Karel Petr

O větě Newton-Sylvestrově pro separaci kořenů rovnic algebraických

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 60 (1931), No. 1, 1--11

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122372

ČÁST MATEMATICKÁ.

O větě Newton-Sylvestrově pro separaci kořenů rovnic algebraických.

Napsal K. Petr.

(Došlo 15. srpna 1930.)

V Časopise pro pěst. math. a fysiky, r. 36 (1907), str. 49, podal jsem důkaz věty Descartesovy a Budanovy úplnou indukcí. Této metody lze použíti i při větě Newtonově, kterou však teprve Sylvester dokázal (Philosophical magazine, IV. serie, sv. 31, r. 1866, str. 214). I zde lze docíliti podstatného zjednodušení při důkaze věty, jež vyplývá bez jakéhokoli omezení. Konečně podávám v následujícím rozšíření věty Newton-Sylvestrovy pro funkce analytické a jakožto použití tohoto rozšíření poukazuji na jedno zjednodušení věty N.-S. při rovnicích algebraických.

I.

Budiž dána rovnice stupně n-tého, kde

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, x + a_n, \qquad a_0 \neq 0.$$

Koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou vesměs čísla reálná. Věta Budanova (Budan-Fourierova) užívá k stanovení počtu kořenů položených mezi a, b počtů změn znaménkových, které vznikají v řadě ($f'(x)$ jest prvá, $f''(x)$ druhá derivace výrazu $f(x)$, atd.)

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x),\ f^{(n)}(x),$$

když tam dosadíme za x jednou a a po druhé b. Věta Newton-Sylvestrova užívá dvojité řady

$$\begin{array}{c} f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots, f^{(n)}(x) \\ \mathfrak{A}_0(x),\ \mathfrak{A}_1(x),\ \mathfrak{A}_2(x), \ldots, \mathfrak{A}_n(x), \end{array} \tag{A}$$

kde pro $k > 0$

$$\mathfrak{A}_k(x) = [f^{(k)}(x)]^2 - c_k^{(n)} f^{(k-1)}(x)\, f^{(k+1)}(x), \quad \mathfrak{A}_0(x) = f^2(x).$$

I tato věta počítá změny znaménkové v první z obou řad (A), avšak bere je v úvahu pouze tenkrát, když na příslušném místě v druhé řadě jest sled znaménkový. Při tom jsou $c_k^{(n)}$ vhodně volené numerické koeficienty, závislé jednak na stupni dané rovnice, jednak na indexu k.

Budeme se nejprve zabývati otázkou, jak jest třeba voliti tyto součinitele, abychom snadno mohli použíti úplné indukce při důkaze věty Newt.-Sylv. Důkaz věty se totiž provádí tak, že věta se předpokládá pro rovnici $f'(x) = 0$ a dokáže se pro rovnici $f(x) = 0$. Pro rovnici $f'(x) = 0$ se dvojřada (A) redukuje na

$$\begin{aligned} &f'(x),\ f''(x),\ f'''(x), \ldots, f^{(n)}(x), \\ &\overline{\mathfrak{A}}_0(x),\ \overline{\mathfrak{A}}_1(x),\ \overline{\mathfrak{A}}_2(x), \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_{n-1}(x), \end{aligned} \qquad (\overline{\mathrm{A}})$$

kde $\overline{\mathfrak{A}}_0(x) = f'^2(x)$ a pro $k > 1$

$$\overline{\mathfrak{A}}_{k-1}(x) = [f^{(k)}(x)]^2 - c_{k-1}^{(n-1)}\, f^{(k-1)}(x)\, f^{(k+1)}(x).$$

Budeme požadovati, aby

$$c_{k-1}^{(n-1)} = c^{k(n)}, \qquad (1)$$

čímž docílíme, že $\overline{\mathfrak{A}}_{k-1}(x) = \mathfrak{A}_k(x)$ a dvojřady (A), $(\overline{\mathrm{A}})$ se budou úplně shodovati v posledních $(n-1)$ členech. Vztah (1) má za následek, že $c_k^{(n)}$ jest závislo pouze na rozdílu $n-k$ a my položíme

$$c_k^{(n)} = c_{n-k}.$$

Avšak ještě jednu podmínku pro numerické součinitele jest třeba zavésti, jež nás do jisté míry bude orientovat o změně znamének při $\mathfrak{A}_k(x)$. Pro derivaci funkce $\mathfrak{A}_k(x)$ jest

$$\mathfrak{A}'_k(x) = (2 - c_{n-k})\, f^{(k)}(x)\, f^{(k+1)}(x) - c_{n-k}\, f^{(k-1)}(x)\, f^{(k+2)}(x),$$

tedy

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x)\, \mathfrak{A}'_k(x) &= (2 - c_{n-k})\, \mathfrak{A}_{k+1}(x)\, f^{(k)}(x) + \\ &+ [(2 - c_{n-k})\, c_{n-k-1}\, f^{(k)2}(x) - c_{n-k}\, f^{(k-1)}(x)\, f^{(k+1)}(x)]\, f^{(k+2)}(x). \end{aligned}$$

