E. Bunický

O podmínkách dostačujících v teorii krajních hodnot funkcí

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 60 (1931), No. 1, 12--28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122376

O podmínkách dostačujících v teorii krajních hodnot funkcí.

E. Bunický.

(Došlo 13. VIII. 1930.)

1. Rozbor podmínek dostačujících pro existenci krajních hodnot funkcí jedné nebo několika proměnných souvisí s výpočtem derivací druhého a někdy i vyšších řádů. Odvodím některé věty, jež mají za účel usnadniti postup často obtížný, jenž záleží v postupném derivování. Tyto věty lze pokládati za jakési zevšeobecnění metody udané E. Goursatem pro určování krajních hodnot poměru dvou funkcí.*)

Krajní hodnoty funkcí jediné proměnné.

2. Budeme nazývati funkci $y = f(x)$ proměnné x, která je definována v daném intervalu a má v tomto intervalu konečné derivace až do n-ho řádu, funkcí n-kráte derivovatelnou v daném intervalu, při čemž lze slova „v daném intervalu" vynechati, kdykoli to nevede k nedorozumění.

Potřebujeme dokázati nejprve tuto pomocnou větu:

Pomocná věta I. *Buďtež*

$$y, u_1, u_2, \ldots, u_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$$

funkce v počtu $2n + 1$ proměnné x, definované v daném intervalu a vyhovující vztahům

$$y' = p_1 u_1, u'_1 = p_2 u_2, \ldots, u'_k = p_{k+1} u_{k+1}, \ldots, u'_{n-1} = p_n u_n. \quad (1)$$

Funkce $y, u_1, u_2, \ldots, u_n$ jsou mimo to alespoň jednou derivovatelné v daném intervalu a funkce p_i $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ resp. n-i krát. Za těchto podmínek je funkce y n-krát derivovatelná, a derivace y', y'', ..., $y^{(n)}$ lze vyjádřiti lineárně funkcemi $u_1, u_2, \ldots, u_n$ podle vzorců

*) E. Goursat, „Cours d'analyse mathématique", v jednom ze starších vydání.

$$y^{(\nu)} = p_1 p_2 \ldots p_\nu u_\nu + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} q_{\nu i} u_i, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

kde koeficienty $q_{\nu i}$ jsou mnohočleny dokonale určené, vyjádřené ve svém souhrnu funkcemi $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ a jejich derivacemi různých řádů.

Poznámka. Pro $\nu = 1$ zní vzorec (2)

$$y' = p_1 u_1 \tag{3}$$

a ztotožňuje se s první rovnicí (1). Ponecháváme hodnotu 1 pro index ν ve vzorcích (2) jen proto, aby další výpočty byly souměrnější.

Pro $n = 1$ vzorce (2) platí. Neboť pro tento případ se redukují, jak jsme právě viděli, na rovnici (3), která platí podle předpokladu. Položme $n = 2$. Pro $n = 2$ a $\nu = 1$ nabude vzorec (2) opět tvaru rovnice (3), již potvrzené. V tomto případě je funkce p_1 derivovatelná, podle předpokladu, (2—1)krát, t. j. jednou, a totéž platí o funkci u_1. Derivujeme-li tedy rovnici (3) a dosadíme do ní hodnotu u'_1 vypočtenou z druhého vztahu (1), dostaneme

$$y'' = p_1 p_2 u_2 + p'_1 u_1. \tag{4}$$

Člen $p_1 p_2 u_2$ je totožný s členem $p_1 p_2 \ldots p_\nu u_\nu$ vzorce (2) pro $\nu = 2$. Jestliže mimoto položíme $p'_1 = q_{21}$, shledáme, že koeficient q_2 závisí na p_1, totiž na derivaci p'_1, což souhlasí se zněním pomocné věty v případě $n = 2$, $\nu = 2$. Platí tedy vzorce (2) pro $n = 1$ a $n = 2$.

Připusťme, že vzorce (2) platí pro $n = m$, kde m je libovolné číslo celé větší než 1, a položme potom $n = m + 1$. Pro tuto hodnotu n nabudou vztahy (1) tvaru

$$y' = p_1 u_1, \; u'_1 = p_2 u_2, \ldots, u'_{m-1} = p_m u_m, \; u'_m = p_{m+1} u_{m+1}, \tag{5}$$

kde funkce p_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ jsou derivovatelné resp. $(m + 1 - j)$ kráte. Zvláště platí

$$y' = p_1 u_1, \; u'_1 = p_2 u_2, \ldots, u'_{m-2} = p_{m-1} u_{m-1}, \; u'_{m-1} = p_m u_m, \tag{6}$$

kde funkce p_i $(i = 1, 2, \ldots, m - 1)$ jsou derivovatelny resp. $(m + 1 - i)$-kráte, tím spíše tedy $(m - i)$-krát. Užijeme-li tedy pomocné věty, jejíž platnost pro $n = m$ předpokládáme, na m rovnic (6) a na funkce $y, p_1, \ldots, p_m, u_1, \ldots, u_m$, obdržíme vzorce

$$y^{(\nu)} = p_1 p_2 \ldots p_\nu u_\nu + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} q_{\nu i} u_i \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m), \tag{7}$$

kde koeficienty $q_{\nu i}$ jsou mnohočleny vyjádřené funkcemi $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ a jejich derivacemi různých řádů.

Položíme-li v posledních m rovnicích (5)

$$u_1 = Y, \; p_{l+1} = P_l, \; u_{l+1} = U_l, \quad (l = 1, 2, \ldots, m)$$

obdržíme

$$Y' = P_1U_1,\ U'_1 = P_2U_2, \ldots, U'_{m-1} = P_mU_m,$$

kde funkce $P_i = p_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, m-1$) jsou podle předpokladu derivovatelné resp. $m + 1 - (i + 1) = (m - i)$-kráte. Užijeme-li tudíž znovu pomocné věty pro $n = m$ na funkce $Y_1, P_1, \ldots, P_m, U_1, \ldots, U_m$, obdržíme

$$Y^{(\nu)} = P_1P_2 \ldots P_\nu U_\nu + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} Q_{\nu i}\, U_i. \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m), \tag{8}$$

kde koeficienty $Q_{\nu t}$ jsou mnohočleny vyjádřené funkcemi $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$ a jejich derivacemi různých řádů.

