{cotg}\gamma \,.\, \sin\frac{\beta}{2}.$$

Úvratnice Γ se tedy v tomto případě do základní roviny promítá jako obyčejná cykloida, a leží mimo to na válci parabolickém

$$z^2 + 8a \operatorname{cotg}^2\gamma \,.\, y = 0.$$

Při tom

$$\sin\gamma = 1 - \frac{2r}{R},$$

i možno voliti a a γ neodvisle od sebe.

Případ, kdy základní (rozvinutá) čára je cykloida, vede ke šroubovici bikonické.

3. Uvažujme nyní případ, kdy základní čára je parabola v polárních souřadnicích vyjádřená

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi},$$

tedy

$$x_0 + iy_0 = \frac{pe^{i\varphi}}{1 - \cos\varphi}, \quad y_0 = p \cot g \frac{\varphi}{2}$$

$$e^{i\tau_0} ds_0 = dx_0 + i dy_0 = pi \frac{e^{i\varphi} - 1}{(1 - \cos\varphi)^2} d\varphi$$

t. j.

$$e^{i\tau_0} ds_0 = - \frac{pe^{i\frac{\varphi}{2}}}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}} d\frac{\varphi}{2}, \quad \tau_0 = \pi + \frac{\varphi}{2},$$

takže

$$ds_0 = \frac{p}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}} d\frac{\varphi}{2} = \varrho_0 d\frac{\varphi}{2}.$$

Šroubová čára (2) má pak v tomto případě vyjádření

$$z = \frac{p \cos\gamma}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}}, \tag{B_1}$$

$$x + iy = i \frac{p \sin\gamma}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}} e^{\frac{i\varphi}{2 \sin\gamma} + i\vartheta'} + e^{i\vartheta'} p \int \frac{e^{\frac{i\varphi}{2\sin\gamma}}}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}} d\frac{\varphi}{2}, \tag{B_2}$$

při čemž ϑ' značí stálý úhel libovolný.

Tu zbývá určiti integrál

$$I = \int \frac{e^{\frac{i\varphi}{2\sin\gamma}}}{\sin^3 \frac{\varphi}{2}} d\frac{\varphi}{2} = -4i \int e^{\frac{i\varphi}{2}\left(\frac{1}{\sin\gamma} + 3\right)} \frac{d\varphi}{(e^{i\varphi} - 1)^3}$$

čili

$$I = 4 \int z^{\frac{1}{2\sin\gamma} + \frac{1}{2}} \frac{dz}{(1 - z)^3}, \quad z = e^{i\varphi}.$$

Tento binomický integrál možno v zakončeném tvaru vyjádřiti jen pro zvláštní hodnoty γ, o čemž v učebnicích podrobně pojednáno. V případech ostatních možno užíti obvyklých prostředků aproximačních, pokud se nejedná o malé úhly φ, příslušné ke vzdáleným bodům paraboly.

O povaze funkce v tomto oboru nám podá poučení rozvoj dle mocnin $1 - z$. Klaďme

$$\frac{1}{2\,sin\,\gamma} + \tfrac{1}{2} = m,$$

načež

$$z^m = (1 + z - 1)^m = 1 + m\,(z - 1) + \frac{m\,(m-1)}{2}\,(z-1)^2$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{m}{\nu + 2} (z - 1)^{\nu+2},$$

$$-\int \frac{z^m dz}{(1 - z)^3} = -\frac{1}{2\,(z-1)^2} - \frac{m}{z - 1} + \frac{m\,(m-1)}{2}\,log\,(z - 1)$$
$$+ \sum_{1}^{\infty} \binom{m}{\nu + 2} \frac{(z-1)^\nu}{\nu},$$

$$z - 1 = 2i\,sin\,\frac{\varphi}{2}\,e^{i\frac{\varphi}{2}},$$

takže po vynechání jistých konstant máme rozvoj $I = \overline{I} +$ konst.,

$$\overline{I} = -\frac{e^{-i\varphi}}{2\,sin^2\frac{\varphi}{2}} - 2im\,\frac{e^{-i\frac{\varphi}{2}}}{sin\frac{\varphi}{2}} - m\,(m-1)\left(i\varphi + log\,sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$-4\sum_{\mu=1}^{\infty} \binom{m}{\mu + 2} \frac{(2i)^\mu}{\mu}\,sin^\mu\frac{\varphi}{2}\,e^{i\mu\frac{\varphi}{2}}, \qquad (B_3)$$

konvergentní pro $\varphi < 60^0$.

Současně podává vzorec (1) pro polohu trajektorie pravoúhlé tečen

$$x_1 + iy_1 = pIe^{i\vartheta'},$$

při čemž možno k výrazu I — současně ve všech vzorcích — připojiti jakoukoli komplexní veličinu stálou.