Volíme c_i tak, aby hranatá závorka na pravé straně byla pro všecka x a všecka $f(x)$ úměrna výrazu $\mathfrak{A}_k(x)$; k tomu jest nutno a postačitelno, aby

$$(2 - c_{n-k})\, c_{n-k-1} = 1. \qquad (2)$$

Pak jest

$$f^{(k+1)}(x)\, \mathfrak{A}'_k(x) = (2 - c_{n-k})\, \mathfrak{A}_{k+1}(x)\, f^{(k)}(x) + \mathfrak{A}_k(x)\, f^{(k+2)}(x). \qquad (3)$$

Z tohoto vztahu vyplývá následující důsledek: Budiž $x = \alpha$ nulový bod výrazu $\mathfrak{A}_k(x)$; dále $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$, $f^{(k+1)}(\alpha) \neq 0$. Potom, když x prochází hodnotou α rostouc, podíl $\mathfrak{A}_k(x)/\mathfrak{A}_{k+1}(x)$ jde od hodnot, jejichž znaménko jest

$$-\operatorname{sign} f^{(k)}(\alpha)\, f^{(k+1)}(\alpha),$$

k hodnotám znaménka protivného. Neboť podíl $\mathfrak{A}_k(x)/\mathfrak{A}'_k(x)$ jde od hodnot záporných ke kladným.

Rovnice (2) nám umožňuje vypočísti všecka c_i, je-li známo c_1. Aby věta Newton-Sylvestrova byla platná pro rovnice stupně 2, jest třeba voliti, jak seznáme, c_1 tak, aby $0 \leq c_1 \leq 2$; při hodnotě

2 dává věta ta výsledky přesné pro počet kořenů rovnice stupně druhého. Hodnota 0 pro c_1 jest na základě (2) nepřípustna. Volíme-li $c_1 = 2$, dostáváme ze (2)

$$(2 - c_2)\, c_1 = 1,\ c_2 = \tfrac{3}{2},\ \text{obdobně}\ \ c_3 = \tfrac{4}{3}, \ldots, c_i = \frac{i+1}{i}; \tag{4}$$

Volíme-li $c_1 = 2 - \varepsilon$, kde $0 < \varepsilon < 2$, máme stejně

$$c_2 = \frac{3 - 2\varepsilon}{2 - \varepsilon}, \quad c_3 = \frac{4 - 3\varepsilon}{3 - 2\varepsilon}, \ldots, c_i = \frac{i + 1 - i\varepsilon}{i - (i-1)\,\varepsilon} \tag{4'}$$

Hodnoty (4), (4′) jsou v následujícím obojí přípustné, pokud jsou čísla kladná. Tomu bude vyhověno při každém n, požadujeme-li ještě pro ε podmínku $\varepsilon \leqq 1$.

Konečně jest třeba ještě rozhodnouti, zda výrazy $\mathfrak{A}_k(x)$ mohou býti rovny identicky nule. Snadnou úvahou vyplývá, že, má-li býti $\mathfrak{A}_k(x) = 0$ identicky, k tomu jest nutno, aby $f^{(k-1)}(x)$ bylo tvaru

$$f^{(k-1)}(x) = d(x - s)^{n-k+1};\ d,\ s\ \text{konstanty.}$$

Pak jest

$$\mathfrak{A}_k(x) = d^2(x - s)^{2n-2k}[(n - k + 1)^2 - c_{n-k}(n - k + 1)(n - k)]$$

Výraz tento jest rovný nule vskutku, volíme-li pro c_i hodnoty (4); volíme-li však (4′), pak

$$\mathfrak{A}_k(x) = \frac{d^2\,(n - k + 1)\,\varepsilon}{n - k - (n - k - 1)\,\varepsilon}\,(x - s)^{2n-2k},$$

což jest výraz, který není identicky rovný nule; jest rovný nule jenom pro tu hodnotu, pro kterou i $f^{(k)}(x)$ jest rovno nule; jinak jest stále kladný. Na základě této okolnosti *budeme výrazům* $\mathfrak{A}_k(x)$, *když identicky vymizí, přisuzovati hodnoty kladné pro všecka x různá od nulového bodu výrazu* $f^{(k)}(x)$.

II.