Vraťme se k původnímu označení a pišme poslední vzorec (8) zvláště; obdržíme tak

$$u_1^{(\nu)} = p_2p_3 \ldots p_{\nu+1}\, u_{\nu+1} + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} Q_{\nu i}\, u_{i+1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m - 1), \tag{9}$$

$$u_1^{(m)} = p_2p_3 \ldots p_{m+1}\, u_{m+1} + \sum_{i=1}^{i=m=1} Q_{mi}\, u_{i+1}, \tag{10}$$

kde koeficienty $Q_{\nu i}$ ($i = 1, 2, \ldots, m - 1$) a Q_{mi} jsou mnohočleny, jež ve svém souhrnu jsou vyjádřeny funkcemi $p_2, p_3, \ldots, p_m$ a jejich derivacemi různých řádů. Je tedy funkce u_1 derivovatelná m-krát a derivace $u'_1, u''_1, \ldots, u_1^{(m)}$ lze vyjádřiti lineárními formami funkcí $u_2, u_3, \ldots, u_{m1}$, při čemž souhrn koeficientů hodnot $u_2, u_3, \ldots, u_m, u_{m+1}$ v těchto lineárních formách (počítaje mezi ně i výrazy $p_2p_3 \ldots p_{\nu+1}$ a $p_2p_3 \ldots p_{m+1}$) závisí na funkcích $p_2, p_3, \ldots, p_m, p_{m+1}$ a na derivacích různých řádů funkcí $p_2, p_3, \ldots, p_m$. Mimoto je funkce p_1 podle předpokladu derivovatelná $(m + 1) - 1 = m$-krát a totéž platí o funkci u_1. Derivujeme-li tudíž první ze vztahů (5) m-krát, obdržíme podle vzorce Leibnizova

$$y^{(m+1)} = p_1u_1^{(m)} + \sum_{i=0}^{i=m-1} \frac{m!}{i!(m-i)!}\, p_1^{(m-i)}u_1^{(i)} \quad (u_1^{(0)} = u_1;\ 0! = 1)$$

Nahradíme-li v této rovnosti derivace $u'_1, u''_1, \ldots, u_1^{(m-1)}, u_1^{(m)}$ jejich hodnotami vypočtenými ze vzorců (9) a (10) a hledíme-li k tomu, že funkce u_{m+1} a p_{m+1} se vyskytují jen ve vzorci (10), můžeme vyjádřiti derivaci $y^{(m+1)}$ v tvaru

$$y^{(m+1)} = p_1p_2 \ldots p_{m+1}u_{m+1} + \sum_{i=1}^{i=m} q_{m+1,i}\, u_i, \tag{11}$$

kde koeficienty $q_{m+1,i}$ jsou mnohočleny, jichž souhrn je vyjádřen funkcemi $p_1, p_2, \ldots, p_m$ a jejich derivacemi různých řádů.

Připojíme-li rovnici (11) k rovnicím (7), obdržíme

$$y^{(\nu)} = p_1p_2 \ldots p_\nu u_\nu + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} q_{\nu i}\, u_i \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m, m + 1),$$

kde koeficienty $q_{\nu i}$ jsou mnohočleny, jichž souhrn je vyjádřen funkcemi $p_1, p_2, \ldots, p_m$ a jejich derivacemi různých řádů.

Je tedy potvrzena platnost pomocné věty pro $n = m + 1$, když se předpokládá její platnost pro $n = m$. Platí tedy tato věta obecně.

Poznámka. Malou úpravou provedené úvahy dalo by se dokázati, že koeficienty $q_{\nu i}$ ve vzorcích (2) jsou mnohočleny homogení, resp. stupně i, vyjádřené obecně funkcemi $p_1, p_2, \ldots, p_i$ a jejich derivacemi až do řádu $\nu - i$. Zvláště platí vždy $q_{\nu 1} = p_1^{(\nu-1)}$. Nebudeme se zabývati podrobnostmi tohoto druhu.

3. Věta I. *Buďtež* $y = f(x)$ *a*

$$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$$

funkce proměnné x *v počtu* $2n - 1$, *jež jsou definovány v daném intervalu a splňují vztahy*

$$y' = p_1 u_1,\ u'_1 = p_2 u_2, \ldots, u'_j = p_{j+1} u_{j+1}, \ldots, u'_{n-2} = p_{n-1} u_{n-1}. \tag{12}$$

Funkce $y, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ *buďtež derivovatelné alespoň jednou a funkce* p_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ *resp.* $(n - i)$*-krát v daném intervalu. Předpokládejme, že derivace* $y'(x)$ *má jeden kořen* c *uvnitř daného intervalu, při čemž funkce* $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ *a* $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ *splňují pro* $x = c$ *vztahy*

$$p_1(c) \neq 0,\ p_2(c) \neq 0, \ldots, p_{n-1}(c) \neq 0, \tag{13}$$

$$u_2(c) = u_3(c) = \ldots = u_{n-2}(c) = 0, \tag{14}$$

$$u'_{n-1}(c) \neq 0 \tag{15}$$

Celé číslo n *budiž podle předpokladu rovno nejméně 2, při čemž se vztahy* (13), (14), (15) *redukují pro* $n = 2$ *na nerovnosti* $p_1(c) \neq 0$, $u'_1(c) \neq 0$.

Za těchto předpokladů, je-li n *číslo liché, nemá funkce* y *krajní hodnoty pro* $x = c$.

Je-li n *číslo sudé a splňuje-li součin*

$$p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c)$$

(*který není roven nule, jak ukazují nerovnosti* (13) *a* (15)) *podmínku*

$$p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c) < 0, \tag{16}$$

nabývá funkce y *pro* $x = c$ *maxima vnitřního a vlastního.*

Je-li n *sudé a je splněna podmínka*

$$p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c) > 0, \tag{17}$$

nabývá funkce y *pro* $x = c$ *minima vnitřního a vlastního.*

Poznámka. Maximum nebo minimum funkce definované v intervalu nazývá se vnitřním, nabývá-li funkce této hodnoty pro hodnotu $x = c$ nezávisle proměnné x ležící uvnitř daného intervalu. Toto maximum nebo minimum nazývá se **vlastní**, jestliže rozdíl $y(x) - y(c)$ je záporný, resp. kladný (aniž se anuluje) pro všechny hodnoty x vyhovující nerovnostem $0 < |x - c| < \delta$, kde δ je dané číslo kladné.*)

Aby výpočty byly souměrnější, položme

$$p_n = 1, \tag{18}$$

$$u_n = u'_{n-1}; \tag{19}$$

pak lze psáti rovnice (12) v tvaru

$$y' = p_1 u_1,\ u'_1 = p_2 u_2, \ldots, u'_{n-2} = p_{n-1} u_{n-1},\ u'_{n-1} = p_n u_n. \tag{20}$$

