Jaroslav Jarušek

O některých semiinvariantech vyjádřených determinanty

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 2, 114--124

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122371

O některých semiinvariantech vyjádřených determinanty.

Dr. *Jaroslav Jarušek.*

1. V teorii invariantních útvarů přicházejí různé determinanty tvaru

$$U = \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & \ldots & A_{0n} \\ A_{10} & A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n0} & A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

o jejichž členech platí

$$\Delta A_{ik} = \varphi(i) A_{i-1,k} + \psi(k) A_{ik,-1}, \quad \varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0. \tag{2}$$

Při tom A_{ik} jsou funkce koeficientů $a_i, b_i, \ldots$ a

$$\Delta a_i = i a_{i-1}, \quad \Delta b_i = i b_{i-1}, \ldots .$$

Skládá se tedy operace Δ ze dvou částí, z operace Δ_1 vzhledem k prvnímu indexu a operace Δ_2 vzhledem k druhému indexu. Jest tedy

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \quad \Delta_1 A_{ik} = \varphi(i) A_{i-1,k}, \quad \Delta_2 A_{ik} = \psi(k) A_{i,k-1}. \tag{3}$$

Totéž platí pro součiny, neboť

$$\Delta A_{ik} A_{i'k'} = A_{ik} [\varphi(i') A_{i'-1,k'} + \psi(k') A_{i',k'-1}] +$$
$$+ A_{i',k'} [\varphi(i) A_{i-1,k} + \psi(k) A_{i,k-1}] = \Delta_1 A_{ik} A_{i'k'} + \Delta_2 A_{ik} A_{i'k'},$$

při čemž

$$\Delta_1 A_{ik} A_{i'k'} = \varphi(i) A_{i-1,k} A_{i'k'} + \varphi(i') A_{ik} A_{i'-1,k'},$$
$$\Delta_2 A_{ik} A_{i'k'} = \psi(k) A_{i,k-1} A_{i'k'} + \psi(k') A_{ik} A_{i',k'-1}. \tag{4}$$

Jak se provede Δ_1 a Δ_2 na libovolný součin, je patrno. Rovněž tak rovnice $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ platí pro součty. Následkem toho na libovolnou racionálnou celistvou funkci $F(A)$ výrazů A_{ik} provedeme operaci Δ dle vzorce

$$\Delta F(A) = \Delta_1 F(A) + \Delta_2 F(A).$$

Na libovolný subdeterminant

$$\begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha'} & A_{\alpha\beta'} & A_{\alpha\gamma'} & . \\ A_{\beta\alpha'} & A_{\beta\beta'} & A_{\beta\gamma'} & . \\ A_{\gamma\alpha'} & A_{\gamma\beta'} & A_{\gamma\gamma'} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

z U provede se operace Δ podobně, jako se provádí derivování determinantů. Operaci Δ_1 provedeme vzhledem k řádkám a operaci Δ_2 vzhledem k sloupcům. Dostaneme

$$\Delta \begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha'} & A_{\alpha\beta'} & . \\ A_{\beta\alpha'} & A_{\beta\beta'} & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \varphi(\alpha) \begin{vmatrix} A_{\alpha-1,\alpha'} & A_{\alpha-1,\beta'} & . & . \\ A_{\beta\alpha'} & A_{\beta\beta'} & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} +$$

$$+ \varphi(\beta) \begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha'} & A_{\alpha\beta'} & . & . \\ A_{\beta-1,\alpha'} & A_{\beta-1,\beta'} & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} + \dots + \psi(\alpha') \begin{vmatrix} A_{\alpha,\alpha'-1} & A_{\alpha\beta'} & . \\ A_{\beta,\beta'-1} & A_{\beta\beta'} & . \\ . & . & . \end{vmatrix} +$$

$$+ \psi(\beta') \begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha'} & A_{\alpha\beta'-1} & . & . \\ A_{\beta\alpha'} & A_{\beta\beta'-1} & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} + \dots \qquad (5)$$

Z toho ihned plyne, že determinant U je semiinvariantem; neboť prováděním operací Δ_1, Δ_2 na jednotlivé řádky a sloupce mimo první dostáváme determinanty o dvou stejných řádkách nebo sloupcích a při provádění těchto operací na první řádku nebo sloupec dostaneme koeficienty 0.

