Josef Klobouček

Oskulační kvadrika zborcené plochy, dané dvěma soumeznými řídícími křivkami a další třetí křivkou řídící

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 2, 125--132

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122367

Oskulační kvadrika zborcené plochy, dané dvěma soumeznými řídicími křivkami a další třetí křivkou řídicí.

Napsal Dr. *Jos. Klobouček.*

Problém, jehož řešení chci zde podati, vytknul prof. Eduard Weyr na II. sjezdu lékařů a přírodozpytců českých takto:

Na ploše Π jest dána libovolná čára Σ, dále v prostoru jiná libovolná čára Σ_1; tečná rovina α plochy Π, sestrojená v bodě A čáry Σ, protíná čáru Σ_1 v bodech A_1 a spojnice $A A_1$ jsou povrchové přímky zborcené plochy P, jejíž oskulační hyperboloid má se sestrojiti.

Ačkoliv mnohokráte bylo o tomto problému psáno, nebyl přece dosud přesně řešen.

Posledně pokusil se Dr. Jos. Klíma v tomto ročníku Časopisu o nové řešení.*) Problém však zůstal opět neřešen, poněvadž Weyrův předpoklad, kterým se přecházelo od případu zvláštního ke všeobecnému, zůstal opět nevyloučen.

Tento zvláštní případ záleží v tom, že dané dvě soumezné řídicí křivky jsou položeny na kuželové ploše 2. stupně a třetí křivkou jest přímka, nebo obecně i křivka, která se nahradí příslušnou oskulační kuželosečkou.

Při řešení obecného problému předpokládal prof. Weyr, že lze obecnou plochu Π, na které se nacházela čára Σ, zastupující dvě soumezné řídicí křivky, v sousedství bodu A, podél jehož přímky se oskulační kvadrika řešila, nahraditi oskulačním kuželem 2. stupně rozvinutelné plochy tečných rovin vedených podél Σ. Čára Σ nahražena řezem oskulační roviny v A s tímto kuželem.

Chybou tohoto předpokladu jest nesprávné vytknutí infinitesimální konstanty 3. řádu plochy Π v sousedství A. Poněvadž plocha Π jest předem dána, jest nutné, jak bližší rozbor ukazuje, ke konstrukci oskulační kvadriky předem vytknouti dotykový element 3. řádu plochy Π podél čáry Σ v A; na př. kuželosečkou v oskulační rovině čáry Σ v A mající s plochou Π v A styk 3. řádu.

Nelze tedy ke konstrukci použíti kteréhokoliv z oskulačních kuželů 2. stupně, nýbrž jenom oněch kuželů, které obsahují třetí infinitesimální dotykový element čáry Σ v A.

*) Rukopis mé práce odevzdal jsem redakci, dříve než úvaha Dr. Klímy byla vytištěna. Poněvadž můj rukopis nebyl však dosud v tisku, bylo mi možno hned reagovati na článek Dra Klímy. Neúplnost Weyrova řešení, ovšem ne ve smyslu zde vytknutém, byla již dávno známa.

Weyrův předpoklad jest správný pro plochy, jichž třetí dotykový element čáry Σ v A nachází se na oskulačním kuželi, jehož při konstrukci bylo právě použito, takže byl vázán později a nebyl tedy předem volně zvolen. Následující výpočet ukazuje skutečně, že rovnice uvažované oskulační kvadriky obsahuje dvě konstanty 3. řádu. Jedna z nich jest vhodnou volbou systému souřadného eliminována.

Volme tečnou rovinu α plochy Π v bodě A jakožto rovinu souřadnou $x_3 = 0$, bod A jakožto vrchol A'_4; oskulační rovina čáry Σ v bově A budiž rovinou souřadnou $x_2 = 0$ a vrchol A'_2 budiž bodem úvratu rozvinutelné plochy tečných rovin vedených podél čáry Σ. Přímky $A'_4 A'_1$, $A'_4 A'_2$ jsou tedy konjugované tečny plochy. Vrchol A'_1 volme v průsečném bodě tečny čáry Σ v bodě A s oskulační rovinou čáry Σ_1 v bodě A_1; vrcholem A'_3 budiž průsečný bod tečny čáry Σ_1 v bodě A_1 s oskulační rovinou $x_2 = 0$ čáry Σ v bodě A.