Uvedu nyní větu Newton-Sylvestrovu v předběžném znění. Buďtež a, b dvě hodnoty, pro které žádný z výrazů $f(x)$, $f^{(k)}(x)$, $\mathfrak{A}_0(x)$, $\mathfrak{A}_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ není rovný nule (ledaže by některá z $\mathfrak{A}_k(x)$ byla rovna identicky nule, pak ta $\mathfrak{A}_k(a)$, $\mathfrak{A}_k(b)$ pokládáme za čísla kladná). Budiž p_a počet změn znaménkových v řadě prvé z řad (A), když za x dosadíme a; při tom však jenom takové změny znaménkové bereme v úvahu, jimž v druhé řadě jest přiřazen sled při $x = a$. Obdobný význam nechť má p_b. Pak věta Newton-Sylvestrova zní: *Počet kořenů rovnice $f(x) = 0$ položených mezi a, b, kde $a < b$, jest buď rovný $p_a - p_b$ aneb jest o sudý počet menší.*

Abychom větu tu dokázali, uvažujme nejprve počet změn znaménkových v prvé řadě (A) pro $x = a$, jimž v druhé řadě — rovněž pro $x = a$ — jest přiřazena změna znaménková. Tento počet označíme q_a. Nejprve lze tvrditi q_a jest číslo sudé. Neboť $\mathfrak{A}_0(a) > 0$, $\mathfrak{A}_n(a) > 0$ a lze tedy druhou řadu z (A), když do ní dosadíme $x = a$, rozložiti na několik oddílů tak, že prvý člen i poslední člen jeho má znaménko $+$. Ku př. kdyby $n = 7$ a měli bychom v druhé řadě tato znaménka pro $x = a$

$$+ - + - - + - +,$$

rozdělili bychom druhou řadu na tyto tři oddíly

$$\mathfrak{A}_0(a),\ \mathfrak{A}_1(a),\ \mathfrak{A}_2(a);\ \mathfrak{A}_2(a),\ \mathfrak{A}_3(a),\ \mathfrak{A}_4(a),\ \mathfrak{A}_5(a);\ \mathfrak{A}_5(a),\ \mathfrak{A}_6(a),\ \mathfrak{A}_7(a).$$

Uvažujeme-li druhý oddíl s příslušnými $f^{(k)}(a)$, máme dvojřadu

$$\begin{matrix} f''(a), & f'''(a), & f^{(4)}(a), & f^{(5)}(a) \\ \mathfrak{A}_2(a), & \mathfrak{A}_3(a), & \mathfrak{A}_4(a), & \mathfrak{A}_5(a). \end{matrix} \qquad (+)$$

Poněvadž $\mathfrak{A}_3(a)$ podle předpokladu jest záporné a $\mathfrak{A}_3(a) = f'''^2(a) - c_4 f''(a) f^{(4)}(a)$, mají $f''(a)$, $f^{(4)}(a)$ stejné znaménko; jelikož $\mathfrak{A}_4(a) < 0$, mají $f'''(a)$ a $f^{(5)}(a)$ stejné znaménko. Poskytuje tudíž prvá řádka v $(+)$ buď samé změny znaménkové aneb samé sledy. Jest tudíž příspěvek druhého oddílu k číslu q_a buď 2 aneb 0. A tak jest tomu v každém takovém oddílu, kde na kraji mají $\mathfrak{A}_k(a)$ znaménka $+$, uvnitř vesměs $-$.

Jest tedy vskutku q_a (a obdobně i q_b) číslo sudé. Z toho následuje, že $p_a - p_b$ se lišiti může od počtu kořenů rovnice $f(x) = 0$ pouze o číslo sudé (neboť $p_a + q_a - (p_b + q_b)$ se liší od počtu kořenů rovněž o číslo sudé; následuje to z věty pravící, že, jsou-li $f(a)$, $f(b)$ znaménka protivného, počet kořenů mezi a, b jest lichý atd.).

Věta Newton-Sylvestrova jest platna, jak snadno lze se přesvědčiti pro případ, že $f(x) = a_0(x - s)^n$, jakož i pro $n = 2$, jak čtenář snadným počtem dokáže. Budeme předpokládati, že věta jest dokázána pro případ, že stupeň rovnice jest menší než n a dokážeme ji pro rovnici stupně n-tého.