Vezměme v úvahu směr tečny vrcholové základní paraboly (x_0, y_0), která je dána hodnotou $\varphi = \pi$ a tedy vyznačena úhlem $\tau_0 = \frac{3\pi}{2}$; poloha tečny vrcholové po vzedmutí roviny v plochu je vyznačena úhlem

$$\tau_1 = \vartheta' + \frac{\varphi}{2\, sin\, \gamma}, \quad \varphi = \pi,$$

t. j.

$$\tau_1 = \vartheta' + \frac{\pi}{2\, sin\, \gamma}.$$

Zvolme orientační úhel ϑ tak, aby obě křivky — parabola i trajektorie — měly společný prvek vrcholový, t. j. aby $\tau_1 = \tau_0$ pro $\varphi = \pi$, což dává

$$\vartheta' = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2\, sin\, \gamma}.$$

Body blízké vrcholu mají souřadnice $x_1 > 0$, byl-li počátek souřadnic zvolen ve vrcholu, ale jak z (B_3) patrno, budou body příslušné vzdáleným bodům paraboly, t. j. malým hodnotám φ asymptoticky v prvním sblížení

$$-p\, \frac{e^{\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2\, sin\, \gamma} - \varphi\right) i}}{2\, sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

takže jejich průvodiče budou u srovnání s průvodiči bodů paraboly jeviti se otočeny o úhel stálý

$$\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{sin\, \gamma}\right).$$

Obraťme se ke zvláštnímu případu $sin\, \gamma = \frac{1}{3}$, jemuž odpovídá $m = 2$, a $\vartheta' = 0$. Řada (B_3) se redukuje na konečný počet členů

$$\overline{I} = -\frac{cos\, \varphi - i\, sin\, \varphi}{2\, sin^2 \frac{\varphi}{2}} - 4i\, \frac{cos \frac{\varphi}{2} - i\, sin \frac{\varphi}{2}}{sin \frac{\varphi}{2}}$$

$$- 2i\varphi - 2\, log\, sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

a upravíme-li konstanty tak, aby pro $\varphi = \pi$ bod x_1, y_1 padl do počátku soustavy, obdržíme

$$x_1 = -\frac{p}{2}\, cotg^2 \frac{\varphi}{2} - 2p\, log\, sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$y_1 = p\left(-3\, cotg \frac{\varphi}{2} - 2\varphi + 2\pi\right),$$

jakožto vyjádření čáry, v niž přejde parabola po vzedmutí roviny v plochu o spádu $\frac{\pi}{2} - \gamma$, $\gamma = arc\ sin\ \frac{1}{3}$. Pro hodnoty $\varphi = \pi \pm \omega$, ω malé, jest x_1 kladné, a y_1 má znamení $\mp$, stejné jako y_0 na parabole. Vzdáleným bodům paraboly pak přísluší $x_1 < 0$, a mimo to jest

$$y_1 = -3y_0 + 2p(\pi - \varphi),$$

$$x_1 = -x_0 + \frac{p}{2} - 2p\ log\ sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Úvratnice plochy rozvinutelné pak má vyjádření

$$x = -\tfrac{3}{2} p\ cotg^2 \frac{\varphi}{2} - 2p\ log\ sin^2 \frac{\varphi}{2} + \tfrac{1}{3} p,$$

$$y = \tfrac{1}{3} p\ cotg^3 \frac{\varphi}{2} - 4p\ cotg \frac{\varphi}{2} + 2p(\pi - \varphi),$$

$$z = \tfrac{2}{3} p \frac{\sqrt{2}}{sin^3 \frac{\varphi}{2}}.$$

Rovnice

$$\tau_1 = \frac{\tau_0}{sin\ \gamma} + \vartheta, \quad \vartheta' = \vartheta + \frac{\pi}{sin\ \gamma}$$

v našem případě $sin\ \gamma = \frac{1}{3}$, $\vartheta' = 0$ dávají

$$\tau_1 = 3\tau_0 - 3\pi,$$

vztah konstruktivně užitečný.

Bod dvojný trajektorie příslušné k parabole odpovídá hodnotě $y_1 = 0$, t. j.

$$3\ cotg \frac{\varphi}{2} = 2(\pi - \varphi).$$

Položme

$$\frac{\pi - \varphi}{2} = \psi,$$

rovnice se přepíše na

$$4\psi = 3\ tg\ \psi;$$

její řešení

$$\psi = 0{\cdot}8451$$
$$\pi - \varphi = 1{\cdot}6902 = 96^0\,50'$$
$$tg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 0{\cdot}1198.$$

Vyjde-li se od tohoto bodu, lze konstruktivně stanoviti křivku (x_1, y_1) mezi tímto bodem a její body úběžnými na základě směru tečen, délky oblouků a poloměru křivosti:

$$\tau_1 = 3\,(\tau_0 - \pi), \quad \varrho_1 = \tfrac{1}{3}\varrho_0,$$

při čemž poloměr křivosti paraboly

$$\varrho_0 = p\left(1 + \frac{y_0^2}{p^2}\right)^{3/2}.$$

Čára (x_1, y_1) protíná osu Oy_1 (t. j. x_1 mizí) v bodě

$$\varphi = 35^0\,46'\,44''.$$

4. Změňme poněkud označení v rovnici (2) píšíce

$$\vartheta = 0, \quad \frac{1}{\sin\gamma} = k, \quad \tau_0 = u, \quad \varrho_0 = f(u);$$

rovnice (2) dávají

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{1}{k} f(u) \sin ku + \int f(u) \cos ku\, du, \\ y &= \frac{1}{k} f(u) \cos ku + \int f(u) \sin ku\, du; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

žádáme-li tvar pravoúhlé trajektorie plochy tečen po její rozvinutí v rovinu, při čemž úvratnice plochy leží na daném válci

$$F(x, y) = 0, \qquad (3^a)$$

vzniká eliminací liter x, y z rovnic (3) (3^a) integrální rovnice na oko velmi složitá. Můžeme ji obecně integrovati při $k > 1$, poněvadž jí hoví rozvinuté pravoúhlé trajektorie tečen čáry šroubové na válci (3^a), kteréžto tečny svírají s osou Oz úhel $\gamma = arc\ sin \frac{1}{k}$. Hledaná funkce $f(u)$ udává poloměr křivosti rozvinuté čáry, vyjádřený jako funkci úhlu, který její tečna svírá s pevnou přímkou.