Volíme-li tento systém souřadný, bude míti rovnice plochy Π v sousedství bodu A tvar

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{1}{2x_4^2}(m x_1^2 + n x_2^2) + \frac{1}{6 x_4^3}(a_3 x_1^3 + a_1 x_1{}^2 x_2 + a_0 x_2^3) + \dots$$

Čára Σ na ploše Π má rovnice

$$\frac{x_2}{x_4} = \frac{p_3}{6}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3 + \dots, \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{m}{2}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^2 + \frac{a_3}{6}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3 + \dots$$

Stanovíme-li souřadnice roviny tečné plochy Π v bodě čáry Σ, jemuž přísluší hodnota $\frac{x_1}{x_4} = t$, máme

$$\varrho u_1 = m t + \frac{a_3}{2} t^2 + \frac{b_4}{6} t^3 + \dots, \quad \varrho u_2 = \frac{4 n p_3 + b_3}{24} t^3 + \dots,$$

$$\varrho u_3 = -1, \quad \varrho u_4 = -\frac{m}{2} t^2 - \frac{a_3}{3} t^3 - \dots.$$

Pro stanovení oskulačního hyperboloidu H plochy P podél přímky $A A_1$ nahradíme čáru Σ_1 v sousedství bodu A_1 kuželosečkou k_1 o rovnicích

$$x_2^2 - a^2 x_1^2 + b^2 x_3^2 + \lambda (x_2 - a x_1) x_3 = 0, \quad x_2 = \varkappa x_4.$$

Bod A_1 má souřadnice A_1 $(\varkappa, a\varkappa, o, a)$; v tomto bodě mají veškeré kuželosečky k_1 styk 2. řádu a procházejí bodem C přímky AC, která jest harmonická k AA_1 vzhledem ke konjugovaným tečnám $A'_4 A'_1$, $A'_4 A'_2$ plochy Π. Čáru Σ nahradíme v sousedství bodu A kuželosečkou k, která s ní má styk 2. řádu

$$-m x_1^2 + \lambda' x_3^2 + 2\mu' x_1 x_3 + 2 x_3 x_4 = 0, \ x_2 = 0.$$

Mají-li býti křivky k, k_1 stopami téhož hyperboloidu na příslušných rovinách, musí se obě protínati na přímce $A'_1 A'_3$, což dává pro křivky k svazek

$$-m a^2 x_1^2 + m b^2 x_3^2 - m a \lambda x_1 x_3 + 2 a^2 x_3 x_4 = 0, \quad x_2 = 0,$$

jehož čtvrtý vrchol D, od A různý, jest na hraně $A'_4 A'_3$ o souřadnicích

$$D\,(o, o, -2\,a^2, m b^2).$$

Jest patrné, že hledaný hyperboloid H obsahuje přímku $A_1 D$; současně známe také roviny tečné v každém bodě přímky $A A_1$.**) Jedná se nyní o stanovení hodnoty parametru λ, který by podával oskulační hyperboloid. Stanovme řadu bodovou, kterou určují tečné roviny plochy Π vedené v sousedství bodu A v bodech čáry Σ na přímce $A_1 D$.