2. Uvedeme několik příkladů semiinvariantů tvaru (1).

V determinantu

$$V = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & . & . & . & a_{n+1} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & . & . & . & a_{2n} \end{vmatrix}$$

jest
$$A_{ik} = a_{i+k}$$
$$\Delta A_{ik} = (i+k)\, a_{i+k-1} = i\, A_{i-1\,k} + k\, A_{i\,k-1}$$

a jest tedy V semiinvariantem.

Proveďme Δ na subdeterminant z V

$$T = \begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma & . \\ a_{\alpha'} & . & . & . \\ a_{\beta'} & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix},$$

při čemž n předpokládáme dostatečně velké, což je přípustné. Takových subdeterminantů ve V je $\alpha+1$. První řádka T může býti vzata z kterékoli z prvních $\alpha+1$ řádek V. Předpokládejme, že jest z řádky r-té. Pak jest

$$T = \begin{vmatrix} A_{r,\alpha-r} & A_{r,\beta-r} & A_{r,\gamma-r} & . & . \\ A_{r+\alpha'-\alpha,\,\alpha-r} & A_{r+\alpha'-\alpha,\,\beta-r} & . & . & . \\ A_{r+\alpha''-\alpha,\,\alpha-r} & A_{r+\alpha''-\alpha,\,\beta-r} & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

a tudíž podle (5)

$$\varDelta T = (\alpha - r)\begin{vmatrix} A_{r,\,\alpha-r-1} & A_{r,\,\beta-r} & A_{r,\,\gamma-r} \\ A_{r+\alpha'-\alpha,\,\alpha-r-1} & \cdots & \cdots \\ A_{r+\alpha''-1,\,\alpha-r-1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} +$$

$$+ (\beta - r)\begin{vmatrix} A_{r,\,\alpha-r} & A_{r,\,\beta-r-1}, & A_{r,\,\gamma-r} \\ A_{r+\alpha'-\alpha,\,\alpha-r} & A_{r+\alpha'-\alpha,\,\beta-r-1}, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ r\begin{vmatrix} A_{r-1\,\alpha-r} & A_{r-1,\,\beta-r} & A_{r-1,\,\gamma-r} & \cdot \\ A_{r+\alpha'-\alpha,\,\alpha-r} & \cdots & \cdots & \cdot \\ A_{r+\alpha''-r,\,\alpha-r} & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \end{vmatrix} +$$

$$+ (r + \alpha' - \alpha)\begin{vmatrix} A_{r,\,\alpha-r} & , A_{r,\,\beta-r}, & \cdot \\ A_{r+\alpha'-\alpha-1,\,\alpha-r} & \cdots & \cdot \\ A_{r+\alpha''-\alpha,\,\alpha-r} & \cdots & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdot \end{vmatrix} + \ldots$$

a, zavedeme-li opět a_{i+k} místo A_{ik} a vypisujeme-li pouze indexy,

$$\varDelta\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & . \\ \alpha' & . & . & \\ \beta' & . & . & \\ . & . & . & \end{vmatrix} = (\alpha - r)\begin{vmatrix} \alpha - 1 & \beta & \gamma & . \\ \alpha' - 1 & . & . & . \\ \alpha'' - 1 & . & . & \\ . & . & . & . \end{vmatrix} + (\beta - r)\begin{vmatrix} \alpha & \beta - 1 & \gamma & . \\ \alpha' & . & . & . \\ \alpha'' & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} +$$

$$+ (\gamma - r)\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma - 1 & . \\ \alpha' & . & . & . \\ \alpha'' & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} + \ldots$$

$$r\begin{vmatrix} \alpha - 1 & \beta - 1 & \gamma - 1 & . \\ \alpha' & . & . & . \\ \alpha'' & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} + (r + \alpha' - \alpha)\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & . \\ \alpha' - 1 & . & . & . \\ \alpha'' & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} +$$

$$+ (r + \alpha'' - \alpha)\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & . \\ \alpha' & . & . & . \\ \alpha'' - 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} + \ldots \qquad (6)$$