Počet změn znaménkových v prvé z řad (A) při $x = a$, jimž přísluší ve druhé z řad (A) rovněž pro $x = a$ sledy znaménkové, označíme p'_a. Budeme vyšetřovati rozdíl $p_a - p'_a$. Jestliže sign $f(a) = $ sign $f'(a)$, jest vždy $p_a - p'_a = 0$. Patrno to jest, když $\mathfrak{A}_1(a) > 0$. Avšak i když $\mathfrak{A}_1(a) < 0$, jest $p_a - p'_a = 0$, neboť pak i sign $f''(a) = $ sign $f(a)$ a znaménka tří počátečních členů jsou v řadách (A)

$$\begin{matrix} \varepsilon, & \varepsilon, & \varepsilon, \\ +, & -, & \eta; \end{matrix} \qquad \varepsilon = \pm 1,\ \eta = \pm 1$$

v řadách ($\bar{A}$) jsou znaménka dvou počátečních členů

$$\begin{matrix} \varepsilon, & \varepsilon, \\ +, & \eta. \end{matrix}$$

Jelikož pak ostatní členové v řadě (A) se shodují s ostatními členy v řadách ($\bar{A}$), jest rovnost $p_a - p'_a = 0$ pro tento případ patrna.

Zbývá vyšetřiti případ sign $f'(a) = -$ sign $f(a)$. Tu jsou dvě možnosti:

I) sign $\mathfrak{A}_1(a) = +1$ (sign $\overline{\mathfrak{A}}_1(a)$ jest vždy při $f'(a) \neq 0$ rovno $+1$). Tu jest $p_a - p'_a = 1$, jakož bezprostředně patrno.

IIa) sign $\mathfrak{A}_1(a) = -1$, sign $\mathfrak{A}_2(a) = +1$. Tu tři, resp. dva počáteční členové řad (A) resp. ($\bar{A}$) mají tato znaménka

$$(\mathrm{A}) \left\{ \begin{matrix} \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon \\ 1 & -1, & 1 \end{matrix} \right. , \qquad (\bar{\mathrm{A}}) \left\{ \begin{matrix} -\varepsilon, & \varepsilon \\ 1, & 1 \end{matrix} \right.$$

I jest $p_a - p'_a = -1$.

IIb) sign $\mathfrak{A}_1(a) = -1$, sign $\mathfrak{A}_2(a) = -1$.

V tomto případě máme tato znaménka na počátku řad (A) resp. ($\bar{A}$)

$$(\mathrm{A}) \left\{ \begin{matrix} \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon \\ 1, & -1, & -1 \end{matrix} \right. , \qquad (\bar{\mathrm{A}}) \left\{ \begin{matrix} -\varepsilon, & \varepsilon \\ 1, & -1 \end{matrix} \right. .$$

Tu máme $p_a - p'_a = +1$.

Tím vyšetřeny všechny možné vztahy mezi p_a a p'_a, při čemž mlčky předpokládáno, že v (A) a ($\bar{A}$) jsou voleni titíž numeričtí součinitelé c_i.

Vedle předpokladu pro a, b na počátku II. odst. učiněného zavedu prozatím ještě tento předpoklad: Mezi a a b leží toliko jediná hodnota c, pro kterou jeden nebo i více výrazů z $f(x)$, $f^{(k)}(x)$, $\mathfrak{A}^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ jsou rovny nule. Dokáži pak větu Newton-Sylvestrovu pro takový interval (a, b) a to nejprve v případě, že

α) v (a, b) není nulová hodnota polynomu $f(x)$. Je-li v tomto případě věta $N.$-$S.$ platna, pak $p_a - p_b \geqq 0$. Dejme tomu, že neplatí pro polynom $f(x)$; pak jest $p_a - p_b \leqq -2$ (neboť $p_a - p_b = -1$ býti nemůže, jelikož $p_a - p_b$ a počet kořenů rovnice $f(x)$ mezi a, b jsou čísla stejné parity). Potom ani $f'(x)$ nemůže míti nulový bod v (a, b), neboť, kdyby $f'(x)$ měla nulový bod v (a, b), bylo by $p'_a - p'_b \geqq 1$ podle věty N.-S. předpokládané pro polynomy stupně $n - 1$. Avšak podle úvahy předchozí (týkající se vztahů mezi p_a, p'_a) jest

$$p_a - p_b \geqq p'_a - p'_b - 2, \text{ tedy } p_a - p_b \geqq -1,$$

což odporuje nerovnině $p_a - p_b \leqq -2$. Neplatí-li tedy věta N.-S.

pro $f(x)$ a pro interval (a, b) a nemá-li $f(x)$ v (a, b) nulový bod, nemá jej i $f'(x)$. Současně jest patrno, že $p'_a - p'_b$ nutně jest rovno nule a že zároveň musí, aby nebyla v platnosti věta N.-S. pro $f(x)$ a pro (a, b),

$$p_a - p'_a = -1, \quad p_b - p'_b = +1, \quad p_a - p_b = -2,$$

t. j. v bodě a nastává případ IIa), v bodě b pak buď případ I) aneb IIb). Nastává-li v a případ IIa), v bodě b pak případ I), jsou počáteční tři členové řad (A) těchto znamének

$$\text{v bodě } a \begin{cases} \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon \\ 1, & -1, & 1 \end{cases} \qquad \text{v bodě } b \begin{cases} \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon' \\ 1, & 1, & \eta' \end{cases}.$$