Ježto funkce $y', u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ jsou derivovatelné jednou a funkce p_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ resp. $n - i$-krát, je funkce y podle vztahu (20) a ve shodě s pomocnou větou derivovatelná n-krát a jejích n derivací lze vyjádřiti vzorci

$$y^{(\nu)} = p_1 p_2 \ldots p_\nu u_\nu + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} q_{\nu i} u_i, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

kde $q_{\nu i}$ jsou funkce úplně určené. Je-li c kořen derivace y', a ježto $p_1(c)$ je podle první nerovnosti (13) různé od nuly, platí $y'(c) = p_1(c)\, u_1(c) = 0$, z čehož plyne $u_1(c) = 0$. Spojíme-li tuto rovnost s rovnostmi (14), obdržíme

$$u_1(c) = u_2(c) = \ldots = u_{n-2}(c) = u_{n-1}(c) = 0.$$

Položíme-li tedy v identitách (21) $x = c$, shledáme, že

$$y'(c) = y''(c) = \ldots = y^{(n-1)}(c) = 0,$$

$$y^{(n)}(c) = p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, p_n(c)\, u_n(c)$$

čili, vzhledem k rovnostem (18) a (19)

$$y^{(n)}(c) = p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c).$$

Mimoto platí podle nerovností (13) a (15)

$$p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c) \neq 0 \text{ čili } y^{(n)}(c) \neq 0.$$

Máme tedy konečně

$$y'(c) = y''(c) = \ldots = y^{(n-1)}(c) = 0,$$

$$y^{(n)}(c) = p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c) \neq 0. \tag{22}$$

Je-li n číslo liché, nemá funkce y krajní hodnoty pro $x = c$, což plyne přímo ze vztahů (22), podle známých pravidel z teorie maxim a minim.

---

*) Německy eingentliches Extremum, francouzsky extrême strict ou propre, anglicky proper extremum. Srv. *Hadamard* „Leçons sur le calcul des variations", 1910, str. 2—5.

Je-li n číslo sudé a jestliže součin $p_1(c)\,p_2(c)\ldots p_{n-1}(c)\,u'_{n-1}(c)$ vyhovuje nerovnosti (16), platí podle vztahů (22)

$$y'(c) = y''(c) = \ldots = y^{(n-1)}(c) = 0,\ y^{(n)}(c) < 0.$$

Má tedy funkce y pro $x = c$ maximum vnitřní a vlastní.

Je-li n číslo sudé a jestliže součin $p_1(c)\,p_2(c)\ldots p_{n-1}(c)\,u'_{n-1}(c)$ vyhovuje nerovnosti (17), platí

$$y'(c) = y''(c) = \ldots = y^{(n-1)}(c) = 0,\ y^{(n)}(c) > 0.$$

Má tedy funkce y v tomto případě pro $x = c$ minimum vnitřní a vlastní.

Věta odvozená. *Budiž $y = f(x)$ funkce x, která je definována a alespoň jednou derivovatelná v daném intervalu. Nechť lze derivaci y' vyjádřiti v tvaru*

$$y' = pu, \tag{23}$$

kde p a u jsou funkce x, derivovatelné n—1-krát v daném intervalu. Předpokládejme, že derivace y' má uvnitř daného intervalu kořen c vyhovující vztahům

$$p(c) \neq 0,\ u'(c) = u''(c) = \ldots = u^{(n-2)}(c) = 0,\ u^{(n-1)}(c) \neq 0. \tag{24}$$

Číslo n budiž celé kladné, větší než 1, při čemž se relace (24) redukují pro $n = 2$ na nerovnosti $p(c) \neq 0$, $u'_1(c) \neq 0$. Za těchto předpokladů, je-li n číslo liché, nemá funkce y krajní hodnoty pro $x = c$. Je-li číslo n sudé a jestliže součin $p(c)\,u^{(n-1)}(c)$ je záporný, má funkce y pro $x = c$ maximum vnitřní a vlastní. Je-li n číslo sudé a součin $p(c)\,u^{(n-1)}(c)$ je kladný, má funkce y pro $x = c$ minimum vnitřní a vlastní.

Tuto větu odvodíme ihned z věty právě dokázané, jestliže položíme $p_1 = p$, $u_1 = u$, $p_2 = p_3 = \ldots = p_{n-1} = 1$.

Lze ji dokázati také dosti jednoduše a nezávisle na větě I., jestliže derivujeme identitu (23) n—1-krát a položíme ve všech rovnicích, jež tak obdržíme, $x = c$.

Poznámka. Věta I. může často posloužiti k tomu, aby se zjednodušilo řešení úloh o krajních hodnotách funkcí jediné proměnné. Mějme totiž určiti krajní hodnoty funkce $y(x)$, jejíž derivace $y'(x)$ má reálný kořen uvnitř intervalu, kde je funkce $y(x)$ definována. Předpokládejme, že se derivace $y'(x)$ dá rozložiti ve dva činitele $p(x)$ a $u_1(x)$, vyhovující vztahům $p_1(c) \neq 0$ a $u_1(c) = 0$. Aby se vyzkoušel kořen c, stačí podle věty I. derivovati činitel $u_1(c)$ a nikoli derivaci $y'(x)$. Tento postup zjednodušuje řešení problému ve všech případech, kde výpočet derivace $u'_1(x)$ je jednodušší, než výpočet druhé derivace $y''(x)$. Jestliže $u'_1(c) \neq 0$ a $p_1(c)\,u'_1(c) < 0$ (anebo $p_1(c)\,u'_1(c) > 0$), je $y(c)$ maximum (minimum) funkce $y(x)$. Jestliže $u'_1(c) = 0$, hledíme znovu rozložiti derivaci $u'_1(x)$ ve dva činitele $p_2(x)$ a $u_2(x)$, z nichž jen druhý je roven nule pro $x = c$. Pokračujíce tímto způsobem, snažíme se sestrojiti úplnou posloupnost funkcí $p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_{n-1}, u_{n-1}$, vyhovujících vztahům (13), (14), (15) jakož i všem ostatním podmínkám věty I, která poskytuje dostatečný návod k tomu, aby se dokončilo vyzkoušení kořenu c. Po každé, kdy se nepodaří rozložení jedné z derivací $u'_\nu(x)$ ($\nu < n-1$) ve dva činitele $p_{\nu+1}(x)$ a $u_{\nu+1}(x)$, které by vyhovovaly vztahům $p_{\nu+1}(c) \neq 0$ a $u_{\nu+1}(c) = 0$, nutno položiti $p_{\nu+1}(x) = 1$. Poslední dvě funkce p_i, u_i jsou označeny v textu věty I indexem $i = n-1$ tak, aby první derivace funkce y, která se pro $x = c$ neanuluje, měla index n. Nahradí-li se $n-1$ indexem k, nabudou rovnice (12) a vztahy (13), (14), (15) tvaru

$$y' = p_1u_1,\ u'_1 = p_2u_2, \ldots, u'_j = p_{j+1}\,u_{j+1}, \ldots, u'_{k-1} = p_ku_k;$$
$$p_1(c) \neq 0,\ p_2(c) \neq 0, \ldots, p_k(c) \neq 0;$$
$$u_2(c) = u_3(c) = \ldots = u_{k-1}(c) = 0;\ u'_k(c) \neq 0.$$