Porovnáním těchto vzorců pro různá r dostaneme vztah

$$\begin{vmatrix} \alpha-1 & \beta-1 & \gamma-1 & . \\ \alpha' & . & . & . \\ \alpha'' & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & . \\ \alpha'-1 & . & . & . \\ \alpha'' & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & . \\ \alpha' & . & . & . \\ \alpha''-1 & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} + \dots =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha-1 & \beta & \gamma & . \\ \alpha'-1 & . & . & . \\ \alpha''-1 & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta-1 & \gamma & . \\ \alpha' & . & . & . \\ \alpha'' & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma-1 & . \\ \alpha' & . & . & . \\ \alpha'' & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} + \dots \qquad (7)$$

Tento vzorec vyjadřuje subdeterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha-1 & \beta-1 & \gamma-1 & . \\ \alpha' & . & . & . \\ \alpha'' & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}, \quad \alpha' > \alpha,$$

v němž rozdíl indexů první a druhé řádky je aspoň dvě, pomocí subdeterminantů vybraných z menšího počtu řádek z V.

Je-li $\alpha' = \alpha + 1$, $\alpha'' > \alpha + 2$, pak na př. při subdeterminantech 3. řádu bude podle (7) determinant z $\alpha'' - \alpha + 1$ řádek

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha+2 & . & . \\ \alpha'' & . & . \end{vmatrix}$$

vyjádřen pomocí subdeterminantů z $\alpha'' - \alpha$ řádek. Provedením operace Δ pro $r = 0$ na tuto rovnici dostaneme vyjádření determinantu

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha+1 & . & . \\ \alpha'' & . & . \end{vmatrix}$$

pomocí determinantů z $\alpha'' - \alpha$ řádek a pomocí determinantů

$$\begin{vmatrix} \alpha-1 & \beta & \gamma \\ \alpha+1 & . & . \\ \alpha''-1 & . & . \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta-1 & \gamma \\ \alpha+2 & . & . \\ \alpha'' & . & . \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma-1 \\ \alpha+2 & . & . \\ \alpha'' & . & . \end{vmatrix}$$

z $\alpha'' - \alpha + 1$ řádek, u nichž však rozdíl indexů prvních dvou řádek je dvě a tudíž dají se podle (7) vyjádřit pomocí subdeterminantů z $\alpha'' - \alpha$ řádek.

Tak dostaneme pro determinanty třetího stupně

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha+1 & . & . \\ \alpha'' & . & . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma+1 \\ \alpha+1 & . & . \\ \alpha''-1 & . & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha+1 & \beta & \gamma \\ \alpha+2 & . & . \\ \alpha'' & . & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta+1 & \gamma \\ \alpha+1 & . & . \\ \alpha''-1 & . & . \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha+1 & \beta+1 & \gamma+1 \\ \alpha+2 & . & . \\ \alpha''-2 & . & . \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \beta+1 & \gamma+1 \\ \alpha+1 & . & . \\ \alpha''-2 & . & . \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha+1 & \beta & \gamma+1 \\ \alpha+2 & . & . \\ \alpha''-1 & . & . \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \alpha+1 & \beta+1 & \gamma \\ \alpha+2 & . & . \\ \alpha''-2 & . & . \end{vmatrix}.$$

Pro determinanty 4. stupně dostaneme vzorec

$$\begin{bmatrix} - \\ 12 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 12 \\ - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 \\ - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 \\ - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 23 \\ - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 \\ - \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 34 \\ - \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} - \\ 33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - \\ 34 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - \\ 44 \end{bmatrix}$$

a podobně obecně. Při tom závorky označují determinanty a v nich hořejší číslice značí sloupce a dolní číslice řádky původního determinantu, v nichž byly indexy sníženy o jednu. Tyto vzorce platí i při libovolném rozdílu indexů prvního a druhého řádku.