Mění tedy $\mathfrak{A}_1(x)$ v intervalu (a, b) své znaménko a má tedy v (a, b) nulový bod c, kde $a < c < b$. Avšak podle důsledku vyplývajícího z rovnice (3) má býti podíl $\mathfrak{A}_1(x) : \mathfrak{A}_2(x)$ pro x v intervalu $(a, c - 0)$ kladný, ve skutečnosti jest však záporný. Nemůže tedy nastati v bodě a případ IIa), v bodě b pak případ I.

Nastává-li v bodě a případ IIa), v bodě b případ IIb), máme pro znaménka počátečních členů v řadách (A) tyto hodnoty

$$\text{v bodě } a \begin{cases} \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon, & -\varepsilon \\ 1, & -1, & 1, & 1 \end{cases} \qquad \text{v bodě } b \begin{cases} \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon, & -\varepsilon \\ 1, & -1, & -1, & 1 \end{cases}$$

Mohli jsme vypisovati již znaménka čtvrtých členů na základě těchto úvah: Nejprve sign $f'''(b) =$ sign $f'(b)$, neboť sign $\mathfrak{A}_2(b) = -1$. $\mathfrak{A}_2(x)$ mění své znaménko, má tedy v bodě c nulový bod i jest tedy sign $\mathfrak{A}_2(a) : \mathfrak{A}_3(a) = +1$, sign $\mathfrak{A}_2(b) : \mathfrak{A}_3(b) = -1$; konečně $f'''(x)$ není rovno nule v bodě c, neboť pak by bylo rovno tam i $f''(x)$ nule a sign $f''(b) =$ sign $f'''(b)$, tedy sign $f'''(a) =$ sign $f'''(b)$.

Ze znamének vypsaných jest patrno, že $p_a = 1 + p'''_a$, $p_b = 1 + p'''_b$, kde p'''_a, p'''_b jsou čísla obdobná ku p_a, p_b, avšak pro polynom $f'''(x)$ stupně $n - 3$, pro který tedy platí $p'''_a - p'''_b \geqq 0$. I jest tedy $p_a - p_b \geqq 0$ a není tedy $p_a - p_b = -2$. Jest tedy i tento případ nemožný a jest vždy $p_a - p_b \geqq 0$, není-li v (a, b) nulový bod polynomu $f(x)$.

β) V (a, b) budiž nulový bod c polynomu $f(x)$ a to řádu r-tého. Pak má $f'(x)$ nulový bod v c řádu $r - 1$. Můžeme psáti $f(x)$, $f'(x)$, $\mathfrak{A}_1(x)$ v tomto tvaru

$$f(x) = u_0(x - c)^r + u_1(x - c)^{r+1} + \ldots, \quad f'(x) = ru_0(x - c)^{r-1} + \ldots,$$

$$f''(x) = r(r-1)\, u_0(x - c)^{r-2} + \ldots,$$

$$\mathfrak{A}_1(x) = ru_0^2(x - c)^{2r-2} + v_1(x - c)^{2r-1} + \ldots$$

$u_0, u_1, v_1, \ldots$ jsou čísla nezávislá na x; sign u_0 značme ε. Z výrazů napsaných jsou patrna tato počáteční znaménka v řadách (A) pro $x = a$, resp. pro $x = b$

$$\text{v bodě } a \begin{cases} (-1)^r\varepsilon, & (-1)^{r-1}\varepsilon \\ +1, & +1 \end{cases} \qquad \text{v bodě } b \begin{cases} \varepsilon, & \varepsilon \\ 1, & 1 \end{cases}$$

I jest $p_a = p'_a + 1$, $p_b = p'_b$ a poněvadž podle věty N.-S. platné pro mnohočlen $n - 1$ stupně jest $p'_a - p'_b \geqq r - 1$, jest v tomto případě $p_a - p_b \geqq r$; tedy i v tomto případě věta N.-S. dokázána.

Jelikož věta Newton-Sylvestrova jest platna pro součet intervalů $(a, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{h-1}, b)$ — kterýžto součet jest právě interval (a, b) — platí-li pro každý jednotlivý interval, a jelikož každý interval (a, b), o jehož koncových bodech činíme předpoklad na počátku odst. II o a, b učiněný, lze rozložiti v konečný počet intervalů takových, že body, ve kterých mnohočleny $f(x)$, $f^{(k)}(x)$, $\mathfrak{A}_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ nabývají hodnoty nulové, nacházejí se uvnitř jednotlivých intervalů a v každém intervalu toliko jediný takový bod, jest patrna věta N.-S. platí pro každý interval (a, b), jehož koncové body jsou v platnosti pouze předpoklad na počátku II. odstavce učiněný.

