Josef Kounovský
Mechanická konstrukce ellipsoidu

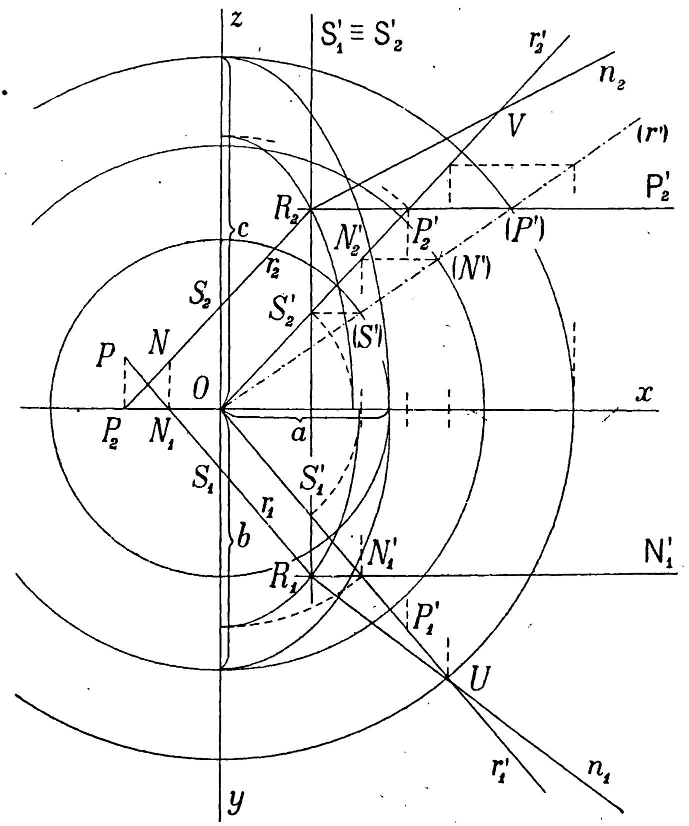
Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 2, 133--139

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122369

Mechanická konstrukce ellipsoidu.

Píše dr. *Jos. Kounovský.*

1. Mám na mysli ellipsoid určený osami a specielní pohyb přímky v prostoru tak, aby tři její body posunovaly se ve třech stěnách pravoúhlého trojhranu; libovolný další bod přímky vytvořuje ellipsoid,



Obr. 1.

mající tyto stěny za hlavní roviny. Jsou-li P, N a S body přímky, které pohybují se v rovinách **P**, **N** a **S**, jež zvolíme za půdorysnu, nárysnu a stranorysnu, a A její bod, který vytvořuje uvažovaný ellipsoid, jsou $PA = c$, $NA = b$ a $SA = a$ poloosy ellipsoidu na osách z, y a x.

Mechanické sestrojení trojosého ellipsoidu z jeho os jest úplně obdobné s konstrukcí ellipsy pomocí kružnic, opsaných nad jejími osami jako průměry. Sestrojíme-li (obr. 1.) tři kulové plochy $\mathbf{K}_a, \mathbf{K}_b$ a $\mathbf{K}_c$, opsané nad osami ellipsoidu jako průměry a mající tedy střed v počátku souřadnic (středu ellipsoidu) O a poloměry a, b a c, možno z libovolné polohy r' poloměru těchto koulí a jeho průsečíků P', N' a S' resp. s koulemi $\mathbf{K}_c, \mathbf{K}_b$ a $\mathbf{K}_a$ odvoditi bod ellipsoidu, sestrojíme-li těmi body postupně roviny $\mathbf{P}' \parallel \mathbf{P}$, $\mathbf{N}' \parallel \mathbf{N}$, $\mathbf{S}' \parallel \mathbf{S}$. Společný bod R rovin $\mathbf{P}'$, $\mathbf{N}'$ a $\mathbf{S}'$ jest bodem ellipsoidu a jemu příslušná poloha pohybující se přímky jest $r \parallel r'$; vskutku protíná průmětny v bodech P, N a S tak, že čtveřiny $PNSR$ a $P'N'S'O$ jsou shodné. Průsečíky přímky r' s koulemi sestrojeny otočením do polohy (r') s body (P'), (N') a (S') v nárysně.