Podobně v obecném případu, kdy daný subdeterminant má k prvních řádek s indexy po sobě následujícími

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \dots \\ \alpha+1 & . & . & \dots \\ \alpha+2 & . & . & \dots \\ \vdots & & & \\ \alpha+k-1 & . & . & \dots \\ \alpha' & . & . & \dots \\ \alpha'' & . & . & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}$$

užijme vzorce (7) na determinant

$$\begin{vmatrix} \alpha+1 & \beta+1 & \gamma+1 & \dots \\ \alpha+2 & \dots & & \\ \dots & & & \\ \alpha+k & \dots & & \\ \alpha' & \dots & & \\ \alpha'' & \dots & & \\ \dots & & & \end{vmatrix}$$

a na rovnici tak získanou provedeme $(k-1)$krát operaci Δ s $r=0$, redukujíce při tom subdeterminaty, u nichž se počet řádek, z kterých jsou vybrány, nezmenšil, pomocí vzorců platných pro nižší k.

Tím je dokázáno, že každý subdeterminant z V řádu m se dá vyjádřiti pomocí subdeterminantů vzatých z prvních m řádek V. Tvoříme-li semiinvarianty ze subdeterminantů determinantu V, stačí tudíž bráti jen subdeterminanty z prvních po sobě jdoucích řádek.

3. Dosadíme-li do V místo řady členů

$$a_0, a_1, \dots, a_{\nu-1}, a_\nu, a_{\nu+1}, \dots, a_n$$

řadu

$$0, 0, \dots, 0, \frac{\nu!}{0!}a_0, \quad \frac{(\nu+1)!}{1!}a_1, \dots, \frac{n!}{(n-\nu)!}a_{n-\nu},$$

dostaneme determinant V', jehož členy

$$A_{ik}=\frac{(i+k)!}{(i+k-\nu)!}a_{i+k-\nu}$$

splňují rovnici

$$\Delta A_{ik}=(i+k)\frac{(i+k-1)!}{(i+k-1-\nu)!}a_{i+k-\nu-1}=i\,A_{i-1,k}+k\,A_{i,k-1}.$$

Následkem toho V' je semiinvariantem a pro jeho subdeterminanty platí tytéž vzorce jako pro subdeterminanty z V.

4. Resultantu forem

$$f(x)=a_0\,x_1^n+\binom{n}{1}a_1\,x_1^{n-1}\,x_2+\dots+a_n\,x_2^n,$$

$$\varphi(x)=b_0\,x_1^m+\binom{m}{1}b_1\,x_1^{m-1}\,x_2+\dots+b_m\,x_2^m$$

ve tvaru Euler-Sylvestrově

$$R=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & n\,a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 0 \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & n\,a_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & m\,b_{m-1} & b_m \\ 0 & 0 & \dots & b_m & 0 \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & m\,b_1 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

označme

$$\begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0,n+m-1} \\ A_{10} & A_{11} & \dots & A_{1,n+m-1} \\ \dots & & & \dots \\ A_{m-1\,0} & A_{m-1,1} & \dots & A_{m-1,n+m-1} \\ B_{00} & B_{01} & \dots & B_{0,n+m-1} \\ \dots & & & \dots \\ B_{n-1\,0} & B_{n-1,1} & \dots & B_{n-1,n+m-1} \end{vmatrix},$$