III.

Věta Newton-Sylvestrova byla dokázána v předcházejícím pro interval (a, b) za předpokladu, že žádná z funkcí $f(x)$, $f^{(k)}(x)$, $\mathfrak{A}_k(x)$; $k = 1, 2, \ldots, n$ není rovna nule ani pro $x = a$, ani pro $x = b$. Chceme-li užíti této věty i v případech, kdy tato podmínka není splněna, nahradíme interval (a, b) intervalem $(a + \delta, b - \delta)$, kde δ jest číslo takové, že v intervalech $(a + 0, a + \delta)$, $(b - \delta, b - 0)$ není položen žádný nulový bod uvedených právě funkcí. Označíme stručně číslo δ, které si můžeme zvoliti libovolně malé, jakožto nekonečně malé. Dosazování ve skutečnosti netřeba prováděti, neboť nám běží pouze o znaménka a ta jsou z předcházejících úvah ihned patrna. Objasním věc na příkladech.

Dejme tomu, že bychom obdrželi pro $x = a$ tyto hodnoty (u hodnot od nuly různých vypisuji jenom znaménka)

i	4	5	6	7	8	9
$f^{(i)}(x)$	$+$,	0,	0,	0,	0,	$-$
$\mathfrak{A}_i(x)$	$+$,	0,	0,	0,	0,	$+$

$(\times)$

Vypsané hodnoty pro $\mathfrak{A}_4(a), \mathfrak{A}_5(a), \ldots, \mathfrak{A}_9(a)$ vyplývají jednoznačně z hodnot prvého řádku. Má tudíž $f^{(5)}(x)$ v bodě a nulový bod 4. řádu. Lze ji psáti $f^{(5)}(x) = + b_0(x - a)^4 + b_1(x - a)^5 + \ldots$, kde b_0 jest číslo záporné (neboť $f^{(9)}(x)$ — což jest 4. derivace z $f^{(5)}(x)$ — jest v bodě $x = a$ podle předpokladu záporná). Pro funkce $\mathfrak{A}_5(x)$, $\mathfrak{A}_6(x)$, $\mathfrak{A}_7(x)$, $\mathfrak{A}_8(x)$ máme tyto rozvoje (uvádím pouze prvé, o znaménku rozhodující členy)

$$\mathfrak{A}_5(x) = b'(x-a)^3 + \ldots,\ \mathfrak{A}_6 = b''(x-a)^6 + \ldots,\ \mathfrak{A}_7 = b'''(x-a)^4 + \\ + \ldots,\ \mathfrak{A}_8 = b''''(x-a)^2 + \ldots,$$

kde b', b'', b''', b'''' jsou čísla kladná. Nastupují tudíž místo uvedených hodnot pro $x = a + \delta$ hodnoty o znaménkách

$$\begin{matrix} + & - & - & - & - & - \\ + & + & + & + & + & + \end{matrix}$$

které poskytují pouze jednu jednotku jakožto příspěvek k počítání čísla p_a. Kdyby hodnoty uvedené v $(\times)$ byly vznikly při dosazování čísla b (horní hranice daného intervalu), dostali bychom pro $x = b - \delta$ tato znaménka u vyznačených funkcí

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + & - \\ + & - & + & + & + & + \end{matrix}$$

poskytující 3 jednotky pro číslo p_b.

Jako další příklad budu předpokládati tyto hodnoty při $x = a$ (resp. $x = b$):

i	3	4	5	6	7	8
$f^{(i)}(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\mathfrak{A}_i(x)$	$-$	0	0	0	0	$+$

Pro $x = a + \delta$ máme na základě důsledku odvozeného z rovnice (3) tato znaménka

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \end{matrix}$$

tedy žádný příspěvek k p_a. Kdyby předpokládané hodnoty byly platny při $x = b$, dostali bychom pro $b - \delta$ hodnoty znamének

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & + & + & + & + \end{matrix}$$

které dávají pro p_b příspěvek 4 jednotek.

Obdobně lze postupovati v každém případě bez jakýchkoliv potíží a netřeba uváděti větu platnou pro každé a, b, která, jak se zdá, nebyla by zvlášť jednoduchá a prakticky by byla téměř bezvýznamná.