Ježto liché a sudé hodnoty k odpovídají sudým, resp. lichým hodnotám n, nutno důsledek transformované věty vysloviti tímto způsobem: je-li k číslo sudé, hodnota $y(c)$ funkce $y(x)$ není krajní; jestliže k je číslo liché a platí

$$p_1(c)\,p_2(c)\ldots p_k(c)\,u'_k(c) < 0,$$

je $y(c)$ maximum funkce $y(x)$; jestliže k je liché a platí

$$p_1(c)\,p_2(c)\ldots p_k(c)\,u'_k(c) < 0,$$

je $y(c)$ minimum funkce $y(x)$.

Objasníme užití věty I několika příklady. Abychom zestručnili označení, budeme v řešeních příkladů psáti funkce $p_1, p_2, \ldots, p_k$ vždycky do závorek, mimo to vynecháme někdy v součinu $p_1(c)\,p_2(c)\ldots p_k(c)\,u'_k(c)$ činitele zřejmě kladné, což nemá vlivu na znaménko příslušného součinu. Konečně ponecháme všude čtenáři, aby si potvrdil platnost vztahů (13), (14), (15) jakož i všech ostatních podmínek věty I.

4. **Příklady.** 1. *Jest určiti krajní hodnoty funkce $y(x)$ definované rovnicí*

$$y = \sin^6 x - 6\sin^4 x. \tag{25}$$

Řešení. Derivováním rovnice (25) obdržíme

$$y' = 6\,(\sin^2 x - 4)\sin^3 x \cos x.$$

Ježto výraz $\sin^2 x - 4$ je stále záporný pro reálné hodnoty x, jsou reálné kořeny derivace y definovány rovnicí $\sin^3 x \cos x = 0$, která je ekvivalentní dvěma rovnicím $\sin x = 0$, $\cos x = 0$. Má tedy derivace y' dvě posloupnosti reálných kořenů, totiž

$$x = c = m\pi,\quad x = c' = (m + \tfrac{1}{2})\pi,$$

kde m je libovolné číslo celé.

Vyzkoušení kořenů $c = m\pi$.

$y' = \{6(\sin^2 x - 4)\cos x\}\sin^3 x,\ u_1 = \sin^3 x;\ u'_1 = \{3\cos x\}\sin^2 x,$

$u_2 = \sin^2 x;\quad u'_2 = \{2\cos x\}\,.\,\sin x,\quad u_3 = \sin x;\quad u'_3 = \cos x,$

$$\cos c = (-1)^m,\ [(\sin^2 x - 4)\cos x\,.\,\cos x\,.\,\cos x\,.\,\cos x]_{x=c} =$$

$$= -4\,.\,(-1)^{4m} < 0.$$

Pro $x = m\pi$ má funkce (25) maximum $y(m\pi) = 0$ vnitřní a vlastní.

Vyzkoušení kořenů $c' = (m + \frac{1}{2})\pi$.

$$y' = \{6(\sin^2 x - 4)\sin^3 x\}\cos x,\ u_1 = \cos x,\ u'_1 = -\sin x,$$

$$\sin c' = (-1)^m,$$

$$[(\sin^2 x - 4)\sin^3 x(-\sin x)]_{x=c'} = (1-4)(-\sin^4 c') = 3 > 0.$$

Funkce (25) má pro $x = (m + \frac{1}{2})\pi$ minimum $y[(m + \frac{1}{2})\pi] = -5$ vnitřní a vlastní.

2. *Krajní hodnoty funkce*

$$y = e^{5x}\cos^5 x. \qquad (26)$$

Řešení. Derivování rovnice (26) dá

$$y' = 5e^{5x}(\cos x - \sin x)\cos^4 x.$$

Pro kořeny derivace y' platí rovnice

$$\cos x - \sin x = 0,\ \cos x = 0.$$

Odtud plynou kořeny $x = c = (m + \frac{1}{4})\pi$ a $x = c' = (m + \frac{1}{2})\pi$, kde m je libovolné číslo celé.

Kořeny $c = (m + \frac{1}{4})\pi$. $\qquad y' = \{5e^{5x}\cos^4 x\}(\cos x - \sin x)$,

$$u_1 = \cos x - \sin x;\ u'_1 = -(\sin x + \cos x),\ u'_1(c) = \mp\frac{2}{\sqrt{2}} = \mp\sqrt{2}.$$

Je-li m číslo sudé, $m = 2k$, kde k je libovolné číslo celé. V tomto případě mají kořeny c tvar $c_1 = (2k + \frac{1}{4})\pi$; platí pro ně $u'_1(c_1) = -\sqrt{2} < 0$. Má tedy funkce (26) pro $x = (2k + \frac{1}{4})\pi$ maxima vnitřní a vlastní, rovná $y(c_1) = \frac{1}{4\sqrt{2}}e^{5(2k+\frac{1}{4})\pi}$.

Je-li m číslo liché, je $c = c_2 = (2k + 1 + \frac{1}{4})\pi = (2k + \frac{5}{4})\pi$, $u'_1(c_2) = \sqrt{2} > 0$. Má tedy pro $x = (2k + \frac{5}{4})\pi$ funkce (26) minima vnitřní a vlastní, rovná $-\frac{1}{4\sqrt{2}}e^{5(2k+\frac{5}{4})\pi}$. Při zkoušení kořenů c nedbali jsme kladného činitele $5e^{5c}\cos^4 c$.