Jelikož $A_1 D$ má rovnice

$$x_2 - a x_1 = 0, \ 2 a^3 x_1 - m b^2 \varkappa x_3 - 2 a^2 \varkappa x_4 = 0,$$

jest tato řada bodová, označíme-li parametr bodů této přímky

$$\frac{x_1}{x_4} = t_1,$$

dána vazbou parametrů t, t_1

$$\frac{2 a^2}{m b^2} - \frac{m}{2} t^2 - \frac{2 a^3}{m b^2 \varkappa} t_1 + m t t_1 + \frac{a_3}{2} t^2 t_1 + \cdots = 0.$$

Vytvoříme-li nyní hyperboloid H kuželosečkou k, přímkou $A_1 D$ a svazkem rovin na $A C$, máme pro body kuželosečky k v blízkosti bodu A rozvoj

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{m}{2} t^2 + \frac{m^2}{4 a} \lambda t^3 + \ldots;$$

svazek na $A C$ jest $\mu (x_2 + a x_1) - x_3 = 0$, tedy pro stopu na rovině

$x_2 = 0$
$$\frac{x_3}{x_4} = \mu a t.$$

Z toho plyne:

$$\mu = \frac{m}{2 a} t + \frac{m^2}{4 a^2} \lambda t^2 + \ldots$$

Průsečný bod roviny svazku jdoucí bodem o parametru t na křivce k s přímkou $A_1 D$ jest

**) Výsledky tyto jsou již známy z dřívějších úvah o tomto problému.

$$\frac{x_2}{x_4} = at_1, \ \frac{x_3}{x_4} = \frac{2a^2}{m b^2 \varkappa}(a t_1 - \varkappa);$$

vložením do rovnice roviny plyne

$$2 a t_1 \mu - \frac{x_3}{x_4} = 0,$$

čili po vložení za μ

$$\frac{2a^2}{m b^2} - \frac{2a^3}{m b^2 \varkappa} t_1 + m t t_1 + \frac{m^2}{2a} \lambda t^2 t_1 + \ldots = 0.$$

Aby obě rovnice měly pro hodnoty $t = 0$, $t_1 = \frac{\varkappa}{a}$ co největší shodu, jest třeba, aby

$$\frac{m^2 \varkappa}{2a^2} \lambda - \frac{a_3 \varkappa}{2a} + \frac{m}{2} = 0, \text{ tedy}$$

$$\lambda = \frac{a}{m^2 \varkappa}(\varkappa a_3 - m a).$$

Hodnota tato určuje oskulační hyperboloid.

Dříve než určím konstruktivně tuto plochu, chci hodnotu parametru λ odvoditi ještě jinou cestou.

Stanovme vytvořující přímky hyperboloidu H rovinami svazku o ose $A_1 D$ a tečnými rovinami plochy Π.

Roviny tohoto svazku jsou

$$\nu(2a^3 x_1 - m b^2 \varkappa x_3 - 2a^2 \varkappa x_4) - x_2 + a x_1 = 0,$$

vedeme-li rovinu bodem $\frac{x_1}{x_4} = t$ křivky Σ, obdržíme pro γ rovnici

$$(2a^2\nu + 1) a t - \frac{p_3}{6} t^3 - m b^2 \varkappa \left(\frac{m}{2} t^2 + \frac{a_3}{6} t^3\right)\nu - 2a^2 \varkappa \nu = 0,$$

z čehož $\quad 2 a \varkappa \nu = t + \frac{a}{\varkappa} t^2 + \ldots$

Souřadnice rovin svazku $A_1 D$ jsou

$$\varrho v_1 = 2a^2 \varkappa + 2a^3 t + \frac{2a^4}{\varkappa} t^2 + \ldots, \ \varrho v_2 = -2a\varkappa,$$

$$\varrho v_3 = -\varkappa m b^2 t - a m b^2 t^2 + \ldots, \ \varrho v_4 = -2a^2 \varkappa t - 2a^3 t^2 + \ldots$$

a tedy souřadnice vytvořujících přímek

$$_*\pi_{12} = -2\,a\,m\,\varkappa\,t - a\,\varkappa\,a_3\,t^2 + \ldots,$$

$$_*\pi_{13} = 2\,a^2\varkappa + 2\,a^3\,t + \left(\frac{2\,a^4}{\varkappa} - \varkappa\,m^2\,b^2\right)t^2 + \ldots,$$

$$_*\pi_{14} = -m\,a^2\,\varkappa\,t^2 - \left(a^3\,m + \frac{a^2\,a_3\,\varkappa}{3}\right)t^3 + \ldots,$$