Konečně lze ještě dokázanou větu doplniti následovně. Můžeme ji totiž použíti na rovnici $f(-x) = 0$ a interval $(-b, -a)$; počet kořenů nové rovnice v $(-b, -a)$ jest rovný počtu kořenů rovnice $f(x) = 0$ v intervalu (a, b). Dvojřada (A) se v tomto případě redukuje na dvojřadu

$$\begin{matrix} f(-x), & -f'(-x), & +f''(-x), & -f'''(-x), & \ldots, & (-1)^n f^{(n)}(-x) \\ \mathfrak{A}_0(-x), & -\mathfrak{A}_1(-x), & \mathfrak{A}_2(-x), & \mathfrak{A}_3(-x), & \ldots, & \mathfrak{A}_n(-x). \end{matrix}$$

Dosadíme-li do této dvojřady za x hodnotu $-a$ a počítáme-li počet změn znaménkových v prvé řádce doprovázených sledem v řádce druhé, jest to totéž, jako bychom v řadě (A) počítali počet sledů znaménkových v řádce prvé doprovázených sledem v řádce druhé. Můžeme tudíž tvrditi: Jsou-li funkce $f(x)$, $f^{(k)}(x)$, $\mathfrak{A}_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ vesměs pro $x = a$ i pro $x = b$ různé od nuly (nehledě k případu, ve kterém $\mathfrak{A}_k(x)$ identicky jsou rovny nule, kdy $\mathfrak{A}_k(x)$ pokládáme za čísla kladná i pro $x = a$ i pro $x = b$), pak jest počet kořenů rovnice $f(x) = 0$ položených mezi a, b buď rovný číslu $s_b - s_a$ aneb menší než $s_b - s_a$ a to o sudé číslo. Při tom jest s_a počet sledů znaménkových v prvé řadě z řad (A), jimž v druhé řadě jsou přiřazeny rovněž sledy; obdobný význam má s_b. Dále jest $b > a$.

IV.

Důkaz věty Newton-Sylvestrovy, který byl v předcházejícím podán pro rovnice $f(x) = 0$, kde $f(x)$ jest mnohočlen n-tého stupně, dá se rozšířiti i na případ, že $f(x)$ jest funkce holomorfní na jisté části osy reálných čísel (na kteréž části nabývá $f(x)$ hodnoty reálné). Nechť jest tedy ve všech bodech intervalu $(\alpha + 0, \beta - 0)$ položeného na reálné ose $f(x)$ funkcí holomorfní (t. j. v každém bodě toho intervalu rozvinutelnou v řadu mocninnou) a budiž $\alpha \leqq a < b \leqq \beta$; při tom znaménko rovnosti mezi α a a (a obdobně mezi β a b) jenom tenkráte jest přípustno, když holomorfie nastává i pro $x = \alpha$. V okolí bodu a jest pak platný tento rozvoj

$$f(x) = f(a) + \frac{x - a}{1!} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

Budeme předpokládati, že počet změn znaménkových v řadě

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a), \ldots$$

jest konečný. Pak od jistého indexu p počínajíc mají $f^{(k)}(a)$ stále totéž znaménko aneb jsou rovny nule. Jestliže $b > a$ — jakož předpokládáme — mají i $f^{(k)}(b)$ pro $k = p,\ p + 1,\ p + 2, \ldots$ rovněž stále totéž znaménko a stejné jako čísla $f^{(k)}(a)$, $k = p$, $p + 1, \ldots$ (pokud nejsou ovšem rovna nule).

Uvažujme pak dvojřadu

$$\left.\begin{matrix} f(x), & f'(x), & f''(x), & \ldots, & f^{(p)}(x) \\ \mathfrak{A}_0(x), & \mathfrak{A}_1(x), & \mathfrak{A}_2(x), & \ldots, & \mathfrak{A}_p(x) \end{matrix}\right\}, \qquad \text{(B)}$$

kde

$$\mathfrak{A}_k(x) = [f^{(k)}(x)]^2 - c_{p-k} f^{(k-1)}(x) f^{(k+1)}(x),\ \mathfrak{A}_0(x) = f^2(x),$$

při čemž c_j jsou čísla ve (4) stanovená, $c_0 = 0$. Označíme-li počet změn znaménkových vznikajících pro $x = a$ v prvé řadě z řad (B), jež jsou doprovázeny v řadě druhé sledy znaménkovými, znakem p_a, pak můžeme vysloviti větu Sylvestr-Newtonovu pro funkci $f(x)$ takto:

Počet nulových bodů funkce $f(x)$ v intervalu $(a + 0, b - 0)$ jest buď $p_a - p_b$ anebo jest o sudé číslo menší. Při tom nulový bod řádu r-tého se počítá za r nulových bodů a zároveň se předpokládá, že žádné z čísel $f^{(k)}(a)$, $f^{(k)}(b)$, $\mathfrak{A}_k(x)$, $\mathfrak{A}_k(b)$, $k = 0, 1, \ldots, p$ není rovno nule. Není-li tento poslední předpoklad splněn, pak nahradíme-li čísla p_a, p_b vhodnými čísly podle návodu podaného ve (III), *zůstane věta Sylvestrova i tu v platnosti.*