Je-li na ellipsoidu zvolen bod R na př. nárysem R_2, možno touto konstrukcí snadno odvoditi půdorys R_1; sestrojíme rovinu $\mathbf{S}'$ a $\mathbf{P}'$, tato určí (r') i r'_2 s příslušnými body, zpětnou rotací sestrojíme r_1' a rovina $\mathbf{N}'$ stanoví již R_1. Obdobně odvodil by se nárys bodu ellipsoidu z libovolně zvoleného půdorysu.

Nechť pohybuje se přímka r tak, že půdorys $PN_1S_1R_1$ čtveřiny bodové na ní zůstává shodným. Ježto body N_1 a S_1 pohybují se po osách x a y, vytvořuje bod R_1 ellipsu o poloosách $a_1 = R_1S_1$ a $b_1 = R_1N_1$, homothetickou s hlavním řezem ellipsoidu v půdorysně. Jest to půdorys ellipsy, kterou při tomto pohybu přímky, kdy nemění se její odchylka od hlavní roviny $\mathbf{P}$, vytvořuje bod R v rovině $\mathbf{P}'$. Konstrukce této ellipsy v půdorysně dána jest soustřednými kružnicemi opsanými poloměry $OS'_1 = a_1$ a $ON'_1 = b_1$. Učiníme-li $N'_1U = OS'_1$, jest $R_1U \equiv n_1$ normála ellipsy a tedy půdorys normály ellipsoidu v bodě R.

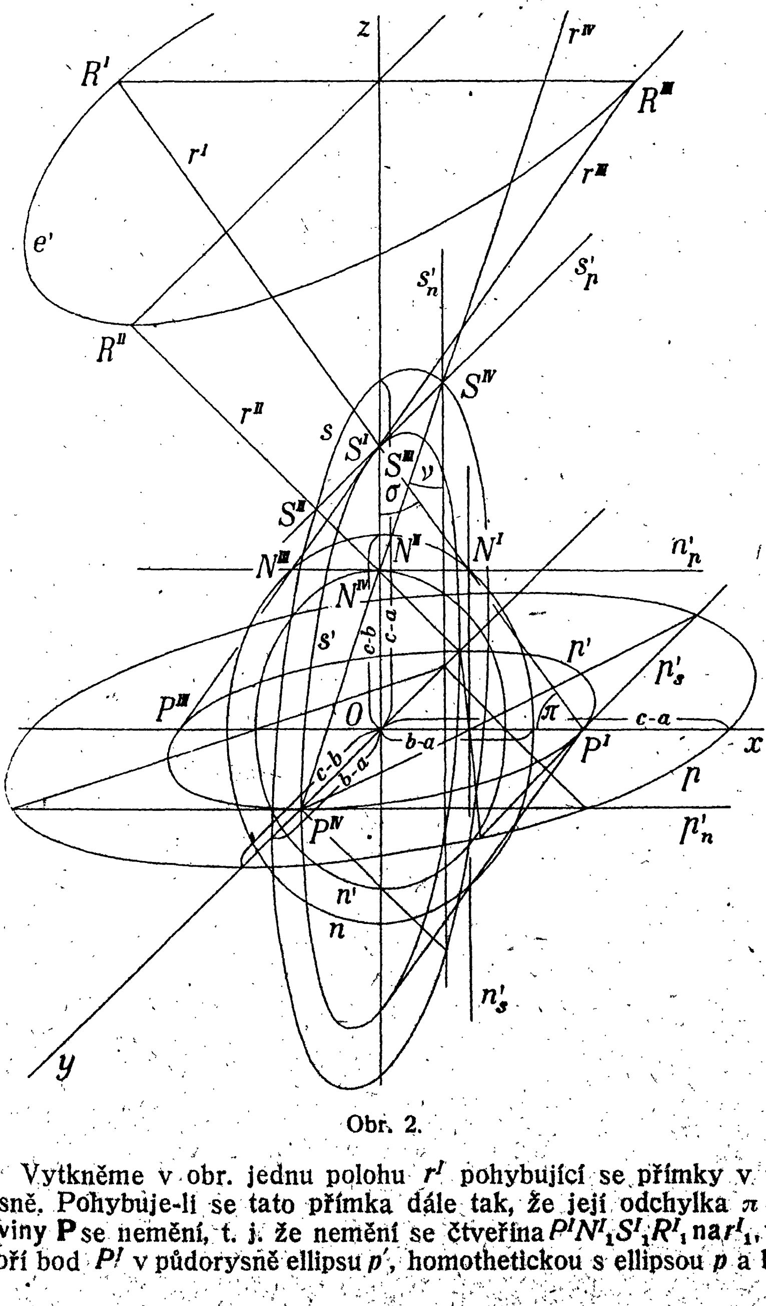
Obdobně sestrojíme nárys normály $n_2 \equiv R_2V$, učiníme-li $P'_2V = OS'_2$, jak plyne z pozorování ellipsy na ploše, sestrojené bodem R rovnoběžně s nárysným hlavním řezem. Tím dána jest i tečná rovina v bodě R ellipsoidu.