$$_*\pi_{34} = 2\,a^2\,\varkappa\,t + 2\,a^3\,t^2 + \ldots,$$

$$_*\pi_{42} = a\,m\,\varkappa\,t^2 + \frac{2}{3}a\,a_3\,\varkappa\,t^3 \ldots,$$

$$_*\pi_{23} = -2\,a\,\varkappa + o\,t + o\,t^2 + \ldots$$

Položme

$$^*\pi_{12} = A_{12}\,t + B_{12}\,t^2 + \ldots, \qquad _*\pi_{34} = A_{34}\,t + B_{34}\,t^2 + \ldots.$$
$$^*\pi_{13} = C_{13} + A_{13}\,t + B_{13}\,t^2 + \ldots, \qquad _*\pi_{42} = B_{42}\,t^2 + D_{42}\,t^3 + \ldots,$$
$$^*\pi_{14} = B_{14}\,t^2 + D_{14}\,t^3 + \ldots, \qquad _*\pi_{23} = C_{23}.$$

Utvořme nyní komplex

$$\alpha\,\pi_{12} + \beta\,\pi_{34} + C_{23}\,\pi_{13} - C_{13}\,\pi_{23} + \gamma\,\pi_{14} + \delta\,\pi_{42} = 0$$

a položme $\quad C_{23}\,\pi_{13} - C_{13}\,\pi_{23} = A\,t + B\,t^2 + \ldots,$

$$A = -4\,a^4\,\varkappa, \quad B = -4\,a^5 + 2\,a\,\varkappa^2\,m^2\,b^2$$

a současně $\quad \alpha\,A_{12} + \beta\,A_{34} + A = 0,$

$$\alpha\,B_{12} + \beta\,B_{34} + \gamma\,B_{14} + \delta\,B_{42} + B = 0.$$

Vyloučíme-li konstanty α, β pomocí rovnic

$$\Delta\,.\,\alpha = B\,A_{34} - A\,B_{34} + \gamma\,A_{34}\,B_{14} + \delta\,A_{34}\,B_{42},$$
$$\Delta\,.\,\beta = A\,B_{12} - B\,A_{12} - \gamma\,A_{12}\,B_{14} - \delta\,A_{12}\,B_{42},$$

kde $\quad \Delta = A_{12}\,B_{34} - B_{12}\,A_{34},$

obdržíme, považujeme-li γ, δ za volné parametry, síť komplexů, jejíž základní plochou jest náš oskulační hyperboloid, neboť rovnice počíná se členy obsahujícími t^3.

Píšeme-li rovnici této sítě

$$\Sigma\,a_{ix}\,\pi_{ix} = 0,$$

jest $\quad a_{12} = 4\,a^3\,m^2\,\varkappa^3\,b^2 - 2\,a^4\,m\,\varkappa^2\,\gamma + 2\,a^3\,m\,\varkappa^2\,\delta,$

$$a_{13} = -2\,a\,\varkappa\,\Delta,$$
$$a_{14} = \Delta\,.\,\gamma,$$
$$a_{23} = -2\,a^2\,\varkappa\,\Delta,$$
$$a_{42} = \Delta\,.\,\delta,$$

$$a_{34} = 4\,a^5\,\varkappa^2\,a_3 - 8\,a^6\,m\,\varkappa + 4\,a^2\,m^3\,\varkappa^3\,b^2 - 2\,a^3\,m^2\,\varkappa^2\,\gamma + 2\,a^2\,m^2\,\varkappa^2\,\delta,$$
$$\Delta = 2\,a^3\,\varkappa\,(\varkappa\,a_3 - 2\,a\,m).$$

Vyhledejme nyní základní plochu této sítě; za tou příčinou stanovme všecky specielní komplexy obsažené v této síti; zaveďme pro zjednodušení počtu novou proměnnou ϱ vztahem

$$\varrho\,.\,\Delta = 4\,a^2\,m^2\,\varkappa^3\,b^2 + 2\,a^2\,m^2\,\varkappa^2\,(\delta - a\,\gamma),$$

položme invariant $\qquad \Sigma\,a_{i\varkappa}\,a_{jh} = 0,$

a vylučme proměnné γ, δ.