Nazývejme funkci $f(x)$ holomorfní na (a, b), $a < b$, jejíž derivace $f^{(k)}(a)$ pro $k = p, p + 1, p + 2, \ldots$ mají (pokud nejsou rovny nule) totéž znaménko, *funkce p-členné na* (a, b). Pak $f'(x)$ jest na (a, b) $(p - 1)$-členná. Věta N.-S. jest očividně platna pro funkce 0-členné a jednočlenné. Podáme-li tedy důkaz, že věta N.-S. jest platna pro p-členné funkce, je-li platna pro funkce p'-členné, kde $p' < p$, pak věta N.-S. dokázána. Avšak onen důkaz jest identický s důkazem svrchu podaným tvrzení, že věta N.-S. jest platna pro rovnice algebraické stupně n-tého, platí-li pro rovnice stupně menšího než n; netřeba jej opakovati a lze tedy větu N.-S. pokládati za dokázanou pro rovnice $f(x) = 0$, kde $f(x)$ jest holomorfní na (α, β) a má předpokládané vlastnosti.

Lze dokonce tohoto výsledku použíti pro rovnice algebraické k jistému rozšíření věty N.-S. Objasním to na specielním případě. Budiž dána rovnice stupně šestého $a_0x^6 + a_1x^5 + \ldots + a_5x + a_6 = 0$. Pak pro odhad počtu kořenů kladných (t. j. kořenů v intervalu $(0, \infty)$) užíváme podle věty N.-S. této dvojřady

$$\begin{array}{l} a_6, \; a_5, \qquad a_4, \qquad a_3, \qquad a_2, \qquad a_1, \quad a_0 \\ a_6^2, \; a_5^2 - \frac{2}{1}\cdot\frac{6}{5}\, a_4a_6, \; a_4^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\, a_3a_5, \; a_3^2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\, a_2a_4, \; a_2^2 - \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\, a_1a_5, \ldots, a_0^2 \end{array} \tag{C}$$

(v prvé řadě jsou $f^{(k)}(0)$ dělené k, v druhé řadě $\mathfrak{A}_k(0)$ sestrojené podle (I) a dělené $(k!)^2$; dvojřadu pro $x = \infty$ netřeba vypisovati, neboť první její řada má vesměs sledy znaménkové). Počet kořenů kladných dané rovnice stupně šestého jest roven podle věty N.-S. nejvýše počtu změn znaménkových v prvé z řad (C) doprovázených v druhé řadě sledy (omezují se na případ, kdy žádné z čísel v (C) není rovno nule, v opačném případě pomocí úvah odst. III příslušné číslo snadno najdeme).

Budiž první z čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots$, jež jest záporné, a_3. Pak k stanovení počtu kořenů kladných dané rovnice st. 6 jest zpravidla výhodnější užití jiné dvojřady a sice té, kterou dostaneme, pokládáme-li levou stranu dané rovnice za funkci v $(0, \infty)$ 4-člennou; neboť $f^{(4)}(0)$, $f^{(5)}(0), \ldots$ jsou, pokud jsou různy od nuly, čísla kladná. Dostaneme tak dvojřadu

$$\left.\begin{array}{l} a_6, \; a_5, \qquad a_4, \qquad a_3, \qquad a_2 \\ a_6^2, \; a_5^2 - \frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\, a_4a_6, \; a_4^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\, a_3a_5, \; a_3^2 - \frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\, a_2a_4, \; a_2^2 \end{array}\right\} \tag{C'}$$

Použití této dvojřady jest stejné jako dvojřady (C), součinitelé numeričtí při druhých členech ve výrazech pro $\mathfrak{A}_1(0), \ldots$ jsou v (C′) v absolutní hodnotě větší než v (C), čímž se právě stane, že v (C′) dostáváme v druhém řádku často více hodnot záporných než v (C).

*

Sur le théorème de Newton-Sylvester concernant la séparation des racines des équations algébriques.

(Extrait de l'article précédent.)

J'ai donné, dans ce Journal, t. 36 (1907), p. 49, une démonstration du théorème de Descartes et de Budan, basée sur le principe d'induction mathématique. On peut appliquer cette méthode de même au théorème de Newton, démontré, cependant, seulement par Sylvester (Philosophical Magazine, IV. série, t. 31, 1866, p. 214). Ici encore, on réussit à simplifier essentiellement la démonstration du théorème, lequel en découle sans aucune restriction. Je donne, de plus, une extension du théorème de N.-S. aux fonctions analytiques; il en suit une simplification ultérieure de ce théorème pour les équations algébriques.