takže

$$A_{ik}=0 \text{ pro } i+k<m-1 \text{ a } i+k>n+m-1,$$

$$A_{ik}=\binom{n}{k+i-m+1}a_{k+i-m+1} \text{ pro } m-1\leqq i+k\leqq n+m-1,$$

$$B_{ik}=0 \text{ pro } i+k<n-1 \text{ a } i+k>n+m-1,$$

$$B_{ik}=\binom{m}{k+i-n+1}b_{k+i-n+1} \text{ pro } n-1\leqq i+k\leqq n+m-1,$$

nebo obecně

$$A_{ik}=\binom{n}{k+i-m+1}a_{k+i-m+1},\ B_{ik}=\binom{m}{k+i-n+1}b_{k+i-n+1},$$

při čemž koeficienty a_i, b_j s indexy zápornými nebo většími, než jaké mají dané formy, rovnají se nule. Pak platí v každém případu

$$\varDelta A_{ik}=(n+m-i-k)\binom{n}{i+k-m}a_{i+k-m}=$$
$$=-i\,A_{i-1\,k}+(n+m-k)\,A_{i\,k-1},$$

$$\varDelta B_{ik}=(n+m-i-k)\binom{m}{i+k-n}b_{i+k-n}=$$
$$=-i\,B_{i-1,k}+(n+m-k)\,B_{i,k-1}.$$

Zde sice $\psi(0)=n+m$ není rovno nule, ale provedením Δ na první sloupec dostaneme samé nuly a jest tedy R semiinvariantem.

5. Položíme-li

$$A_{ik}=a_i b_k - a_k b_i,$$

při čemž a_i, b_i jsou, jako dříve, koeficienty forem $f(x)$, $\varphi(x)$, pak determinant

$$S=\begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0s} \\ A_{10} & A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s0} & A_{s1} & \dots & A_{ss} \end{vmatrix}, \quad s \leqq m \leqq n,$$

jest semiinvariantem, neboť

$$\Delta A_{ik}=i(a_{i-1} b_k - a_k b_{i-1}) + k(a_i b_{k-1} - a_{k-1} b_i)=$$
$$= i A_{i-1,k} + k A_{k-1,i}.$$

6. Resultantu forem

$$f_1(x)=a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$
$$\varphi(x)=b_0 x^m + m b_1 x^{m-1} + \dots + b_m, \; n \geqq m,$$

obdržíme také vyloučením x z n rovnic

$$x^s . \varphi = B_{s0} x^{n-1} + B_{s1} x^{n-2} + \dots + B_{s,n-1}, \; s=0, 1, \dots, n-m-1,$$
$$\varphi . f_{n-m+s} - f . \varphi_s = A_{s0} x^{n-1} + A_{s1} x^{n-2} + \dots + A_{s\,n-1},$$
$$s=0, 1, \dots, m-1,$$

při čemž

$$f_s = a_0 x^s + \binom{n}{1} a_1 x^{s-1} + \dots + \binom{n}{s} a_s,$$

$$\varphi_s = b_0 x^s + \binom{m}{1} b_1 x^{s-1} + \dots + \binom{m}{s} b_s.$$

Odtud obdržíme

$$B_{ik} = \binom{m}{i+k-n+m+1} b_{b+h-n+m+1},$$

$$A_{ik} = \binom{m}{i+k+1} a_0 b_{i+k+1} + \binom{n}{1}\binom{m}{i+k} a_1 b_{i+k} + \dots +$$

$$+ \binom{n}{n-m+i}\binom{m}{k+1-n+m} a_{n-m\pm i} b_{k+1-n+m} -$$

$$-\binom{n}{i+k+1} b_0\, a_{i+k+1} - \binom{n}{i+k}\binom{m}{1} b_1\, a_{i+k} - \dots -$$

$$-\binom{n}{k+1}\binom{m}{i} b_i\, a_{k+1},$$

při čemž koeficienty a_s, b_s s indexy zápornými nebo většími než n resp. m rovnají se nule.