Kořeny $c' = (m + \frac{1}{2})\pi$. $\qquad y' = \{5e^{5x}(\cos x - \sin x)\}\cos^4 x$,

$$u_1 = \cos^4 x;\ u'_1 = \{-4\sin x\}\cos^3 x,\ u_2 = \cos^3 x;$$

$$u'_2 = \{-3 \sin x\} \cos^2 x, \quad u_3 = \cos^3 x; \quad u'_3 = \{-2 \sin x\} \cos x,$$
$$u_4 = \cos x; \quad u'_4 = -\sin x, \; u'_4 = \mp 1 \neq 0.$$

První derivace u'_k, která se neanuluje pro $x = c$, má index sudý $k = 4$. Nemá tedy funkce (26) pro hodnoty $x = (m + \frac{1}{2})\pi$ proměnné x ani maxima ani minima.

3. *Jest určiti krajní hodnoty funkce*)*

$$y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}. \tag{27}$$

Řešení. Derivování této rovnice dává

$$y' = \frac{(x+3)^2 x}{(x+2)^3}.$$

Derivace y' má dva reálné kořeny $x = c_1 = 0$, $x = c_2 = -3$.

Kořen $c_1 = 0 . y' = \left\{\frac{(x+3)^2}{(x+2)^3}\right\} x, \; u_1 = x; \; u'_1 = 1, \left[\frac{(x+3)^2}{(x+2)^3} . 1\right]_{x=c_1=0} =$

$$= \frac{9}{8} > 0.$$

Funkce (27) má tedy minimum $y\,(0) = {}^{27}/_4$ vnitřní a vlastní.

Kořen $c_2 = -3$. $y' = \left\{\frac{x}{(x+2)^3}\right\}(x+3)^2, \quad u_1 = (x+3)^2;$

$u'_1 = \{2\}(x+3), \; u_2 = x + 3; \; u'_2 = 1 \neq 0.$

První derivace u'_2, která se neanuluje pro $x = c_2$, má sudý index 2. Nemá tedy funkce (27) pro $x = c_2 = -3$ ani maxima ani minima.

Poznámka. Při řešení příkladů 1), 2), 3) nutno míti na paměti, že funkce (25) a (26) jsou definovány v intervalu $(-\infty, +\infty)$ a že funkce (27), která se stává rozpojitou pro $x = -2$, je definována ve dvou oddělených intervalech $(-\infty, -2)$ a $(-2, +\infty)$, při čemž hodnota -2 je po každé vyloučena. Kořeny $x = -3$ a $x = 0$, zkoumané v příkladu 3), leží jeden uvnitř prvního, druhý uvnitř druhého tohoto intervalu.

Krajní hodnoty funkcí dvou nezávisle proměnných.

5. Metoda výše vyložená může býti rozšířena na funkce několika proměnných. V tomto článku se omezím na případ funkcí dvou proměnných. Bude třeba dokázati nejprve pomocnou větu.

*) V. F. Frenet, „Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal" 1891, str. 23, § X, Maxima et minima, problème 195.

Pro stručnost v označení, budeme označovati znaky w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy} po řadě parciální derivace $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ libovolné funkce $w(x, y)$ dvou proměnných x a y. Hodnotu $w(x_0, y_0)$ funkce $w(x, y)$ pro dané hodnoty $x = x_0$ a $y = y_0$ proměnných x, y označíme w_0, po případě $(w)_0$ nebo $[w]_0$, kdyby označení funkce w bylo již komplikováno některými indexy nebo závorkami.

Pomocná věta II. *Budiž $z = f(x, y)$ funkce dvou nezávisle proměnných x a y, definovaná v oboru dvourozměrném D a mající v tomto oboru konečné parciální derivace až do druhého řádu včetně. Nechť lze parciální derivace z_x a z_y vyjádřiti vzorci*

$$z_x = Pu, \ z_y = pv, \tag{28}$$

kde $P = P(x, y)$, $u = u(x, y)$, $p = p(x, y)$ a $v = v(x, y)$ jsou funkce proměnných x, y, definované v témže oboru D a mající tam konečné parciální derivace podle x i y. Nechť dále

$$u_0 = u(x_0, y_0) = 0, \ v_0 = v(x_0, y_0) = 0, \tag{29}$$

kde x_0, y_0 jsou souřadnice některého daného bodu $(x_0\, y_0)$ v oboru D.

Jsou-li všechny tyto podmínky splněny, platí rovnosti

$$(z_{xx})_0 = P_0(u_x)_0, \ (z_{yy})_0 = p_0(v_y)_0 \tag{30}$$

a

$$H_0 = (z_{xx})_0 \, (z_{yy})_0 - (z_{xy}^2)_0 = P_0 p_0 \begin{vmatrix} (u_x)_0 & (u_y)_0 \\ (v_x)_0 & (v_y)_0 \end{vmatrix} = P_0 p_0 \left[\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right] = = P_0 p_0 J_0, \tag{31}$$

kde H a $J = \frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ jsou stručná označení pro Hessián $z_{xx}\, z_{yy} - z^2_{xy}$ funkce z a pro Jacobián funkcí u, v vzhledem ku proměnným x, y.

Derivujeme-li identity (28) podle x a y, obdržíme $z_{xx} = Pu_x + P_x u$, $z_{xy} = Pu_y + P_y u$, $z_{xy} = pv_x + p_x v$, $z_{yy} = pv_y + p_y v$.

Dosadíme-li v těchto identitách $x = x_0$, $y = y_0$, a přihlížíme zároveň k rovnicím (29), obdržíme

$$(z_{xx})_0 = P_0(u_x)_0 \tag{32}$$

$$(z_{xy})_0 = P_0(u_y)_0 \tag{33}$$

$$(z_{xy})_0 = p_0(v_x)_0 \tag{34}$$

$$(z_{yy})_0 = p_0(v_y)_0 \tag{35}$$

Tím jsou dokázány rovnosti (30), které jsou úplně totožné s rovnostmi (32) a (35). Mimoto se odvodí užitím rovnic (32), (33), (34), (35):

$$H_0 = \begin{vmatrix} (z_{xx})_0 & (z_{xy})_0 \\ (z_{xy})_0 & (z_{yy})_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_0(u_x)_0, & P_0(u_y)_0 \\ p_0(v_x)_0, & p_0(v_y)_0 \end{vmatrix} = P_0\, p_0 \begin{vmatrix} (u_x)_0 & (u_y)_0 \\ (v_x)_0 & (v_y)_0 \end{vmatrix} =$$

$$= P_0 p_0 \left[\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right]_0 = P_0 p_0 J_0.$$

Tím jsou dokázány také rovnosti (31).

Věta II. *Budiž*

$$z = f(x, y)$$

funkce nezávisle proměnných x a y, mající ve dvourozměrném oboru D, v němž je definována, všechny parciální derivace prvního i druhého řádu spojité.

