Václav Řehořovský

Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 6, 280--284

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122353

tedy

$$\triangle\,\alpha\beta\gamma = \sqrt{\gamma\vartheta\,.\,\vartheta\beta\,.\,\beta\varepsilon\,.\,\gamma\varepsilon} = \sqrt{s\,.(s-a)\,.(s-b)\,.(s-c)}, \quad (2)$$

kde a, b, c značí strany a s poloviční obvod $\triangle$ $\alpha\beta\gamma$.*)

Počet pak upraví se takto: Budiž $\alpha\beta = 13$, $\beta\gamma = 14$, $\gamma\alpha = 15$ (jednotkám). Sečti tyto strany a bude 42, polovice toho 21. Odejmi od této 13, zbude 8 a 14; zbude 7 a též 15; zbude 6. Součin těchto zbytků s polovičním obvodem $\triangle$, t. j. $21 \times 8 \times 7 \times 6 = 7056$ jest dvojmoc hledané plochy $\triangle\,\alpha\beta\gamma$; pročež tato $= \sqrt{7056} = 84$ [dle vzorce (2)].

Drobné zprávy.

Souřadnice cyklické. 1. V VII. svazku časopisu „Mathesis" str. 129.—135. píše p. *M. d' Ocagne* o nových souřadnicích, kterýmž dává jméno „cyklické". Výměr jich jest tento: V rovině bodů, jichž polohu jest určiti, zvolme libovolnou stálou přímku OX a v ní bod stálý O; nazveme O *počátkem* a OX *osou.* Zvolme dále jistou délku r, pro tu kterou soustavu stálou. Touto délkou r jakožto poloměrem opišme z bodu M, jehož polohu jest určiti, jakožto středu kružnici K, počínajíce tuto opisovati z některého bodu počátečného, který s M leží na téže straně osy OX, a opisujíce kružnici vždy v témž směru (na př. ve směru opáčném směru ručiček hodinových). Kružnice K protne osu OX *nejprve* v bodu M_1 a *na to* při dalším postupu v bodu M_2; vzdálenosti $OM_1 = \xi_1$ a $OM_2 = \xi_2$ jsou pak *cyklické* souřadnice bodu M. Za učiněných podmínek přísluší danému bodu M zcela určité souřadnice ξ_1 a ξ_2 a naopak, daným souřadnicím ξ_1 a ξ_2 přísluší jediný určitý bod M (vyjma jediný případ). Neboť jest zřejmo, že (při výše vytčeném směru opisování kružnic) pro body po jedné straně osy OX jest $\xi_1 < \xi_2$ a pro body po druhé straně osy OX jest $\xi_1 > \xi_2$. Jedná-li se o nalezení bodu M příslušného souřadnicím ξ_1 a ξ_2, nanesme,

*) Kterak z dané plochy čtverce lze vypočítati jeho stranu, nevykládá Heron; ale podává hned hotový výpočet. Z důkazu jeho vysvítá zřejmě, že znal podobnosť trojúhelníků a úměrnosť stran podobných trojúhelníků, dále že věděl o vlastnostech čtyřúhelníka vepsaného do kruhu, o střední měřické úměrné a j. větách planimetrických.

majíce zření ku znamením, $OM_1 = \xi_1$, $OM_2 = \xi_2$ a nad délkou M_1M_2 jakožto základnou opišme rovnoramenný trojúhelník, jehož rameno má délku r, na jednu neb druhou stranu osy OX dle toho, jest-li $\xi_1 < \xi_2$ neb $\xi_1 > \xi_2$; vrchol trojúhelníka toho jest hledaný bod M. Neurčitosť nastává jedině v případě, když $\xi_1 = \xi_2$, poněvadž tu body M_1 a M_2 se stotožňují, a bod M může nalezati se ve vzdálenosti r na kolmici v M_1 vztýčené jak po jedné tak i po druhé straně osy. Neurčitosť ta však v každém jednotlivém případě, kterýž právě se vyšetřuje, sama sebou odpadne.