Potom bude

$$4\,m\,\varkappa\,\delta = m^2\,\varrho^2 + 2\,a\,(\varkappa\,a_3 - m\,a)\,\varrho - 4\,m^2\,\varkappa^2\,b^2$$

a souřadnice vytvořujících přímek druhé soustavy hyperboloidu H jsou:

$$_*\pi^*_{12} = 4\,a\,m^2\,\varkappa\,\varrho + 8\,a^3\,m\,\varkappa,$$
$$_*\pi^*_{13} = a\,m^2\,\varrho^2 + 2\,a^2\,(\varkappa\,a_3 - m\,a)\,\varrho - 4\,a\,m^2\,\varkappa^2\,b^2,$$
$$_*\pi^*_{14} = -8\,a^3\,m\,\varkappa^2,$$
$$_*\pi^*_{34} = 4\,a^2\,m\,\varkappa\,\varrho,$$
$$_*\pi^*_{42} = -8\,a^2\,m\,\varkappa^2,$$
$$_*\pi^*_{23} = m^2\,\varrho^2 + 2\,a\,(3\,m\,a - \varkappa\,a_3)\,\varrho + 4\,m^2\,\varkappa^2\,b^2.$$

Průsečné body těchto přímek s rovinou $x_2 = 0$ vyhovují podmínkám

$$\sigma\,x_1 = -\pi_{34}, \quad \sigma\,x_3 = \pi_{14}, \quad \sigma\,x_{14} = -\pi_{13}.$$

Vložíme-li do těchto rovnic hodnoty za $\pi_{i\varkappa}$ a eliminujeme-li σ a ϱ, obdržíme rovnici stopy h oskulačního hyperboloidu

$$-m\,a^2\,x_1^2 + m\,b^2\,x_3^2 + \frac{a^2}{m\,\varkappa}\,(m\,a - \varkappa\,a_3)\,x_1\,x_3 + 2\,a^2\,x_3\,x_4 = 0.$$

Srovnáme-li rovnici tuto s rovnicí kuželosečky k nahražující čáru Σ v bodě A, vidíme, že

$$\lambda = \frac{a}{m^2\,\varkappa}\,(\varkappa\,a_3 - m\,a).$$

Jak patrno z rovnice, má tato křivka s čarou Σ v bodě A styk 2. řádu; abychom ji konstruktivně určili, veďme v rovině $x_2 = 0$ kuželosečku l mající s plochou Π styk 3. řádu a procházející bodem D.

Rovnice její jest

$$-m\,a^2\,x_1^2 + m\,b^2\,x_3^2 - \frac{2}{3}\,\frac{a^2\,a_3}{m}\,x_1\,x_3 + 2\,a^2\,x_3\,x_4 = 0.$$

Vytvoříme-li nyní oskulační hyperboloid dvěma promětnými svazky rovin o osách AC, $A_1 D$ — jak o nich byla již řeč — obdržíme mezi parametry μ, ν vztah

$$\mu - m\varkappa\nu + \frac{a}{m}(3ma - \varkappa a_3)\mu\nu = 0.$$

Vytvoříme-li stejným způsobem hyperboloid těmito svazky rovin a kuželosečkou l, obdržíme vztah

$$\mu - m\varkappa\nu + \frac{2}{3}\frac{a}{m}(3ma - \varkappa a_3)\mu\nu = 0.$$

Svazky paprskové vytvořující na rovině $x_2 = 0$ kuželosečky h, l, jsou vázány stejnými vztahy; vrcholy jejich jsou body A, D; paprsku AD prvého svazku pro $\lim \mu = \infty$ přísluší tečny t_h, t_b obou křivek v D o parametrech ν_h, ν_l, takže

$$\nu_h = \frac{2}{3}\nu_l.$$

Poněvadž parametr ν jest úměrný dělicímu poměru příslušného paprsku k základním paprskům, které jsou zde průmět přímky $A_1 D$ na rovinu $x_2 = 0$ s vrcholu A'_2 a přímka AD, lze tečnu kuželosečky h v D z těchto základních paprsků a tečny křivky l v D sestrojiti dle dvojpoměru $\frac{2}{3}$. Sestrojení bodu D provede se dle údajů shora uvedených.

