Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Ladislav Seifert

Poznámky o ploše vytvořené oskulačními kružnicemi prostorové křivk

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 1, D49--D58

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122340

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1950

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

mes linéaires $|D_0|$, $|D_1|$ de courbes (surfaces) appartenant à l'involution I_2 engendrée par la transformation involutive dans le plan (dans l'espace).

La construction de la surface F (de la variété V) subsiste même dans le cas, si l'on abandonne des hypothèses faites, dans ce qui précède, des points fondamentaux (des points et des courbes fondamentales), mais la surface F (la variété V) peut acquérir des points singuliers.

POZNÁMKY O PLOŠE VYTVOŘENÉ OSKULAČNÍMI KRUŽNICEMI PROSTOROVÉ KŘIVKY.

L. SEIFERT, Brno

1. Buď dána prostorová křivka Γ. Souřadnice jejího bodu $P(x, y, z)$ buďte dány jako funkce oblouku s, dále buďte α, β, γ směrové kosiny tečny, l, m, n směrové kosiny hlavní normály a λ, μ, ν směrové kosiny binormály, ϱ poloměr první křivosti (flexe), τ poloměr druhé křivosti (torse). Připomeňme si ještě diferenciální vztahy FRENETOVY

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{l}{\varrho}, \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{\tau}, \quad \frac{dl}{ds} = -\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\lambda}{\tau} \tag{1}$$

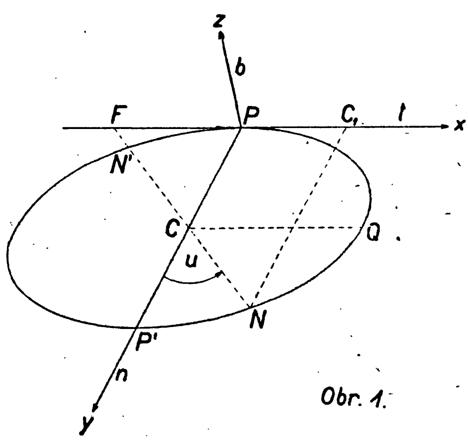
a zabývejme se plochou Φ, již vytvořuje oskulační kružnice křivky Γ. Střed C oskulační kružnice má souřadnice

$$x_1 = x + \varrho l, \; y_1 = y + \varrho m, \; z_1 = z + \varrho n; \tag{2}$$

parametrické vyjádření oskulační kružnice jest

$$\begin{aligned} X &= x_1 + \varrho(l \cos u + \alpha \sin u), \\ Y &= y_1 + \varrho(m \cos u + \beta \sin u), \\ Z &= z_1 + \varrho(n \cos u + \gamma \sin u). \end{aligned} \tag{3}$$

Hodnotě $u = 0$ odpovídá bod P' diametrálně protilehlý bodu P, bod P patří hodnotě $u = \pi$; hodnotě $u = \frac{1}{2}\pi$ patří bod Q, takže CQ je rovnoběžno s kladným směrem tečny (obr. 1).



Obr. 1.

Rovnice (3) jsou parametrické vyjádření plochy Φ (parametry s, u); hodnotě s = konst odpovídá tvořící kružnice. Při obvyklém označení je pro element plochy

$$dS^2 = E\,ds^2 + 2F\,ds\,du + G\,du^2;$$

podmínka pro křivky kolmé ke kružnicím s = konst zní

$$F\,ds + G\,du = 0. \tag{4}$$

V našem případě vychází po jednoduchém výpočtu

$$\frac{\partial X}{\partial s} = -\frac{\lambda}{\tau}\varrho + \varrho\left[-\cos u\left(\frac{\alpha}{\varrho}+\frac{\lambda}{\tau}\right) + \sin u\,\frac{l}{\varrho}\right] + \varrho'[l + l\cos u + \alpha\sin u],$$
$$\frac{\partial X}{\partial u} = \varrho(-l\sin u + \alpha\cos u),$$

a další čtyři rovnice cyklickou záměnou. Odtud

$$F = -\varrho(\varrho'\sin u + 1),\quad G = \varrho^2$$

a rovnice (4) jest pak

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{\varrho'}{\varrho}\sin u + \frac{1}{\varrho}. \tag{5}$$

Touto rovnicí je dáno u jako funkce s a tím na ploše Φ orthogonální trajektorie tvořících kružnic. Tyto kružnice jsou jeden systém čar křivosti, rovnice (5) určují druhý systém.