Pak

$$\Delta B_{ik} = (n-i-k)\binom{m}{i+k-n+m} b_{i+k-n+m} =$$

$$= (n-k)\, B_{i,\,k-1} - i\, B_{i-1,\,k}.$$

$\Delta\, A_{ik}$ určíme provedením Δ na rovnici

$$\varphi \,.\, f_{n-m+i} - f \,.\, \varphi_i = A_{i0}\, x^{n-1} + A_{i1}\, x^{n-2} + \dots + A_{i\,n-1}.$$

Při nehomogenních proměnných musíme položiti $\Delta\, x = -1$;

pak $\quad \Delta f_i = (n-i) f_{i-1}, \quad \Delta \varphi_i = (m-i)\, \varphi_{k-1}$

a provedením Δ dostaneme

$$(m-i)\,(\varphi f_{n-m+i-1} - f \varphi_{i-1}) =$$

$$= (m-i)\,(A_{i-1\,0}\, x^{n-1} + A_{i-1,1}\, x^{n-2} + \dots + A_{i-1,\,n-1}) =$$

$$= \Delta A_{i0} \,.\, x^{n-1} + \Delta A_{i1}\, x^{n-2} + \dots + \Delta A_{i\,n-1}$$

$$- (n-1) A_{i0}\, x^{n-2} - \dots - A_{i\,n-2}.$$

Odtud $\quad \Delta A_{ik} = (n-k)\, A_{i\,k-1} + (m-i)\, A_{i-1\,k}.$

Ze vzorců pro ΔB_{ik}, ΔA_{ik} plyne, že prováděním Δ na resultantu

$$R = \begin{vmatrix} B_{00} & B_{01} & \dots & B_{0\,n-1} \\ B_{10} & B_{11} & \dots & B_{1\,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n-m-1,0} & \dots & \dots & B_{n-m-1,\,n-1} \\ A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0,\,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m-1,0} & A_{m-1,1} & \dots & A_{m-1,\,n-1} \end{vmatrix}$$

vzhledem k prvnímu indexu podle řádek, mimo řádku $A_{00}, A_{01} \dots, A_{0,n-1}$ a vzhledem k druhému indexu podle sloupců, mimo první, dostáváme determinanty o dvou stejných řádkách resp. sloupcích; při provádění Δ vzhledem k prvnímu indexu na první řádku dostáváme koeficienty nuly. Zbývá tedy vyšetřiti ještě zvlášť první sloupec a řádku $A_{00}, A_{01}, \dots A_{0,n-1}$.

Při prvním sloupci jedná se o stanovení výrazů

$$\Delta_2 B_{ik} = \Delta B_{ik} - \Delta_1 B_{ik} = \Delta B_{ik} + i B_{i-1,\,k},$$

$$\Delta_2 A_{ik} = \Delta A_{ik} - \Delta_1 A_{ik} = \Delta A_{ik} - (m-i) A_{i-1,k},$$

pro $k=0$. Poněvadž

$$B_{i0}=0,\ i=0, 1,\ldots, n-m-2;\ B_{n-m-1,0}=b_0,$$

jest $\Delta B_{i0}=0$ a $\qquad \Delta_2 B_{i0}=0.$

Dále pro $n>m$ je

$$A_{i0}=\binom{m}{i+1} a_0\, b_{i+1},$$

$$\Delta A_{i0}=(m-i) A_{i-1,0}$$

a tedy $\Delta_2 A_{i0}=0$. Tudíž pro $n>m$ operace Δ_2 vzhledem k prvnímu sloupci odpadá.

