František Hromádko

Kterak Heron Alexandrinský plochu trojúhelníka z daných jeho stran vypočítal

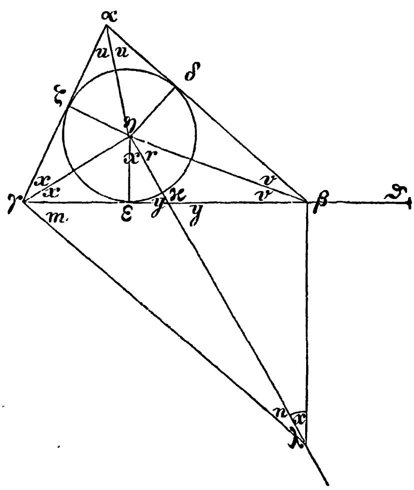
Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 6, 278--280

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122359

Kterak Heron Alexandrinský*) plochu trojúhelníka z daných jeho stran vypočítal.

Dle řeckého originálu podává **Fr. Hromádko**, professor v Táboře.

Nalézti plochu trojúhelníka z daných jeho stran jest arci možno, vedeme-li výšku a změříme-li její velikosť. Ale uloženo budiž bez této výšky plochu △ vyměřiti.



Budiž dán trojúhelník $\alpha\beta\gamma$, a budiž každá jeho strana známa, nalézti jeho plochu.

---

*) Heron Alexandrinský žil 100 let před Kr. a náleží k nejslavnějším učencům školy alexandrinské. Byl žákem Ktesibia (vynálezce vozní stříkačky) a sám sestrojil mnoho fysikálních nástrojů, zakládajících se na síle stlačeného vzduchu a na pružnosti páry. Dosud se chová památka jeho v našich fysikálních kabinetech na strojích po něm jmenovaných, jako jsou: Heronův míč, H. zřídlo, H. parní koule (válec), čarovná nálevka a j. Vynalezl prý sám na 78 různých strojů a fysikálních hraček (přístrojů kouzelných). Byl však též znamenitým geometrem. V jeho sebraných spisech (Heronis geom. & stereom. reliquiae. Berol. 1864 ed. Hultsch) nalezl jsem důkaz věty, jíž zde ml. čtenáři podávám. Z piety k starému tomuto učenci podržel, jsem řecké litery, a co k snazšímu porozumění důkazu přispěti by mohlo a v originale schází, uvádím buď v závorce nebo pod čárou jako doplněk, odůvodnění aneb rozšíření.

Řešení. Do $\triangle\ \alpha\beta\gamma$ vepsán buď kruh $\delta\varepsilon\zeta$, jehož střed jest v η, a vedeny buďtež spojnice $\overline{\eta\alpha}$, $\overline{\eta\beta}$, $\overline{\eta\gamma}$, pak $\eta\delta$, $\eta\varepsilon$, $\eta\zeta$.

I jest $\beta\gamma\,.\,\eta\varepsilon$ (obdélník) dvakrát větší než $\triangle\ \eta\beta\gamma$, podobně $\alpha\beta\,.\,\eta\delta$ dvakrát větší než $\triangle\ \alpha\eta\beta$ a též $\alpha\gamma\,.\,\eta\zeta$ dvakrát větší než $\triangle\ \alpha\gamma\eta$; obdélník pak nad obvodem trojúhelníka $\alpha\beta\gamma$ a $\eta\varepsilon$ (výškou) je dvakrát větší než $\triangle\ \alpha\beta\gamma$.

Prodluž $\gamma\beta$ a učiň $\beta\vartheta = \alpha\delta$, tu jest $\vartheta\gamma$ polovic obvodu trojúhelníka a (obdélník) $\vartheta\gamma\,.\,\eta\varepsilon$ rovná se $\triangle\ \alpha\beta\gamma$.

Vediž na $\eta\gamma$ kolmo $\eta\lambda$, na $\beta\gamma$ kolmici $\beta\lambda$ (až spolu v λ se protnou) a spoj γ s λ, i jest úhel $\gamma\eta\lambda$ pravý a $\gamma\beta\lambda$ též pravý.

Čtyřúhelník pak $\gamma\eta\beta\lambda$ leží v kruhu.*)

Avšak $\triangle\ \alpha\eta\delta$ je podoben $\triangle\ \gamma\lambda\beta$.**)

(K vůli snadnějšímu přehledu dovolím si nyní psáti další část důkazu obvyklým naším spůsobem.)

Z $\triangle\,\alpha\eta\delta \sim \triangle\,\gamma\lambda\beta$ vycházejí úměry:

$$\frac{\beta\gamma}{\beta\lambda} = \frac{\alpha\delta}{\delta\eta} = \frac{\vartheta\beta}{\eta\varepsilon},$$

čili

$$\frac{\beta\gamma}{\vartheta\beta} = \frac{\beta\lambda}{\eta\varepsilon} = \frac{\beta\varkappa}{\varepsilon\varkappa},$$

tudíž také:

$$\frac{\beta\gamma + \beta\vartheta}{\beta\varkappa + \varepsilon\varkappa} = \frac{\vartheta\beta}{\varepsilon\varkappa},$$