Zaveďme $t = \mathrm{tg}\frac{1}{2}u$; rovnice (5) přejde v rovnici Riccatiho

$$2\varrho\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = t^2 + 2\varrho' t + 1. \tag{6}$$

Je-li P bod křivky Γ, P' bod diametrálně protilehlý na tvořící kružnici, N bod téhož kruhu na uvažované čáře křivosti, C střed křivosti, jest $u = \sphericalangle P'CN$. Jsou-li N_1, N_2, N_3, N_4 libovolné čtyři body oskulační kružnice, jest jejich dvojpoměr $(N_1N_2N_3N_4) = (t_1t_2t_3t_4)$, kde t_i je parametr bodu N_i. Jsou-li t_1, t_2, t_3, t_4 nezávislé čtyři integrály rovnice (6), je dvojpoměr $(t_1t_2t_3t_4)$ nezávislý na s; integrálům odpovídají čtyři křivky křivosti plochy Φ a máme výsledek ostatně dobře známý:

Pravoúhlé trajektorie oskulačních kružnic prostorové křivky stanoví na těchto kružnicích projektivní řady.)*

2. Tato věta platí také pro *křivku konstantní křivosti* (ϱ = konst). Ostatně v tomto případě dávají rovnice (3) parametrické vyjádření plochy Φ a rovnice (5), jež přejde teď v

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\varrho},\quad u = \frac{s+k}{\varrho}, \tag{7}$$

podává křivku na Φ, jejíž význam poznáme okamžitě. Pro diferenciály dostaneme z rovnice (3) za podmínky (7) okamžitě

$$\mathrm{d}X = -\varrho\frac{\lambda}{\tau}(1+\cos u)\,\mathrm{d}s,\quad \mathrm{d}Y = -\varrho\frac{\mu}{\tau}(1+\cos u)\,\mathrm{d}s,$$
$$\mathrm{d}Z = -\varrho\frac{\nu}{\tau}(1+\cos u)\,\mathrm{d}s; \tag{8}$$

*) **Demartres**, Annales de l'école norm. sup. (3), sv. 2 (1885), str. 123. — **Lilienthal**, Vorlesungen über Differentialgeometrie, sv. II, str. 105.

tečna je tedy kolmá na rovinu oskulační křivky Γ a křivka daná rovnicí (7) je opět orthogonální trajektorie oskulačních kružnic. Oblouk na této trajektorii znamenejme s_1 a ostatní veličiny jako dříve, avšak s indexem 1. Z rovnice (8) jde

$$ds_1 = \frac{\varepsilon\varrho}{\tau}(1 + \cos u)\, ds, \tag{9}$$

kde $\varepsilon = \pm 1$ a znaménko souhlasí se znaménkem poloměru τ; dále je

$$\alpha_1 = \frac{dX}{ds_1} = -\varepsilon\lambda, \quad \beta_1 = -\varepsilon\mu, \quad \gamma_1 = -\varepsilon\nu. \tag{10}$$

Odtud

$$\frac{d\alpha_1}{ds_1} = -\varepsilon\frac{l}{\tau}\frac{ds}{ds_1}, \quad \frac{d\alpha_1}{ds_1} = -\frac{l}{\varrho(1 + \cos u)},$$

takže

$$l_1 = -l, \quad m_1 = -m, \quad n_1 = -n, \quad \varrho_1 = \varrho(1 + \cos u). \tag{11}$$

Pro binormálu jest

$$\lambda_1 = \beta_1 n_1 - \gamma_1 m_1 = -\varepsilon\alpha \text{ atd.},$$

tedy

$$\lambda_1 = -\varepsilon\alpha, \ \mu_1 = -\varepsilon\beta, \ \nu_1 = -\varepsilon\gamma. \tag{12}$$