Nechť má soustava rovnic

$$z_x = 0, \; z_y = 0$$

řešení $x = x_0$, $y = y_0$, kde bod (x_0, y_0) leží uvnitř oboru D, a nechť lze vyjádřiti parciální derivace z_x a z_y v oboru D rovnicemi

$$z_x = Pu, \; z_y = pv, \tag{37}$$

kde P, u, p, v jsou funkce proměnných x, y, mající v oboru D konečné derivace prvního řádu. Zvláště nechť vyhovují funkce P, p nerovnostem

$$P_0 \neq 0, \; p_0 \neq 0. \tag{38}$$

Za těchto předpokladů a položíme-li

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = J,$$

platí tyto věty:

Jestliže

$$P_0 p_0 J_0 < 0, \tag{39}$$

funkce z nemá krajní hodnoty v bodě (x_0, y_0).

Jestliže naproti tomu

$$P_0 p_0 J_0 > 0, \tag{40}$$

má funkce z v bodě (x_0, y_0) krajní hodnotu vnitřní a vlastní. V tom případě jsou hodnoty $P_0(u_x)_0$ a $p_0(v_y)_0$ různé od nuly a mají stejné znaménko.

Je-li splněn vztah (40) *a jestliže mimoto*

$$P_0(u_x)_0 < 0$$

(čili, což je ekvivalentní,

$$p_0(v_y)_0 < 0), \tag{41}$$

má funkce z v bodě (x_0, y_0) maximum vnitřní a vlastní.

Je-li splněn vztah (40) *a jestliže mimo to*

$$P_0(u_x)_0 > 0$$

(čili, což je ekvivalentní,

$$p_0(v_y)_0 > 0), \tag{42}$$

má funkce z v bodě (x_0, y_0) minimum vnitřní a vlastní.

Poznámka. Maximum nebo minimum $z(x_0, y_0)$ funkce $z(x, y)$ definované v oboru D nazývá se vnitřním, leží-li bod (x_0, y_0) uvnitř oboru D. Toto maximum nebo minimum $z(x_0, y_0)$ nazývá se vlastním, jestliže rozdíl $z(x, y) - z(x_0, y_0)$ zůstává záporný, resp. kladný pro všechny hodnoty x a y, které splňují vztah $0 < |x - x_0| + |y - y_0| < \delta$, kde δ je dané číslo kladné*).

Podle předpokladu platí $(z_x)_0 = 0$, $(z_y)_0 = 0$, čili, vzhledem k rovnicím (37),

$$P_0 u_0 = 0, \; p_0 v_0 = 0,$$

odkudž plyne podle nerovností (38)

$$u_0 = 0, \; v_0 = 0. \tag{43}$$

Vyhovují tedy funkce z, P, p, u, v všem podmínkám pomocné věty II. Neboť funkce z má v oboru D parciální derivace konečné a dokonce spojité a to řádu prvního a druhého. Parciální derivace z_x a z_y jsou vyjádřeny v oboru D rovnicemi (37), při čemž funkce P, u, p, v mají v témže oboru konečné první derivace podle x a y. Mimoto se funkce u a v anulují v bodě (x_0, y_0), jak ukazují rovnice (43). Je tedy podle pomocné věty II

$$(z_{xx})_0 = P_0(u_x)_0, \; (z_{yy})_0 = p_0(v_y)_0 \tag{44}$$

a

$$P_0 p_0 J_0 = H_0 = (z_{xx})_0 (z_{yy})_0 - (z_{xy}^2)_0. \tag{45}$$

Platí-li nerovnost (39), je vzhledem k relacím (45) $H_0 < 0$, z čehož plyne podle známé věty z analyse, že funkce z nemá krajní hodnoty v bodě (x_0, y_0). Platí-li nerovnost (40), je $P_0 p_0 J_0 = H_0 > 0$; v tomto případě má funkce z, jak známo, krajní hodnotu v bodě (x_0, y_0), při čemž jsou čísla $(z_{xx})_0$ a $(z_{yy})_0$ různá od nuly a mají společné znaménko. Avšak $(z_{xx})_0$ a $(z_{yy})_0$ jsou podle rovností (44) rovna výrazu $P_0(u_x)_0$, resp. $p_0(v_y)_0$; jsou tedy výrazy $P_0(u_x)_0$ a $p_0(v_y)_0$ různé od nuly a mají společné znaménko.

Platí-li nerovnosti (40) a (41) zároveň, nalezneme, hledíce k rovnicím (45) a (44), že platí $H_0 > 0$ a $(z_{xx})_0 < 0$ [čili $(z_{yy})_0 < 0$], z čehož plyne, že funkce z má v bodě (x_0, y_0) maximum vnitřní a vlastní. Jestliže konečně platí zároveň nerovnosti (40) a (42), obdržíme $H_0 > 0$ a $(z_{xx})_0 > 0$ [čili $(z_{yy})_0 > 0$]. Má tedy funkce z v bodě (x_0, y_0) minimum vnitřní a vlastní.

Poznámka. Platí-li rovnost $J_0 = 0$, je také vzhledem k rovnicím (45) $H_0 = 0$, což znamená, že nastává případ pochybný.

*) J. Hadamard, l. c.

6. **Příklady.** 1. *Jest určiti krajní hodnoty funkce*

$$z = \frac{3a^2xy - x^2y^2}{x + y}, \tag{46}$$

kde a je dané číslo reálné, nikoli rovné nule. Funkce z proměnných x, y je definována v celé rovině xy, vyjímaje body přímky

$$x + y = 0. \tag{47}$$

Řešení. Označme přímku (47) písmenem l. Tato přímka dělí rovinu xy na dvě poloroviny. Označme znakem Δ_1 polorovinu, která obsahuje úhel kladných smyslů os souřadných, znakem Δ_2 druhou polorovinu, při čemž v každé polorovině Δ_1 a Δ_2 všechny body přímky l podle předpokladu jsou vyloučeny. V každé polorovině takto sestrojené má funkce z všechny parciální derivace prvního a druhého řádu spojité. Ježto funkce z závisí jen na a^2, lze v rovnici (46) nahraditi a hodnotou $|a|$. Jinými slovy, lze pokládati a za číslo kladné.