2. Přechod k soustavě pravoúhlých souřadnic a naopak jest poněkud stížen tím, že třeba rozeznávati při tom body po jedné od bodů po druhé straně osy OX ležících. Zvolíme-li OX za osu úseček x a kolmici OY v bodu O ku OX vztýčenou za osu pořadnic y, platí převodní vzorce (jak snadno z obrazce příslušného přesvědčiti se lze)
pro body po jedné straně OX ležící ($\xi_1 < \xi_2$):

$$x = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{2}\right)^2}$$

a naopak

$$\xi_2 = x + \sqrt{r^2 - y^2}, \quad \xi_1 = x - \sqrt{r^2 - y^2};$$

pro body po druhé straně OX ležící ($\xi_1 > \xi_2$):

$$x = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad y = -\sqrt{r^2 - \left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{2}\right)^2}$$

a naopak

$$\xi_2 = x - \sqrt{r^2 - y^2}, \quad \xi_1 = x + \sqrt{r^2 - y^2}.$$

3. Jakákoliv rovnice $\varphi(\xi_1, \xi_2) = 0$ proměnných ξ_1 a ξ_2 udává křivku v souřadnicích cyklických. P. *d' Ocagne* odvozuje zajímavou relaci, pomocí které lze ustanoviti polohu průsečného bodu osy OX s normalou sestrojenou v některém bodě křivky. Jest-li totiž M bod křivky $\varphi(\xi_1, \xi_2) = 0$, jemuž přísluší souřadnice $OM_1 = \xi_1$ a $OM_2 = \xi_2$, jest-li dále N průsečný bod osy OX s normalou sestrojenou v bodu M, tu platí jednoduchá rovnice

$$(\alpha) \qquad n_1\varphi_1 = n_2\varphi_2,$$

kdež značí φ_1, φ_2 částečné derivace φ dle ξ_1, ξ_2 a n_1, n_2 jsou vzdálenosti bodu N od bodů M_1, M_2. Jest tedy poloha bodu N vzhledem ku bodům M_1 a M_2 určena dělícím poměrem $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$.

4. Některé příklady. Linearná rovnice

$$A\xi_1 + B\xi_2 + C = 0$$

udává dva protilehlé quadranty ellipsy, jejíž střed jest v ose OX ve vzdálenosti $\frac{-C}{A+B}$ od bodu O a jejíž poloosy jsou $\frac{r(A-B)}{A+B}$ v ose OX a r v kolmici ku OX. Druhé dva protilehlé kvadranty téže ellipsy dány jsou rovnicí

$$A\xi_2 + B\xi_1 + C = 0.$$

Leží-li střed ellipsy v počátku O, obdrží rovnice ty tvar

$$\xi_2 = k\xi_1 \quad \text{a} \quad \xi_1 = k\xi_2,$$

načež poloosy jsou $\frac{r(k+1)}{k-1}$ v ose OX a r v kolmici ku OX. Pro quadrant na př. daný rovnicí $\xi_2 = k\xi_1$ obdrží se dle (α)

$$n_2 = -kn_1;$$

jest tedy střed O vzhledem ku bodům M_2 a M_1 dán poměrem $\frac{\xi_2}{\xi_1} = k$ a průsečný bod N normaly s osou OX poměrem $\frac{n_2}{n_1} = -k$, t. j. *body* O *a* N *jsou harmonicky sdružené vzhledem ku bodům* M_1 *a* M_2.

Toho lze užiti ke konstrukci normaly v daném bodu M ellipsy. Opišme z bodu M poloměrem, který se rovná jedné poloose, kružnici; tato protne druhou osu v bodech M_1 a M_2, a stačí nyní, určiti bod N harmonicky sdružený se středem O vzhledem k bodům M_1 a M_2; přímka MN jest hledaná normála.

5. Rovnice

$$\xi_1\xi_2 - m(\xi_1 + \xi_2) = R^2 - m^2 - r^2$$

udává kružnici o poloměru R, jejíž střed jest v ose OX ve vzdálenosti m od počátku O.