Zbývá vyšetřiti pro řádku $A_{00}, A_{01}, \ldots A_{0,k-1}$ operaci

$$\Delta_1 A_{0k} = \Delta A_{0k} - (n-k) A_{0k-1}.$$

Tu jest

$$A_{0k} = \sum_{r=0}^{n-m} \binom{n}{r}\binom{m}{k+1-r} a_r\, b_{k+1-r} - \binom{k+1}{n} a_{k+1}\, b_0;$$

z toho

$$\Delta A_{0k} = (m+n-k) \sum_{r=0}^{n-m-1} \binom{n}{r}\binom{m}{k-r} a_r\, b_{k-r} +$$

$$+ (n-k)\binom{n}{n-m}\binom{m}{k+m-n} a_{n-m}\, b_{k-n+m} -$$

$$-(n-k)\binom{n}{k} a_k\, b_0.$$

Avšak

$$A_{0,k-1} = \sum_{r=0}^{n-m} \binom{n}{r}\binom{m}{k-r} a_r\, b_{k-r} - \binom{n}{k} a_k\, b_0$$

a tedy

$$\Delta_1 A_{0k} = \Delta A_{0k} - (n-k) A_{0,k-1} =$$

$$= m \sum_{r=0}^{n-m-1} \binom{n}{r}\binom{m}{k-r} a_r\, b_{k-r} = m \sum_{r=0}^{n-m-1} \binom{n}{r} a_r\, B_{n-m-k-1,k}.$$

Dostaneme tudíž

$$\Delta_1 A_{00}, \Delta_1 A_{01}, \ldots, \Delta_1 A_{0,n-1},$$

sečteme-li řádky matice

$$\begin{Vmatrix} B_{00} & B_{01} & \cdots & B_{0n-1} \\ B_{10} & B_{11} & \cdots & B_{1n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{n-m-1\,0}, & \cdots & & B_{n-m-1,n-1} \end{Vmatrix}$$

násobené čísly

$$m\binom{n}{n-m-1}a_{n-m-1},\ldots,m\binom{n}{1}a_1, m a_0.$$

Tudíž determinant vzniklý z R provedením $\varDelta_1$ na řádku $A_{00}, A_{01}\ldots$, rovná se nule.

Následkem toho R je semiinvariantem a každý jeho subdeterminant utvořený z prvních k řádek a prvních k sloupců a jenom takový subdeterminant je také semiinvariantem.

Pro $n = m$ jest

$$A_{i0} = A_{0i} = \binom{n}{i+1}(a_0 b_{i+1} - a_{k+1} b_0)$$

$$\varDelta A_{i0} = (n-i) A_{i-1,0}, \quad \varDelta A_{0k} = (n-i)\ A_{0i-1}$$

a tudíž

$$\varDelta_2 A_{i0} = 0, \quad \varDelta_1 A_{0i} = 0.$$

Následkem toho provádění $\varDelta_1$ na první řádku a $\varDelta_2$ na první sloupec odpadá.

*

Sur les semi-invariants exprimés par des déterminants.

(Extrait de l'article précédent.)

On rencontre, dans la théorie des formes, différents semi-invariants ou covariants exprimés par des déterminants de la forme

$$U = \|A_{ik}\|,$$

les éléments desquels satisfont à l'équation

$$\varDelta A_{ik} = \varphi(i)\ A_{i-1,k} + \psi(k) A_{i,k-1}, \ \varphi(0) = 0, \ \psi(0) = 0.$$

On applique l'opération $\varDelta$, bien connue d'ailleurs, à un sousdéterminant quelconque de U, ce qui s'effectue d'après la formule simple (5). Il en suit directement que U satisfait à l'équation $\varDelta U = 0$. L'auteur considère, à titre d'éxemple, plusieurs déterminants de cette éspèce, p. ex., les résultants de deux formes, le déterminant

$$V = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n} \end{vmatrix},$$

etc. On peut appliquer l'opération $\varDelta$ au sous-déterminant de V d'une manière différente; on obtient ainsi des formules exprimant un sous-déterminant quelconque de l'ordre k de V à l'aide de ses sous-déterminants des premières k lignes.