Dále jest

$$dl_1 = \left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{\tau}\right) ds$$

a dosadíme-li do výrazu

$$\frac{dl_1}{ds_1} = -\frac{\alpha_1}{\varrho_1} - \frac{\lambda_1}{\tau_1}$$

nalezené hodnoty, dostaneme snadno

$$\tau_1 = \frac{\varrho^2}{\tau}(1 + \cos u), \tag{13}$$

což vzhledem k rovnici (11) lze psáti

$$\tau\tau_1 = \varrho\varrho_1; \tag{14}$$

to je jistě zajímavý *vztah mezi oběma poloměry dané křivky Γ a orthogonální trajektorie jejích oskulačních kružnic.**)

Nalezené rovnice (10), (11), (12) ukazují, že hlavní normála trajektorie je rovnoběžná s hlavní normálou křivky Γ, tečna s binormálou a binormála s tečnou. Dle rovnice $\varrho_1 = \varrho + \varrho \cos u$ padne střed křivosti

*) Tento vztah je patrně zvláštním případem obecnějšího, jejž uvádí již AOUST v Analyse infinitésimal z r. 1872, dle kterého jsou-li dvě křivky na sebe vztaženy tak, že hlavní normály jsou rovnoběžné, poměr $\frac{\varrho}{\tau}$ na jedné je lineární funkcí téhož poměru na druhé. Viz Encyklopädie der math. W. III, D4, str. 231.

trajektorie do bodu C_1 (obr. 1), čili jest to pravoúhlý průmět jejího bodu N do tečny t bodu P.

Představme si oblouk křivky Γ bez singularit a předpokládejme, že bodu $P_0(s_0)$ přísluší bod N_0 trajektorie na oskulačním kruhu, který je diametrálně protilehlý k P_0, tedy $u_0 = 0$. Pak vztah (7) mezi s a u zní

$$\varrho u = s - s_0.$$

Budiž nyní N' bod diametrálně protilehlý bodu N a představme si obě polohy kružnice (P_0) a (P). Pak je ϱu délka oblouku $\widehat{PN'}$ na kružnici (P) a $s_0 - s$ délka oblouku $\widehat{P_0P}$ na Γ. Odtud plyne:

Kotálí-li se kružnice stálého poloměru tak, aby byla v každé poloze oskulační kružnicí křivky Γ konstantní křivosti, opisují její body čáry křivosti na ploše kružnicemi vytvořené.

Je-li Γ křivka konstantní křivosti, je střed C současně středem oskulační koule, normály plochy Φ podél kružnice tvoří svazek o středu C, křivka středů (C) je tedy část *fokální plochy* (plochy středů křivosti). Jdeme-li po čáře křivosti (N), normála plochy v bodě N seče kolmo křivku (C) a vytvoří rozvinutelnou plochu. Její hrana vratu (F) je tedy evolutou křivky (C) a nalézá se na její polární ploše (obalené normálními rovinami) a tato polární plocha splývá zde s plochou tečen (t) křivky Γ. Poloměr CN protne tečnu t v bodě F; C, F jsou hlavní středy křivosti plochy Φ v bodě N. Příslušný poloměr $\overline{FN}$ má hodnotu

$$\varrho_N = \varrho\left(1 + \frac{1}{\cos u}\right). \tag{15}$$

Hlavní poloměry křivosti plochy Φ v bodě N jsou tedy ϱ a ϱ_N. Probíhá-li bod N na ploše Φ čáru křivosti (N), probíhá bod F na ploše tečen (t) fokálu (F), jež po rozvinutí plochy (t) přejde v přímku (je čarou geodetickou).

Poněvadž $\overline{PF} = v = -\varrho \operatorname{tg} u$, vychází pro souřadnice bodu F

$$X = x - \alpha\varrho \operatorname{tg} u, \quad Y = y - \beta\varrho \operatorname{tg} u, \quad Z = z - \gamma\varrho \operatorname{tg} u; \tag{16}$$

bod ten probíhá fokálu, je-li mezi s, u vztah $s = \varrho u + \text{konst}$.