2. Je-li ellipsoid dán poloosami a, b a c, jest třeba nanésti na pohybující se přímku r všechny poloosy od téhož bodu R, jinak v libovolném smyslu. Při konstrukci ellipsoidu pomocí soustředných koulí bylo by pak na přímce r' vytknouti čtveřinu shodnou se čtveřinou zvolenou na přímce r, při čemž střed O nahradí bod R. Předpokládejme jako v úvahách předcházejících, že naneseny byly poloosy od bodu R v témž smyslu tak, že pohybující se čtveřina má sled $PNSR$ $(c > b > a)$.

Pohybuje-li se přímka v rovinách $\mathbf{P}$, $\mathbf{N}$ a $\mathbf{S}$, vytvořuje bod R hlavní řezy. Při tom opisuje

v rovině $\mathbf{P}$ bod P ellipsu p o poloosách $c-a$, $c-b$,
v rovině $\mathbf{N}$ bod N ellipsu n o poloosách $c-b$, $b-a$,
v rovině $\mathbf{S}$ bod S ellipsu s o poloosách $b-a$, $c-a$.

V obr. 2. znázorněny tyto ellipsy v šikmém průměru isometrickém; šikmé průměty označeny jako útvary v prostoru.



Obr. 2.

Vytkněme v obr. jednu polohu r^I pohybující se přímky v nárysně. Pohybuje-li se tato přímka dále tak, že její odchylka π od roviny **P** se nemění, t. j. že nemění se čtveřina $P^I N^I_1 S^I_1 R^I_1$ na r^I_1, vytvoří bod P^I v půdorysně ellipsu p', homothetickou s ellipsou p a bod

R^I ellipsu e homothetickou s hlavním řezem e v půdorysně. Při tom se pohybuje bod N^I na přímce $n'_p \parallel x$ v nárysně a bod S^I na přímce $s'_p \parallel y$ ve stranorysně. Vzdálenosti těchto přímých trajektorií od půdorysny jsou úměrny poloosám $c—b$, resp. $c—a$ ellipsy p nebo ellipsy p' s ní homothetické. I patrno, že při pohybu ellipsoidickém s třemi body v rovinách tvořících pravoúhlý trojhran **všechny polohy přímky, které mají konstantní odchylku od roviny hlavní, vyplňují zborcenou plochu čtvrtého stupně** P_4. Uvažovaná zborcená plocha má za řídící útvary ellipsu p' a přímky n'_p a s'_p, které jsou jejími přímkami dvojnými.

V obr. vytčena ještě druhá poloha r^{III} přímky zborcené plochy v nárysně a obě její polohy r^{II} a r^{IV} v stranorysně. Přímky r^I, r^{II}, r^{III} a r^{IV} jsou torsální přímky plochy P_4 s kuspidálními body resp. N^I, S^{II}, N^{III} a S^{IV}. Body úseček $N^I N^{III}$ a $S^{II} S^{IV}$ dvojných řídících plošných přímek n'_p a s'_p procházejí dvojiny reálných tvořících přímek plochy, jich části mimo uvedené úsečky jsou na ploše isolovány. Úběžná přímka roviny P jest isolovanou dvojnou tvořící přímkou plochy, která jest dle uspořádání Sturmova 7. druhu.

Body N^I a N^{III} nacházejí se na ellipse n, body S^{II} a S^{IV} na ellipse s. Sledujeme-li zborcenou plochu při pohybu přímky s konstantní odchylkou ν od nárysny, probíhá na př. bod N ellipsu n' homothetickou s n, bod P přímku $p'_n \parallel x$ a bod S přímku $s'_n \parallel z$; kuspidální body plochy jsou na p a s. A při zborcené ploše s konstantní odchylkou σ povrchových přímek od stranrysny opisuje na př. bod S ellipsu s' homothetickou ku s, bod N přímku $n'_s \parallel z$ a bod P přímku $p'_s \parallel y$; kuspidální body plochy jsou na n a p.