Vhodnou volbou souřadnicových konstant lze rovnice ještě zjednodušiti; volíme-li jednotkový bod v průsečném bodě rovin

$$x_2 - ax_1 = x_2 - \varkappa x_4 = bx_3 - ax_1,$$

jest

$$a = b = \varkappa = 1.$$

*

La construction de la quadrique osculatrice le long d'une génératrice de la surface réglée donnée par trois courbes gauches dont deux sont infiniment voisines.

(Extrait de l'article précédent.)

Soit donnée une surface réglée de la manière suivante: Les plans tangents α d'une surface quelconque Π, menés aux points A d'une courbe Σ, coupent une autre courbe Σ_1 de l'espace aux points A_1; les droites AA_1 sont les génératrices d'une surface réglée P dont on veut construire la quadrique osculatrice H le long d'une génératrice donnée.

On trouve, par une simple analyse synthétique, que la quadrique passe par la droite AA_1, par la tangente AC conjuguée par rapport à Π et par la droite A_1D, où D est le point d'intersection de toutes les coniques osculatrices k, menées au point A à la courbe Σ, de sorte que chaque conique k rencontre, en deux points, une conique k_1 osculatrice de Σ_1 en A_1 et coupant AC en C. Pour trouver, parmi les coniques k, la conique h qui donne la quadrique osculatrice H, on construit dans le plan osculateur de Σ en A, une conique l telle, qui ait, avec la surface Π, en A un contact du 3^e ordre et passe par D. Alors, on peut construire la tangente t_h de la conique h en D au moyen de la tangente t_l de la conique l en D.

Soit V le point de l'arête de rebroussement de la développée des plans tangents α de la surface Π le long de l'élement de Σ en A ; les points d'intersection B, T, U des droites VA_1, t_l, t_h avec la tangente de Σ en A satisfont à la relation

$$(B\,A\,T\,U)=\tfrac{2}{3}.$$

Pour faire le calcul nécessaire, on emploie un tetraèdre aux sommets A (A'_4), V (A'_2), A'_1, A'_3, où A'_1, A'_3 sont les points de rencontre des tangentes des courbes Σ, Σ_1 en A, A_1 avec les plans osculateurs de ces courbes en A_1, A. L'équation de la surface Π et de la courbe Σ aux environs du point A peut s'écrire

$$\Pi \ldots \frac{x_3}{x_4}=\frac{1}{2x_4^2}(m x_1^2+n x_2^2)+\frac{1}{6x_4^3}(a_3x_1^3+a_1x_1^2x_2+a_0x_2^3)+\ldots,$$

$$\Sigma \ldots \frac{x_2}{x_4}=\frac{p_3}{6}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3+\ldots,\quad \frac{x_3}{x_4}=\frac{m}{2}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^2+\frac{a_3}{6}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3+\ldots$$

L'élément de la courbe Σ_1 en A_1 est déterminé par l'élément commun des coniques osculatrices k_1

$$x_2^2-a^2x_1^2+b^2x_3^2+\lambda(x_2-a x_1)x_3=0,\quad x_2-Kx_4=0.$$

On trouve comme équation des coniques k

$$-m a^2 x_1^2+m b^2 x_3^2-m a \lambda x_1 x_3+2a^2x_3x_4=0,\quad x_2=0.$$

Le paramètre λ qui donne la conique h de la quadrique osculatrice H est déterminé de deux manières sous la forme

$$\lambda=\frac{a}{m^2K}(K a_3-m a).$$