čili

$$\frac{\gamma\vartheta}{\beta\varepsilon} = \frac{\vartheta\beta}{\varepsilon\varkappa} = \frac{\beta\gamma}{\beta\varkappa}, \qquad (1)$$

t. j.

$$\gamma\vartheta\,.\,\beta\varkappa = \beta\varepsilon\,.\,\beta\gamma.$$

Avšak $\gamma\vartheta\,.\,\eta\varepsilon = \triangle\ \alpha\beta\gamma$ a z úměry (1) je přemístěním vnitřních členů $\frac{\gamma\vartheta}{\vartheta\beta} = \beta\varepsilon : \varepsilon\varkappa$, tedy též slož. úměra

$$\gamma\vartheta\,.\,\gamma\vartheta : \gamma\vartheta\,.\,\vartheta\beta = \beta\varepsilon\,.\,\gamma\varepsilon : \varepsilon\varkappa\,.\,\gamma\varepsilon.$$

Ale $\varepsilon\varkappa\,.\,\varepsilon\gamma = \overline{\eta\varepsilon}^2$ (z $\triangle\ \gamma\eta\varkappa$, střední měř. úměrná mezi atd.), pročež

$$\overline{\gamma\vartheta}^2 : \gamma\vartheta\,.\,\vartheta\beta = \beta\varepsilon\,.\,\gamma\varepsilon : \overline{\eta\varepsilon}^2,$$

t. j.

$$\overline{\gamma\vartheta}^2\,.\,\overline{\eta\varepsilon}^2 = \triangle\ (\alpha\beta\gamma)^2 = \gamma\vartheta\,.\,\vartheta\beta\,.\,\beta\varepsilon\,.\,\gamma\varepsilon,$$

**) Nad $\gamma\lambda$ (jako přeponou) jsou sestrojeny dva pravé úhly; opíšeme-li nad $\gamma\lambda$ jako průměrem kruh, prochází tento patrně body γ, η, β, λ, tedy jest čtyřúhelník $\gamma\eta\beta\lambda$ v kruhu, a proto součet dvou protilehlých jeho úhlů atd.

***) $\measuredangle\, m = \measuredangle\, r$ (jakožto úhly obvodové na stejném oblouku), dále jest $x + r + v = x + u + v = 90^0$, pročež $r = u = m$ atd. $\triangle\ \alpha\eta\delta \sim \gamma\lambda\beta$.

tedy

$$\triangle \alpha\beta\gamma = \sqrt{\gamma\vartheta . \vartheta\beta . \beta\varepsilon . \gamma\varepsilon} = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}, \quad (2)$$

kde a, b, c značí strany a s poloviční obvod $\triangle$ $\alpha\beta\gamma$.*)

Počet pak upraví se takto: Budiž $\alpha\beta = 13$, $\beta\gamma = 14$, $\gamma\alpha = 15$ (jednotkám). Sečti tyto strany a bude 42, polovice toho 21. Odejmi od této 13, zbude 8 a 14; zbude 7 a též 15; zbude 6. Součin těchto zbytků s polovičním obvodem $\triangle$, t. j. $21 \times 8 \times 7 \times 6 = 7056$ jest dvojmoc hledané plochy $\triangle \alpha\beta\gamma$; pročež tato $= \sqrt{7056} = 84$ [dle vzorce (2)].

Drobné zprávy.

Souřadnice cyklické. 1. V VII. svazku časopisu „Mathesis" str. 129.—135. píše p. *M. d' Ocagne* o nových souřadnicích, kterýmž dává jméno „cyklické". Výměr jich jest tento: V rovině bodů, jichž polohu jest určiti, zvolme libovolnou stálou přímku OX a v ní bod stálý O; nazveme O *počátkem* a OX *osou.* Zvolme dále jistou délku r, pro tu kterou soustavu stálou. Touto délkou r jakožto poloměrem opišme z bodu M, jehož polohu jest určiti, jakožto středu kružnici K, počínajíce tuto opisovati z některého bodu počátečného, který s M leží na téže straně osy OX, a opisujíce kružnici vždy v témž směru (na př. ve směru opáčném směru ručiček hodinových). Kružnice K protne osu OX *nejprve* v bodu M_1 a *na to* při dalším postupu v bodu M_2; vzdálenosti $OM_1 = \xi_1$ a $OM_2 = \xi_2$ jsou pak *cyklické* souřadnice bodu M. Za učiněných podmínek přísluší danému bodu M zcela určité souřadnice ξ_1 a ξ_2 a naopak, daným souřadnicím ξ_1 a ξ_2 přísluší jediný určitý bod M (vyjma jediný případ). Neboť jest zřejmo, že (při výše vytčeném směru opisování kružnic) pro body po jedné straně osy OX jest $\xi_1 < \xi_2$ a pro body po druhé straně osy OX jest $\xi_1 > \xi_2$. Jedná-li se o nalezení bodu M příslušného souřadnicím ξ_1 a ξ_2, nanesme,

*) Kterak z dané plochy čtverce lze vypočítati jeho stranu, nevykládá Heron; ale podává hned hotový výpočet. Z důkazu jeho vysvítá zřejmě, že znal podobnost trojúhelníků a úměrnost stran podobných trojúhelníků, dále že věděl o vlastnostech čtyřúhelníka vepsaného do kruhu, o střední měřické úměrné a j. větách planimetrických.