Rozvineme-li plochu tečen (t) v rovinu, přejde křivka Γ v kružnici Γ_0 o poloměru ϱ a rozvinutou křivku (F) dostaneme přímo konstrukcí, naneseme-li od jistého bodu na (Γ_0) oblouk $s = \varrho u$ a od koncového bodu v opačném smyslu na tečnu délku $v = \varrho \operatorname{tg} u$. Snadno vidíme, že křivka (F) přejde v přímku F_0, která jde středem kružnice Γ_0.

Normály plochy Φ podél křivoznačné křivky (N) dávají tedy rozvinutelnou plochu, jejíž hrana vratu (F) je geodetická křivka na ploše tečen (t) kolmá k základní křivce Γ.

Poloměr ϱ_N je stálý, pokud u je stálé, ale pak i totální (Gaussova) křivost je stálá. Podmínka $u = \text{konst}$ definuje tedy na ploše křivky konstantní GAUSSOVY křivosti. Mezi nimi $u = \pi$ ($\varrho_N = 0$) splývá s křivkou základní, $u = \pm \frac{1}{2}\pi$ jsou křivky, kde normála plochy Φ je rovnoběžná s tečnou t.

3. Z rovnice (14), již lze napsati

$$\frac{\tau_1}{\varrho_1} = \frac{\varrho}{\tau}$$

plyne, že čáry křivosti plochy Φ mohou být šroubovice, jen když vedle ϱ i τ je konstantní, t. j. je-li Γ šroubovice na rotačním válci. Ostatně oskulační roviny křivky Γ svírají s osou válce stálý úhel, tedy totéž platí i pro kolmé k nim tečny křivky křivosti a tyto křivky jsou tedy šroubovice na válcích rovnoběžných s osou daného válce, na němž se Γ nalézá. Volme osu tohoto válce za osu Oz a máme rovnici šroubovice Γ

$$x = a\cos\varphi,\quad y = a\sin\varphi,\quad z = ac\varphi\quad (c = \operatorname{cotg}\omega), \tag{17}$$

kde ω je úhel tečny šroubovice s osou válce. Schema směrových kosinů pro tečnu, normálu a binormálu jest

$$\begin{array}{llll} t\colon & -\sin\omega\sin\varphi, & \sin\omega\cos\varphi, & \cos\omega \\ n\colon & -\cos\varphi, & -\sin\varphi, & 0 \\ b\colon & \cos\omega\sin\varphi, & -\cos\omega\cos\varphi, & \sin\omega, \end{array}$$

dále

$$s = \frac{a\varphi}{\sin\omega},\quad \varrho = \frac{a}{\sin^2\omega},\quad \tau = -\frac{a}{\sin\omega\cos\omega},\quad \frac{\varrho}{\tau} = -c. \tag{18}$$

Parametrické vyjádření plochy Φ dle rovnic (3) jest nyní

$$\begin{aligned} X &= -ac^2\cos\varphi - \varrho(\sin\omega\sin\varphi\sin u + \cos\varphi\cos u), \\ Y &= -ac^2\sin\varphi + \varrho(\sin\omega\cos\varphi\sin u - \sin\varphi\cos u), \\ Z &= ac\varphi + \varrho\cos\omega\sin u; \end{aligned} \tag{19}$$

křivoznačné čáry jsou dány podmínkou

$$u = (\varphi - \varphi_0)\sin\omega. \tag{20}$$

Z rovnic (19) plyne pro průmět křivoznačné čáry

$$X + \mathrm{i}Y = e^{\mathrm{i}\varphi}(-ac^2 - \varrho\cos u + \mathrm{i}\varrho\sin\omega\sin u), \tag{21}$$

či nahradíme-li $\sin u$, $\cos u$ příslušnými výrazy v $e^{\mathrm{i}u}$

$$X + \mathrm{i}Y = -ac^2 e^{\mathrm{i}\varphi} - \tfrac{1}{2}\varrho e^{\mathrm{i}(\varphi-u)}[(1 + \sin\omega) + (1 - \sin\omega)e^{2\mathrm{i}u}]. \tag{21a}$$