Derivujeme-li rovnici (46) podle x a y, obdržíme

$$z_x = \frac{y^2(3a^2 - 2xy - x^2)}{(x + y)^2}, \quad z_y = \frac{x^2(3a^2 - 2xy - y^2)}{(x + y)^2}.$$

Položíme-li z_x a z_y rovno nule, obdržíme

$$y^2(3a^2 - 2xy - x^2) = 0, \quad x^2(3a^2 - 2xy - y^2) = 0. \tag{48}$$

Soustava rovnic (48) je obecně ekvivalentní těmto čtyřem soustavám:

$$y^2 = 0, \; x^2 = 0 \tag{I}$$

$$y^2 = 0, \; 3a^2 - 2xy - y^2 = 0 \tag{II}$$

$$3a^2 - 2xy - x^2 = 0, \; x^2 = 0 \tag{III}$$

$$3a^2 - 2xy - x^2 = 0, \; 3a^2 - 2xy - y^2 = 0 \tag{IV}$$

Soustava (I) dává řešení $x = 0$, $y = 0$, které nevyhovuje, ježto bod $(0, 0)$ leží na přímce l. Soustavy (II) a (III) vedou k rovnostem $y = a = 0$ a $x = a = 0$, jež jsou nemožné, ježto číslo a je podle předpokladu kladné. Zbývá tedy jen soustava (IV). Odečteme-li v ní první rovnici od druhé, obdržíme

$$x^2 - y^2 = 0, \text{ čili } (x + y)(x - y) = 0.$$

Ježto první činitel nemůže býti roven nule, je

$$x = y. \tag{49}$$

Rovnice (49), kombinovaná s jednou nebo druhou z rovnic (IV), dává tato dvě řešení

$$x = a, \; y = a \tag{50}$$

$$x = -a, \; y = -a. \tag{51}$$

Vyzkoušení řešení (50). Položíme-li

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{y^2}{(x+y)^2}, & u &= 3a^2 - 2xy - x^2, \\ p &= \frac{x^2}{(x+y)^2}, & v &= 3a^2 - 2xy - y^2, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

platí

$$z_x = Pu, \; z_y = pv; \tag{53}$$

$$P(a, a) = P_0 = \frac{a^2}{4a^2} = \frac{1}{4} > 0, \; p(a, a) = p_0 = \frac{1}{4} > 0, \; u(a, a) = u_0 =$$
$$= 0; \; v(a, a) = v_0 = 0; \; u_x = -2x - 2y, \; u_y = -2x, \; v_x = -2y,$$
$$v_y = -2x - 2y; \; H_0 = P_0 p_0 J_0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \left[\begin{vmatrix} -2x - 2y, & -2x \\ -2y, & -2x - 2y \end{vmatrix}\right]_{x=a,\, y=a} =$$
$$= \frac{3}{4} a^2 > 0; \quad (z_{xx})_0 = P_0 (u_x)_0 = \frac{1}{4} u_x(a, a) = -a < 0.$$

Je tedy $H_0 > 0$, $(z_{xx})_0 < 0$. Z toho plyne, že funkce (46) nabývá v bodě (a, a) poloroviny Δ_1 maxima $z(a, a) = a^3$ vnitřního a vlastního.

Vyzkoušení řešení (51). Užijeme-li opět rovnic (52) a (53), obdržíme pro $x = -a$, $y = -a$

$$P(-a, -a) = P_0 = \frac{1}{4} > 0, \quad p(-a, -a) = p_0 = \frac{1}{4} > 0,$$
$$u(-a, -a) = u_0 = 0, \; v(-a, -a) = v_0 = 0; \; H_0 =$$
$$= P_0 p_0 \left[\begin{vmatrix} -2x - 2y, & -2x \\ -2y, & -2x - 2y \end{vmatrix}\right]_{x=-a,\, y=-a,} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 12a^2 =$$
$$= \frac{3}{4} a^2 > 0, \quad (z_{xx})_0 = P_0 (u_x)_0 = \frac{1}{4} u_x(-a, -a) = \frac{4a}{4} > 0.$$

Má tedy vzhledem k nerovnostem $H_0 > 0$, $(z_{xx})_0 > 0$ funkce (46) v bodě $(-a, -a)$ poloroviny Δ_2 minimum $z(-a, -a) = -a^3$, minimum vnitřní a vlastní.

Poznámka. Příklad právě rozřešený vyjadřuje geometricky velmi známou úlohu: najíti mezi všemi pravoúhlými rovnoběžnostěny o daném povrchu $6a^2$ ten, jehož objem je největší. Odpověď (že je to krychle o hraně a) je dána řešením (50).

2. *Jest určiti krajní hodnoty funkce z definované rovnicí*

$$z = e^{x+y} (x - 2)(y - 1) \tag{54}$$

pro všechny reálné hodnoty x a y.

Řešení. Derivováním rovnice (54) obdržíme

$$z_x = e^{x+y} \,.\, (x - 1)(y - 1), \; z_y = e^{x+y} \,.\, (x - 2)\, y.$$

Soustava rovnic $z_x = 0$, $z_y = 0$ je ekvivalentní soustavě

$$(x-1)(y-1)=0,\ (x-2)y=0,$$

jež dává řešení

$$x = 1,\ y = 0, \tag{55}$$

$$x = 2,\ y = 1. \tag{56}$$

Řešení (55). Položíme-li

$$P = e^{x+y}\,.\,(y-1),\ u = x-1,\ p = e^{x+y}(x-2),\ v = y,$$

obdržíme

$$z_x = Pu,\ z_y = pv;\ P_0 = P(1, 0) = -e,\ p_0 = p(1, 0) = -e;$$

$$u_0 = u(1, 0) = 0,\ v_0 = v(1, 0) = 0;\ u_x = 1,\ u_y = 0,\ v_x = 0,\ v_y = 1;$$

$$H_0 = P_0 p_0 J_0 = (-e)(-e)\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = e^2 > 0,\ (z_{xx})_0 = P_0(u_x)_0 =$$

$$= -e\,.\,1 = -e < 0.$$

Nerovnosti $H_0 > 0$ a $(z_{xx})_0 < 0$ ukazují, že funkce (54) má v bodě (1, 0) maximum $z\,(1, 0) = e$ vnitřní a vlastní.

Řešení (56). Položíme-li

$$P = e^{x+y}(x-1),\ u = y-1,\ p = e^{x+y}y,\ v = x-2,$$

vypočteme

$$z_x = Pu,\ z_y = pv;\ P_0 = P(2, 1) = e^3,\ p_0 = p(2, 1) = e^3;$$

$$u_0 = u(2, 1) = 0,\ v_0 = v(2, 1) = 0;\ u_x = 0,\ u_y = 1,\ v_x = 1,\ v_y = 0;$$

$$H_0 = P_0 p_0 J_0 = e^3\,.\,e^3\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = -e^6 < 0.$$

Vzhledem k nerovnosti $H_0 < 0$ nemá funkce (54) v bodě (2, 1) ani maxima ani minima.