Souhrny poloh pohybující se přímky v hlavních rovinách jsou torsální přímky všech zborcených ploch pohybu ellipsoidického; obalují v nich pravidelné asteroidy. Ellipsy opsané v hlavních rovinách body, jež se v nich pohybují, na torsálních přímkách jsou geometrickými místy kuspidálních bodů těch ploch zborcených.

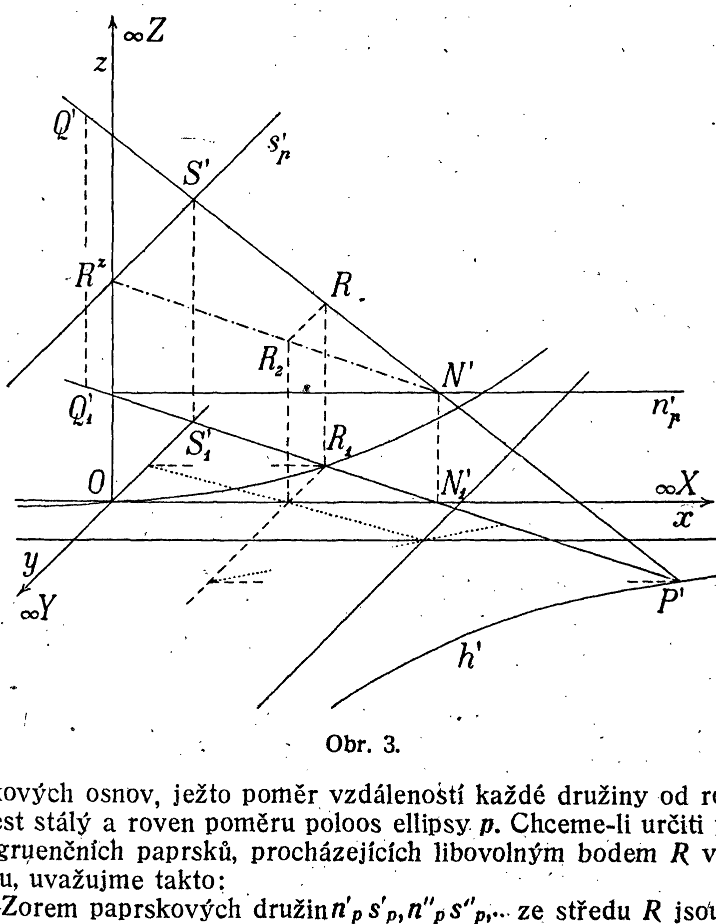
Uvažovaná zborcená plocha jest specielním případem geometrického místa přímky pohybující se čtyřmi svými body ve čtyřech daných rovinách, při kterémž pohybu všechny body přímky opisují elipsy.*)

3. Souhrn poloh pohybující se přímky elliptického pohybu jest, jak známo, paprsková kongruence (6, 2). Že kongruence jest druhé třídy, jest zjevno. Libovolná rovina **R** protíná hlavní roviny **P**, **N** a **S** v přímkách p_r, n_r a s_r. Posunuje-li se pohybující se přímka bodem P na p_r a bodem N na n_r, vytvořuje bodem S v rovině **R** ellipsu r_s a ta protíná přímku s_r ve dvou bodech, pro které vyhovuje poloha

*) Viz A. Mannheim, Principes et développements de géométrie cinématique, str. 169 a násl., Paříž 1894.

přímky uvažovanému pohybu ellipsoidickému. Oba kongruenční paprsky v rovině **R** a její průsečnice s hlavními rovinami jsou tečnami téže paraboly, jak ukazují identické bodové trojiny obou kongruenčních paprsků.

Řád kongruence bývá obyčejně určován řezem dvou komplexů paprskových, jimž kongruence přísluší. V našem případě možno výhodně použíti k tomu zborcených ploch $\mathbf{P}_4$, na př. těch, které na rovině **P** mají za stopy ellipsy p', p'',... homothetické ku p. Řídící přímky n'_p s'_p, n''_p s''_p těchto ploch jsou družiny dvou podobných pa-



Obr. 3.

prskových osnov, ježto poměr vzdáleností každé družiny od roviny **P** jest stálý a roven poměru poloos ellipsy p. Chceme-li určiti počet kongruenčních paprsků, procházejících libovolným bodem R v prostoru, uvažujme takto:

Zorem paprskových družin $n'_p\, s'_p, n''_p\, s''_p,\ldots$ ze středu R jsou dva projektivní rovinové svazky, jichž výtvarem jest rovnostranně hyperbolická plocha kuželová $\mathbf{K}_2$ o vrcholu R, ježto stopami obou projektivních rovinových svazků na **P** jsou dva projektivní svazky paprskové o vrcholech v bodech $_\infty X$ a $_\infty Y$ na osách a ty vytvořují hyperbolu rovnostrannou h' (obr. 3.). Ježto i paprsek RO jest průsečnicí jedné rovinové družiny, prochází h' středem O a jest Apolloniovou hyperbolou ellips souosých s hlavním řezem. Jedna družina rovin prochází úběžnými přímkami rovin N a S, t. j. hyperbola h' prochází též půdorysem R_1 a kužel K_2 má tři povrchové přímky rovnoběžné s osami ellipsoidu. Na ploše K_2 nacházejí se všechny polohy pohybující se přímky r, jež bodem R procházejí. Vytkněme bodem R příčku jedné družiny $n'_p s'_p$; spojnice $R^z R_2$ určuje její bod N' na n'_p. Obecně není to kongruenční paprsek, ježto trojina $P'N'S'$ není shodna s trojinou PNS pohybu ellipsoidického. Shodnost tuto zaručila by na př. rovnost úseček $P'N' = PN$. Učiňme na všech povrchových přímkách kužele K_2 délku $RQ' = P'N'$ i co do smyslu; pak geometrickým místem bodu Q'_1 jest zase rovnostranná hyperbola h'', procházející body $_\infty X$ a $_\infty Y$, vytvořená svazkem o vrcholu R_1 a paprskovou osnovou, procházející bodem $_\infty X$, která jest patrně shodnou se zorem hyperboly h' z bodu $_\infty X$ a tedy projektivní se svazkem o vrcholu R_1, ležícím na h'; h'' prochází bodem R_1. Body Q' nacházejí se na půdorysně promítací ploše válcové V_2 s řídící hyperbolou h''. Plochy K_2 a V_2 mají společnou povrchovou přímku $R\ _\infty Z$ a protínají se v prostorové křivce třetího stupně k_3, geometrickém místu bodu Q'. Pro paprsky kongruenční jest $RQ' = P'N' = PN$ a jejich body Q jsou na kulové ploše opsané ze středu R poloměrem PN. Procházejí tedy kongruenční paprsky průsečíky této kulové plochy a křivky k_3, čímž dán jest jejich počet 6. Kongruence jest tedy šestého řádu.

*

Une construction mécanique de l'ellipsoïde.

(Extrait de l'article précédent.)

On considère l'ellipsoïde déterminé par ses axes et le mouvement spécial d'une droite dont trois points restent sur les faces d'un trièdre trirectangle; un point quelconque de la droite engendre un ellipsoïde ayant ces faces pour trois plans principaux. On construit l'ellipsoïde à l'aide de trois sphères, décrites sur ses axes comme diamètres. Par les points d'intersection d'un demi-diamètre avec les sphères on construit des plans parallèles aux plans principaux de l'ellipsoïde; le point commun de ces plans appartient à l'ellipsoïde et la droite, menée par ce point, parallèle au demi-diamètre, est une position de la droite mobile dans l'espace.

De plus, on étudie les positions de la droite mobile ayant un angle constant avec un plan principal. Leur ensemble détermine une surface réglée du quatrième ordre, dont les directrices sont: une ellipse dans ce plan principal et deux droites située dans les deux autres plans principaux et parallèles aux axes de l'ellipse. Les ensembles des positions de la droite mobile dans les plans principaux sont les droites torsales de toutes les sur-

faces réglées du mouvement ellipsoïdique et elles enveloppent, dans ces plans des astroïdes régulières. Les ellipses, décrites dans les plans principaux par les points qui se déplacent sur les droites torsales, sont les lieux géométriques des points cuspidales de ces surfaces réglées. La surface considérée est un cas spécial du lieu géométrique de la droite dont quatre points se déplacent sur quatre plans fixes; un point quelconque de cette droite décrit une ellipse.

Enfin l'auteur s'occupe de la congruence engendrée par la droite mobile et démontre, à l'aide de ces surfaces règlées, que cette congruence est du sixième ordre et de la deuxième classe.