Zaveďme pro okamžik proměnou $\psi = \varphi - \varphi_0$, tedy $u = \psi\sin\omega$, a jest

$$X + \mathrm{i}Y = e^{\mathrm{i}\varphi_0}\{-ac^2e^{\mathrm{i}\psi} - \tfrac{1}{2}\varrho e^{\mathrm{i}(\psi-u)}[(1 + \sin\omega) + (1 - \sin\omega)e^{2\mathrm{i}u}]\}.$$

Jsou-li $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ souřadnice bodu na křivoznačné čáře $\varphi_0 = 0$, jest

$$X + \mathrm{i}Y = e^{\mathrm{i}\varphi_0}(\overline{X} + \mathrm{i}\overline{Y}),\quad Z = ac\varphi_0 + \overline{Z}. \tag{22}$$

Všechny křivoznačné čáry plochy Φ jsou shodny a dostanou se z jedné otočením o úhel φ_0 kolem osy Oz a pošinutím o délku $ac\varphi_0$ ve směru této osy.

Pro střed křivosti křivky (21) najdeme jednoduchým výpočtem

$$X_0 + \mathrm{i}Y_0 = - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} a \left(\cos u - \mathrm{i}\frac{\sin u}{\sin\omega}\right) \qquad (23)$$

a pro polohu příslušnou hodnotě $\varphi_0 = 0$ $(u = \varphi \sin\omega)$

$$X_0 + \mathrm{i}Y_0 = - \frac{a\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi - u)}}{2\sin\omega} [(1 + \sin\omega) - (1 - \sin\omega)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}u}]. \qquad (23a)$$

Porovnejme tuto rovnici s vyjádřením bodu na epicykloidě, jež se vytvoří kotálením kružnice o poloměru r po kružnici o poloměru R:

$$X + \mathrm{i}Y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}[R + r - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}],\ R\alpha = r\beta; \qquad (24)$$

při hodnotách

$$R = a, \quad r = a\frac{1 - \sin\omega}{2\sin\omega},\ \alpha = \varphi - u,\ \beta = 2u\ \ (u = \varphi\sin\omega)$$

je podmínka $R\alpha = r\beta$ skutečně splněna. Křivka (23a) je tedy epicykloida, ovšem otočená o 180° ($\varphi = u = 0$ dává bod vratu $X_0 + \mathrm{i}Y_0 = -a$). Evoluta křivky (21) je tedy epicykloida (23a), ale křivka (21) sama není epicykloida, nýbrž křivka s epicykloidou rovnoběžná. Skutečná evoluta epicykloidy (24) jest

$$X_0 + \mathrm{i}Y_0 = \frac{R}{R + 2r}[(R + r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha + \beta)}].$$

Srovnáním s (23a) vidíme, že (23a) je evolutou epicykloidy vytvořené bodem

$$x + \mathrm{i}y = -\tfrac{1}{2}\varrho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi - u)}[(1 + \sin\omega) + (1 - \sin\omega)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}u}]. \qquad (25)$$

Srovnáním s rovnicí (21a) jde

$$X + \mathrm{i}Y = x + \mathrm{i}y - ac^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}. \qquad (26)$$

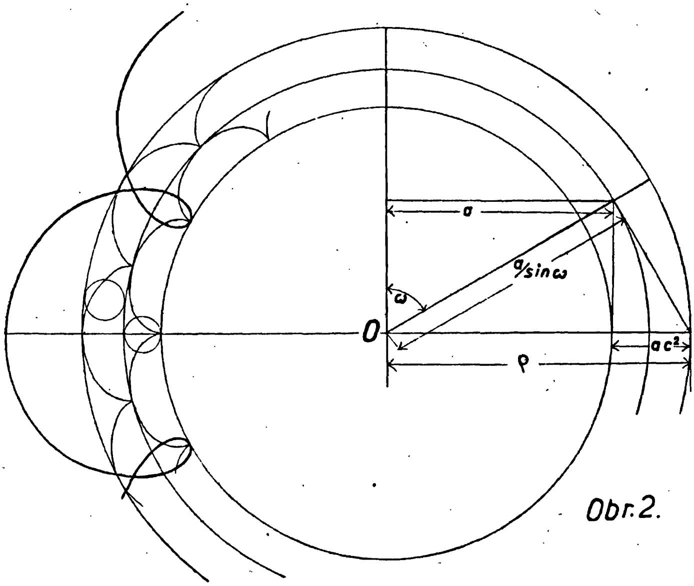
Normála křivky (21) v bodě φ je rovnoběžná se směrem φ, tedy poslední rovnice ukazuje:

Čáry křivosti plochy Φ vytvořené oskulačními kružnicemi šroubovice na rotačním válci promítají se do základny válce jako křivky rovnoběžné s epicykloidami, jež opisují body kružnice s poloměrem $r = \frac{\varrho}{2}(1 - \sin\omega)$ při kotálení po kružnici soustředné se základnou válce o poloměru ϱ.

V obr. 2 je vyznačen průběh půdorysu uvažovaných křivoznačných čar plochy Φ pro případ $\omega = 60°$. Kolem středu O jsou opsány kružnice poloměry a, $\varrho\sin\omega$, ϱ, jež tvoří geometrickou řadu. Volíme-li hybné kružnice v mezikružích $a - \varrho\sin\omega$, $\varrho\sin\omega - \varrho$ tak, aby se kotálely po vnitřní kružnici, opisují body hybné kružnice v prvém případě křivku

(23a), v druhém křivku (25). Půdorys křivoznačné čáry je rovnoběžný s poslední křivkou (vytažen silně).

4. Křivky stálé Gaussovy křivosti na ploše Φ (u = konst) jsou dány rovnicemi (19) a jsou to šroubovice na rotač. válcích souosých. Poloměr základny je



Obr. 2.

$$a_u = \sqrt{(ac^2 + \varrho \cos u)^2 + \varrho^2 \sin^2\omega \sin^2 u},$$

spád je

$$c_u = \frac{\mathrm{d}Z}{a_u \,\mathrm{d}\varphi} = \frac{ac}{a_u},$$

prvek oblouku

$$\mathrm{d}S = a_u \sqrt{1 + c_u^2}\, \mathrm{d}\varphi.$$

Směrnice křivoznačné čáry jsou

$$\cos\omega \sin\varphi : -\cos\omega \cos\varphi : \sin\omega$$

a pro úhel sevřený oběma křivkami nalezneme

$$\cos\psi = \frac{\varrho(1 + \cos u) \cos\omega}{a_u \sqrt{1 + c_u^2}},$$

kterážto veličina závisí pouze na hodnotě u. Tedy *šroubovice stálé hlavní křivosti na ploše Φ jsou kosoúhlé trajektorie čar křivosti.*

5. Zajímavější jsou evoluty čar křivosti čili fokály ležící na ploše tečen (t). Rovnice (16) v našem zvláštním případě jsou

$$
\begin{aligned}
X &= a \cos\varphi + \varrho \sin\omega \sin\varphi \operatorname{tg} u \\
Y &= a \sin\varphi - \varrho \sin\omega \cos\varphi \operatorname{tg} u \\
Z &= ac\varphi - \varrho \cos\omega \operatorname{tg} u,
\end{aligned} \tag{27}
$$

při čemž

$$u = (\varphi - \varphi_0) \sin\omega.$$

Snadno poznáváme, že všechny křivky (F) jsou vespolek shodné a jedną v druhou přejde šroubovým pohybem. Lze tedy předpokládati $\varphi_0 = 0$ a v tomto případě lze ukázati zajímavou geometrickou interpretaci rovnic (27).

Nechť hybná kružnice poloměru a se kotálí po pevné kružnici poloměru c tak, že sklon její roviny k rovině kružnice (c) zůstává týž. Bod M v rovině kružnice (a) opisuje sférickou epicykloidu. Kolmice na roviny obou kružnic v jejich středech vztyčené sekou se v bodě V. Pohyb lze nahraditi kotálením kužele $V(a)$ po kuželu $V(c)$. Volme rovinu kružnice (c) za (xy), její střed O za počátek souřadnic, úhel obou rovin buď α, střed hybné kružnice S. Přímku SM nazýváme loukotí. Pišme $\overline{SM} = \lambda a$. Nechť pohyb začíná v bodě $A(c, 0, 0)$ a počáteční poloha loukotě ať jde tímto bodem. Mezi odkotálenými oblouky ψ na pevné, φ na hybné kružnici je vztah