3. *Jest určiti krajní hodnoty funkce z definované pro všechny reálné hodnoty proměnných x a y rovnicí**)

$$z = xe^{y+x\sin y}. \tag{57}$$

Řešení. Soustava rovnic

$$z_x = e^{y+x\sin y}(x\sin y + 1) = 0,\ z_y = x\,.\,e^{y+x\sin y}(1 + x\cos y) = 0$$

redukuje se na ekvivalentní soustavu (předpoklad $x = 0$ odporuje rovnici $z_x = 0$)

$$x\sin y + 1 = 0,\ 1 + x\cos y = 0. \tag{58}$$

Píšeme-li tuto soustavu v tvaru

$$\sin y = \cos y = -1/x,$$

*) V. Vera Šiv, Sbírka cvičení a úloh z počtu diferenciálního a integrálního (rusky), 1899, sv. I., str. 102, úl. 17.

nalezneme posloupnost hledaných kořenů

$$y = y_0 = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad x = x_0 = (-1)^{k+1}\sqrt{2},$$

kde k je libovolné číslo celé.

Položíme-li

$$P = e^{y+x\sin y}, \quad u = x\sin y + 1, \quad p = xe^{y+x\sin y}, \quad v = 1 + x\cos y,$$

obdržíme

$$z_x = Pu, \ z_y = pv; P_0 = P(x_0, y_0) = e^{y_0+x_0\sin y} > 0; p_0 = p(x_0, y_0) = \\ = x_0e^{y_0+x_0\sin y_0} \neq 0 \text{ (ježto } x_0 \neq 0); \ u_x = \sin y, \ u_y = x\cos y, \ v_x = \\ = \cos y, \ v_y = -x\sin y;$$

$$H_0 = P_0p_0J_0 = e^{2y_0+2x_0\sin y_0} x_0 \cdot \begin{vmatrix} \sin y_0 & x_0\cos y_0 \\ \cos y_0 & -x_0\sin y_0 \end{vmatrix} = \\ = -x_0^2e^{2y_0+2x_0\sin y_0}.$$

Odtud plyne, vzhledem k nerovnosti $x_0 \neq 0$, pro každé řešení $x = x_0$, $y = y$ soustavy (58)

$$H_0 = -x_0^2e^{2y_0+2x_0\sin y_0} < 0.$$

Nemá tedy funkce (57) krajní hodnoty pro žádnou hodnotu proměnných x, y.

*

Sur les conditions suffisantes dans la théorie des extrema des fonctions.

(Extrait de l'article précédent.)

Ces conditions sont exprimées par les théorèmes suivants:

I. Soient

$$y = f(x) \text{ et}$$

$$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$$

$2n-1$ fonctions d'une variable x qui sont définies dans un intervalle donné et qui satisfont aux relations

$$y' = p_1u_1, u'_1 = p_2u_2, \ldots, u_i' = p_{i+1}u_{i+1}, \ldots, u'_{n-2} = p_{n-1}u_{n-1}.$$

Les fonctions $y, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ sont, par hypothèse, au moins une fois, et les fonctions p_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ respectivement $(n-i)$-fois dérivables dans l'intervalle donné. Supposons que la dérivée $y'(x)$ ait une racine c à l'intérieur de l'intervalle donné, les fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ satisfaisant pour $x = c$ aux relations

$$p_1(c) \neq 0, \ p_2(c) \neq 0, \ \ldots, \ p_{n-1}(c) \neq 0, \tag{13}$$

$$u_2(c) = u_3(c) = \ldots = u_{n-2}(c) = 0, \tag{14}$$

$$u'_{n-1}(c) \neq 0. \tag{15}$$

Le nombre entier n est, par hypothèse, égal au moins à 2, les trois dernières relations se réduisant pour $n = 2$ aux inégalités $p_1(c) \neq 0$, $u'_1(c) \neq 0$. Cela posé, si n est un nombre impair, la fonction y n'a pas d'extremum pour $x = c$. Si n est un nombre pair et que le produit $p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c)$ (différent de zéro en vertu des inégalités (13) et (15)) satisfait à la condition

$$p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c) < 0,$$

la fonction y atteint pour $x = c$ un extremum maximum intérieur et propre. Si n est pair et que l'on a

$$p_1(c)\, p_2(c) \ldots p_{n-1}(c)\, u'_{n-1}(c) > 0,$$

la fonction y atteint pour $x = c$ un extremum minimum intérieur et propre.

II. Soit

$$z = f(x, y)$$

une fonction des variables indépendantes x et y qui a toutes les dérivées partielles du premier et du second ordre continues dans un domaine à deux dimensions D, où elle est définie. Par hypothèse, le système d'équations

$$z_x = 0, \; z_y = 0$$

a une solution $x = x_0$, $y = y_0$, le point x_0, y_0 étant situé à l'intérieur du domaine D. De plus, les dérivées partielles z_x et z_y peuvent s'exprimer dans le domaine D au moyen des équations

$$z_x = Pu, \; z_y = pv,$$

P, u, p, v étant des fonctions des variables x, y qui ont dans le domaine D des dérivées finies du premier ordre. En particulier, les fonctions P et p satisfont, par hypothèse, aux inégalités $P_0 \neq 0$, $p_0 \neq 0$. Toutes ces hypothèses étant remplies on a, en posant $\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)} = J$, les propositions suivantes. Si l'on a $P_0 p_0 J_0 < 0$, la fonction n'a pas d'extremum au point (x_0, y_0). Si l'on a, au contraire,

$$P_0 p_0 J_0 > 0, \tag{40}$$

la fonction z a au point (x_0, y_0) un extremum intérieur et propre. En ce cas, les nombres $P_0(u_x)_0$ et $p_0(v_y)_0$ sont différents de zéro et on le même signe. Si la relation (40) est satisfaite et que l'on a, de plus, $P_0(u_x)_0 < 0$ (ou, ce qui est une condition équivalente, $p_0(v_y)_0 < 0$), la fonction z a au point (x_0, y_0) un maximum intérieur et propre. Si la relation (40) est satisfaite et que de plus on a $P_0(u_x)_0 > 0$ (ou, ce qui est une condition équivalente, $p_0(v_y)_0 > 0$), la fonction z a au point (x_0, y_0) un minimum intérieur et propre.

Ces deux théorèmes sont appliqués à plusieurs problèmes spéciaux.