Jest-li střed kružnice v počátku O, t. j. $m = 0$, přejde rovnice v

$$\xi_1 \xi_2 = R^2 - r^2.$$

Z rovnice té jest zřejmo, že veškeré dvojice bodů M_1 a M_2 tvoří involuci, jejíž konstanta jest $c^2 = R^2 - r^2$ a jejíž střed jest v počátku O. Lze tedy říci: *Dána-li kružnice poloměru R, a opíšeme-li z jednotlivých jejích bodů jakožto středů kružnice o libovolném poloměru r, vytvořují průsečné body těchto kružnic s kterýmkoliv průměrem dané kružnice involuci bodovou, jejíž bod centrálný jest ve středu dané kružnice.*

A naopak: *Proložíme-li veškerými dvojicemi bodů dané involuce kružnice téhož poloměru, leží středy veškerých těchto kružnic v nové kružnici, jejíž střed jest v centrálném bodu involuce.*

Vlastnosti této lze s výhodou užiti ku sestrojování dalších dvojic involuce, kteráž dvěmi dvojicemi určena jest.

6. Rovnice

$$\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2} - m(\xi_1 + \xi_2) = a^2 - m^2 + r^2$$

udává rovnoramennou hyperbolu, jejíž poloosa $= a$, střed v ose OX ve vzdálenosti m a realná osa shoduje se s osou OX. Leží-li střed hyperboly v počátku O, t. j. pro $m = 0$, bude rovnice hyperboly

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 2(a^2 + r^2).$$

7. P. *d' Ocagne* zmiňuje se ku konci o upotřebení *principu duality,* jehož podstata záleží v tomto: Dokazujeme-li některou poučku v jisté soustavě souřadnicové, kdež užíváme souřadnic α_1 a α_2, a nahradíme-li v analytických vzorcích se tu vyskytujících souřadnice α_1 a α_2 veskrze souřadnicemi β_1 a β_2 jiné soustavy, obdržíme tím důkaz nové poučky, jakmile význam vzorců v soustavě (β_1, β_2) dovedeme vyložiti. Na př. poučku: *Bod dotyku tečny kružnice leží na poloměru kolmém ku tečně* lze v souřadnicích pravoúhlých podati takto: Dotýká-li se čára $y = mx + n$ čáry $x^2 + y^2 = R^2$, leží bod dotyku na čáře $y = -\frac{1}{m}x$. Nahradíme-li v těchto vzorcích souřadnice x a y souřadnicemi cyklickými ξ_1 a ξ_2, obdržíme podobně: Dotýká-li

se čára $\xi_2 = m\xi_1 + n$ čáry $\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 = R^2$, leží bod dotyku na čáře $\xi_2 = -\frac{1}{m}\xi_1$; první a třetí z těchto rovnic udávají dle 4. ellipsy, druhá rovnice dle 6. rovnoramennou hyperbolu, a přihlíží-li se blíže ku poloze a osám těchto tří čar, lze vysloviti poučku: *Buďtež E a E' dvě ellipsy o středech O a O', jejichž osy ve směru přímky OO' jsou 2a a 2a', kdežto druhé jich osy jsou stejné a $= 2\sqrt{aa'}$. Pohybuje-li se ellipsa E' ve směru osy OO', a sestrojí-lí se pro každou její polohu rovnoramenná hyperbola soustředná s pevnou ellipsou E a dotýkající se ellipsy E' souměrně ve dvou bodech, leží veškeré tyto body dotyku v ellipse E.*

Prof. *V. Řehořovský.*

Úlohy.

Řešení úlohy 22.

Buďtež a, b, c kořeny rovnice

(1) $$x^3 + px^2 + qx + r = 0;$$

potom jest

$$p = -(a + b + c)$$
$$q = ab + bc + ca$$
$$r = -abc.$$

Položíme-li

$$y = x + \frac{1}{x}$$

čili

(2) $$x^2 - xy + 1 = 0,$$

bude

$$x^3 = x^2y - x$$

a rovnice (1) nabude touto substitucí podoby

(3) $$(y + p)x^2 + (q - 1)x + r = 0.$$

Vyloučením x z rovnice (2) a (3) povstane

$$ry^3 + (pr + q)y^2 + (p - 3r + pq + rq)y + (p - r)^2 + (q - 1)^2 = 0;$$

z této pak rovnice plyne

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right) = -\frac{(p - r)^2 + (q - 1)^2}{r}$$

aneb se zřetelem k hodnotám p, q, r