$$a\varphi = c\psi$$

a sférická epicykloida je dána výrazy*)

$$
\begin{aligned}
x &= [c - a \cos\alpha(1 - \lambda \cos\varphi)] \cos\psi + \lambda a \sin\varphi \sin\psi \\
y &= [c - a \cos\alpha(1 - \lambda \cos\varphi)] \sin\psi - \lambda a \sin\varphi \cos\psi \\
z &= a \sin\alpha(1 - \lambda \cos\varphi).
\end{aligned} \tag{28}
$$

Při tomto kotálení probíhá loukoť přímkovou zborcenou plochu, jejíž stopa (Q) na rovině $z = 0$ má rovnice

$$
\begin{aligned}
x &= c \cos\psi + a \operatorname{tg}\varphi \sin\psi, \\
y &= c \sin\psi - a \operatorname{tg}\varphi \cos\psi;
\end{aligned} \tag{29}
$$

tuto křivku nazývejme *loukotnicí*. Nezávisí na λ a α, což je geometricky zřejmo. Srovnáním rovnic (27) a (29) vyjde, že *půdorys fokální křivky* (F) *je loukotnicí sférické epicykloidy*, při čemž pevná kružnice má poloměr a a hybná poloměr $\varrho \sin\omega = \dfrac{a}{\sin\omega}$; odkotálený úhel na pevné kružnici je φ, na hybné u. Vztah

$$a\varphi = \varrho u \sin\omega$$

zaručuje při $\varphi_0 = 0$ rovnost příslušných oblouků. Poněvadž hybná kružnice má poloměr větší než pevná, lze voliti sklon α tak, aby střed S padl na Oz a splynul tedy s V. Hybný kužel, který se kotálí po kuželu $V(c)$, přešel tedy v rovinu a uvažovaný pohyb lze interpretovati jako odvíjení

*) M. LERCH, O čarách a plochách, jež se vytvořují při kotálení kruhu po čáře rovinné, jakož i některých jiných plochách kruhových. Rozpravy České akademie, r. XXVI, č. 7 (1916).

části povrchu (ohebné a neroztažitelné) s pláště rotačního kužele $V(c)$. Při odvíjení přechází základní kružnice (c) v kružnici s poloměrem $\overline{VA}$. Poloměr křivosti kotálnice opsané bodem M je kolmá vzdálenost bodu M od přímky kužele ležící v tečné rovině vedené bodem M, neboť kužel $V(c)$ je polární plocha kotálnice (obálka normálních rovin) a jeho přímky jsou osami křivosti. V tomto případě jde loukoť pevným bodem V a plocha loukotí přechází v kuželovou plochu, kterou se kotálnice z vrcholu V promítá jako loukotnice.

Tato sférická epicykloida je zvláštní případ šroubovice cylindrokonické.*)

Hlavní středy křivosti plochy oskulačních kružnic obyčejné šroubovice, jež odpovídají bodům téže čáry křivosti, leží na geodetice rozvinutelné plochy tečen základní křivky, která ji kolmo protíná. Kolmý průmět této geodetiky do základny válce je loukotnicí sférického kotálení kruhového a lze ji také považovati za centrální průmět sférické šroubovice.

Z rovnic (28) pro sférickou epicykloidu dostaneme rovnice sférické šroubovice právě uvažované, nahradíme-li litery

$$c,\ a,\ \cos\alpha,\ \psi,\ \varphi$$

hodnotami

$$a,\ \frac{a}{\sin\omega} = \varrho \sin\omega,\ \sin\omega,\ \varphi,\ u$$

a při tom $\lambda = 1$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\bar{x} &= a \cos u \cos\varphi + \varrho \sin\omega \sin u \sin\varphi \\ \bar{y} &= a \cos u \sin\varphi - \varrho \sin\omega \sin u \cos\varphi \\ \bar{z} &= ac(1 - \cos u),\end{aligned} \tag{30}$$

při čemž

$$u = \varphi \sin\omega.$$

Srovnáním rovnice

$$\begin{aligned}\bar{x} + i\bar{y} &= e^{i\varphi}(a \cos u - i\varrho \sin\omega \sin u) = \\ &= e^{i(\varphi - u)}\left(a\frac{1 + \sin\omega}{2\sin\omega} - a\frac{1 - \sin\omega}{2\sin\omega}\, e^{2iu}\right)\end{aligned} \tag{31}$$

s rovnicí (23a) vychází:

Průmět uvedené sférické šroubovice do základny válce jest epicykloida shodná s epicykloidou, která je evolutou průmětu křivky křivosti (pouze otočená o 180°).

Střed koule, na níž se nalézá křivka (30) jest $V(0, 0, ac)$. Stopa tečny sférické šroubovice (30) jest bod

$$x + iy = (\bar{x} + i\bar{y}) - \bar{z}\,\frac{\bar{x}' + i\bar{y}'}{\bar{z}'}. \tag{32}$$

*) M. LERCH, Příspěvky k vlastnostem sférických čar šroubových, Rozpravy České akademie, r. XXIII, č. 33 (1914).

Derivujme rovnici (31) dle φ a dostaneme po úpravě

$$\bar{x} + i\bar{y}' = \frac{a\cos^2\omega}{\sin\omega}\sin u \,.\, e^{i\varphi};$$

ježto

$$\bar{z}' = ac\sin\omega\sin u,$$

jest

$$\frac{\bar{x}' + i\bar{y}'}{\bar{z}'} = ce^{i\varphi}.$$

Dosazením do (32) vychází pro stopu tečny křivky (30)

$$x + iy = e^{i\varphi}(-ac^2 + \varrho\cos u - i\varrho\sin\omega\sin u).$$

Tento bod je v jednoduchém vztahu k průmětu bodu na křivoznačné čáře $\varphi_0 = 0$ [rov. (21)]. Půlící bod jejich spojnice leží na kružnici s poloměrem ac^2 a splývá s průmětem středu křivosti základní šroubovice. Je skutečně

$$\tfrac{1}{2}[X + iY + x + iy] = -ac^2e^{i\varphi}.$$

Stopa tečny naší sférické šroubovice na rovině $z = k$ je bod

$$X + iY = \bar{x} + i\bar{y} - (\bar{z} - k)\frac{\bar{x}' + i\bar{y}'}{\bar{z}'} = x + iy + kce^{i\varphi},$$

je-li $x + iy$ stopa téže tečny na rovině $z = 0$. Zvolíme-li $k = 2ac$, t. j. rovinu řezu ve vzdálenosti vrcholu V od základny, avšak na druhé straně, dostaneme výraz

$$X + iY = e^{i\varphi}(ac^2 + \varrho\cos u - i\varrho\sin\omega\sin u),\quad u = \varphi\sin\omega; \tag{33}$$

tento bod je diametrální protějšek bodu F [rov. (21)]. Z toho vychází následující konstrukce křivoznačné čáry plochy Φ:

Protneme rozvinutelnou plochu tečen sférické šroubovice (30), *jejíž půdorys je epicykloida vytvořená kotálením kružnice s poloměrem a* $\dfrac{1 - \sin\omega}{2\sin\omega}$ *po kružnici s poloměrem a, rovinou obsahující druhou část proniku její koule s válcem, na němž je základní šroubovice* ($z = 2ac$), *a řez otočíme kolem osy válce o 180°.*

Centrální průmět téže šroubovice ze středu koule do základny válce dává řídící křivku válce, jenž rozvinutelnou plochu šroubovou protne ve fokále F.

Čáry F se ovšem pohodlně rýsují jako geodetiky plochy tečen původní šroubovice.

*

Sur la surface engendrée par les cercles osculateurs d'une courbe gauche. L'auteur étudie les systèmes de lignes de courbure de la surface considérée et les surfaces développables engendrées par les normales le long de ces courbes. Il étudie surtout la surface engendrée par les cercles osculateurs d'une courbe gauche Γ dont la courbure est constante. Si Γ est une hélice, l'auteur donne aussi beaucoup des constructions intéressantes.