Jiří Seitz

O jednom problému prof. Čecha

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 1, 43--44

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122350

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 75 (1950)

O JEDNOM PROBLÉMU PROF. ČECHA.

JIŘÍ SEITZ, Praha.

(Došlo dne 16. července 1949.)

V tomto článku se řeší jeden problém prof. ČECHA, uvedený v článku „Topologické prostory“ v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, roč. **66**, str. D225—D264. Je to problém č. V na str. D263.

Budeme předpokládati, tak jako ČECH, že topologický prostor je dán těmito axiomy:

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
2. $M \subset P \Rightarrow M \subset \overline{M}$.
3. $M_1 \subset M_2 \subset P \Rightarrow \overline{M}_1 \subset \overline{M}_2$.

Dále budeme předpokládati, že čtenář zná definice a základní pojmy topologické obsažené v citovaném článku.

Dotyčný ČECHŮV problém zní:

Nechť v je topologie v P. Řekneme, že v má vlastnost α, když ty $M \subset P$, pro něž $vM - M$ je jednobodová, tvoří dolní basi. Řekneme, že v má vlastnost β, když neexistuje topologie v P, různá od v a slabší než v, která by měla stejnou U-modifikaci jako v. Zřejmě vlastnost α implikuje vlastnost β. Plyne také obráceně vlastnost α z vlastnosti β?

Odpověď na tuto otázku je kladná:

Důkaz provedeme nepřímo: Nechť topologie v má vlastnost β a nikoli vlastnost α. Pak podle ČECHA l. c. str. D233 existuje množina $M \subset P$ a bod $a \in vM - M$ takové, že pro každou $S \subset M$ platí $vS \neq S + (a)$.

Stanovme nyní topologii u tímto způsobem:

Je-li $S - M \neq \emptyset$, pak nechť $uS = vS$. Je-li $S \subset M$, pak nechť $uS = vS - (a)$. Tedy u je topologie, neboť:

1. $u\emptyset = \emptyset$, ježto $\emptyset \subset M$, a tedy $u\emptyset = v\emptyset - (a) = \emptyset - (a) = \emptyset$.

2. $S \subset P \Rightarrow S \subset uS$, neboť pro $S - M \neq \emptyset$ je $uS = vS \supset S$; pro $S \subset M$ je $uS = vS - (a) \supset S$, ježto a non $\in S$ (poněvadž a non $\in M$).

3. Máme dokázati, že $S_1 \subset S_2 \Rightarrow uS_1 \subset uS_2$:

α) Je-li $S_1 - M \neq \emptyset$, $S_2 - M \neq \emptyset$, pak je $uS_1 = vS_1 \subset vS_2 = uS_2$.

β) Je-li $S_1 \subset M$, $S_2 - M \neq \emptyset$, pak je $uS_1 = vS_1 - (a) \subset vS_1 \subset \subset vS_2 = uS_2$.

γ) Je-li $S_1 \subset M$, $S_2 \subset M$, pak je $uS_1 = vS_1 - (a) \subset vS_2 - (a) = uS_2$.

Tedy u je skutečně topologie.

Topologie v a u mají stejnou U-modifikaci, neboť: Je-li $S = vS$, pak pro $S - M \neq \emptyset$ je $uS = vS = S$ a pro $S \subset M$ je $uS = vS - (a) \doteq S - (a) = S$. Obráceně, je-li $S = uS$, pak pro $S - M \neq \emptyset$ je $vS = uS = S$ a pro $S \subset M$ je též $vS = uS$, neboť kdyby $vS \neq S = uS = vS - (a)$ (a ovšem $vS \supset S$), pak by bylo $a \in vS$, a jelikož podle předpokladu $vS \neq S + (a)$, bylo by dále $vS = S + a + S'$, kde $(S + (a))\, S' = \emptyset$ a $S' \neq \emptyset$. Podle sestrojení topologie u by pak bylo $uS = S + S'$, čili množina S by nebyla uzavřená při topologii u.

Dále je $u \subset v$, $u \neq v$, neboť $uS \subset vS$ pro každou $S \subset P$ a $uM = vM - (a) \neq vM$, ježto $a \in vM$.

Odtud vyplývá, že topologie v nemá vlastnost β, což je spor.

On a problem of E. Čech.

(Summary of the preceding article.)

By general topology of a space P we mean a set-function u defined for $S \subset P$ and such that $u\emptyset = \emptyset$, $S \subset P \Rightarrow S \subset uS \subset P$, $S_1 \subset S_2 \subset P \Rightarrow \Rightarrow uS_1 \subset uS_2$. As an answer to a question put by Čech, the following two properties of a general topology are proved to be equivalent to each other. Property α: Given a set $M \subset P$ and a point $a \in uM - M$, there exists a set $S \subset M$ such that $uS = S + (a)$. Property β: For any general topology v in P such that $S \subset P \Rightarrow vS \subset uS$, $vS = S \subset P \Rightarrow uS = S$ we have $uS = vS$ for every $S \subset P$.