Emil Schoenbaum

# Příspěvek k matematické theorii invalidního pojištění. [I.]

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 47 (1918), No. 2-3, 104--112

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122338

sečka $\Delta$ jest obalena spojnicemi dotyčných bodů všech $\Sigma_1 r$. K nim patří i společné tečny kuželoseček $R_1$, $S_1$, $T_1$ a $U_1$, neboť degeneruje li se $\Sigma_1 r$ v tyto tečny, leží v nich spojnice dotyčných bodů na $A$ a $B$.

Průsečík $A$ a $C$, bod $k$, jest dotyčným bodem tečny z $c$ k $A$ vedené. Splyne-li $P_1 \varrho$ s touto tečnou, splývají spojnice $\overline{p_1 q_1}$ a $\overline{p'_1 q_1}$ s $\overline{k q_1}$, takže se $q_1$ stane dotyčným bodem tečny té na kuželosečce $\Delta$, která prochází takto definovaným bodem $q_1$ na $B$, čímž poslední část věty dokázána.

Steiner praví dále, (l. c. 473.), že kuželosečka $\Delta$ se dotýká přímek $K$ a $L$ v jejich průsečících s $G'_1$, což však, jak v dodatku k sebraným spisům (l. c. 740.) správně ukázáno, není možné. (Dokončení.)

# Příspěvek k matematické theorii invalidního pojištění.

Dr. **Emil Schoenbaum.**

Ve svém pojednání v Rozpravách české akademie ukázal jsem, že matematická theorie některých kolektivních zjevů vede k integrálním rovnicím Volterrovým, tak ku příkladu theorie invalidního pojištění, přihlížíme-li k možnosti opětného nabytí aktivnosti. V tomto článku převádím jiný problem, daleko jednodušší, na řešení integrální rovnice, při čemž se naskytá příležitost, odvoditi také nové řešení některých jiných úloh v praksi se vyskytujících.

1. Mysleme si jistý souhrn aktivních osob homogenního složení a určitého stáří a pozorujme je po nějakou dobu. Během té doby zemře jich určitý počet a určitý počet stane se invalidními. Vzniknou tak během času z původního počtu aktivních osob dvě skupiny: skupina aktivních osob, která se zmenšuje invalidisacemi a umíráním, a skupina osob invalidních, která roste přistupováním nových invalidů ze skupiny osob aktivních a zmenšuje se umíráním invalidů, jež nechť se řídí jinými zákony než umírání aktivních osob. Obě skupiny shrnuty udávají počet osob, které jsou z oné původní skupiny aktivních osob ještě na živu buď jako aktivní nebo invalidní osoby.

Při tom není třeba invalidnost a aktivnost přesně definovati. Stačí mysleti si pod aktivností jakoukoli vlastnost takovou, že se dá o každém členu skupiny rozhodnouti, má-li ji nebo ne. V kladném případě je aktivní, ztratí-li tuto vlastnost, stává se invalidním. (Příkladem takové dichotomie pojmů jest schopnost a neschopnost výdělková v určitém povolání.) Při tom považujeme za účelem zjednodušení ztrátu aktivnosti, tedy invalidnost, za definitivní, jinými slovy nepřipouštíme reaktivisaci, t. j. možnost opětného získání ztracené vlastnosti.

Mysleme si nyní, že známe z pozorování velmi obsáhlého a homogenního materiálu měrná čísla úmrtnosti a invalidnosti osob aktivních a úmrtnosti invalidů v jich závislosti na stáří, jakož i počáteční stav skupiny osob aktivních ve stáří $x_0$, v němž není ještě invalidů. Můžeme pak jednoduše vyvoditi z těchto dat tabulku úmrtnosti pro smíšenou skupinu, sestávající z osob aktivních i invalidů.

Buď

$l^{aa}(x)$ počet aktivních osob ve stáří $x$, kteří zůstali aktivními z původního počtu $l^{aa}(x_0)$, t. zv. tabulka výluky (dekrementu) osob aktivních;

$l^{ii}(x)$ počet invalidů ve stáří $x$ vzniklých postupně ze skupiny osob aktivních [1];

$l(x)$ počet osob vůbec aktivních i invalidních, kteří jsou ve stáří $x$ na živu z aktivních osob stáří $x_0$. Patrně jest

$$l(x) = l^{aa}(x) + l^{ii}(x);$$

$l^{i}(x)$ počet invalidů úmrtní tabulky invalidů.

Dále budiž

$i(x)$ pravděpodobnost (t. zv. závislá) pro $x$-letou aktivní osobu, státi se během roku invalidní před dosažením stáří $x+1$;

$p^{ai}(x) =$ pravděpodobnost pro $x$-letou aktivní osobu, státi se během roku invalidou a dožíti se stáří $x+1$.

---

[1]) Označení voleno ve shodě s odbornou literaturou tak, že dvojí index nahoře značí stav na počátku a na konci doby pozorování.

$p^i(s)$, $p^i(s, x)$ pravděpodobnosti dle úmrtní tabulky invalidů pro $s$-letého invalidu, dožíti se stáří $s+1$ po případě stáří $x$; patrně jest

$$p^i(s)=\frac{l^i(s+1)}{l^i(s)},\quad p^i(s, x)=\frac{l^i(x)}{l^i(s)}=p^i(s)\,.\,p^i(s+1)\ldots p^i(x-1).$$

Jest pak úkolem, známe-li dekrementní tabulku osob aktivních, t. j čísla $l^{aa}(x_0)$, $l^{aa}(x_0+1), \ldots l^{aa}(x)$, dále pravděpodobnosti $p^{ai}(x)$ a $p^i(x)$ vypočítati dekrementní tabulku osob vůbec, t. j. čísla $l(x_0)$, $l(x_0+1)\ldots l(x)$.

Úloha ta řeší se následující rovnicí, jejíž odvození je velmi jednoduché:

$$l(x)=l^{aa}(x)+l^{ii}(x)=l^{aa}(x)+\sum_{s=x_0}^{x-1} l^{aa}(s)\,p^{ai}(s)\,p^i(s+1, x); \tag{1}$$

skutečně značí jednotlivý člen součtu na pravo, kolik osob z $s$-letých aktivních stane se invalidními během roku a dožijí se jako invalidové stáří $x$.

Uvážíme-li, že jest

$$p^i(s, x)=\frac{l^i(x)}{l^i(s)}$$

a píšeme-li k vůli krátkosti

$$l^{aa}(s)\,.\,\frac{p^{ai}(s)}{l^i(s+1)}=\gamma(s),$$

bude jednodušeji

$$l(x)=l^{aa}(x)+l^i(x)\sum_{s=x_0}^{x-1}\gamma(s).$$

Označíme-li tedy ještě [1])

$$\sum_{s=x_0}^{x-1}\gamma(s)=\Gamma(x),$$

bude
$$l(x)=l^{aa}(x)+l^i(x)\,\Gamma(x). \tag{2}$$

V praksi děje se ovšem řešení úlohy postupně, počínaje od stáří $x_0$, kdežto rovnice (2) dovoluje vypočísti $l(x)$ vyčíslením pomocných veličin $\Gamma(x)$.

Častěji než úloha právě řešená vyskytuje se úloha opačná: Dána jest tabulka úmrtnosti osob vůbec, t. j. řada čísel $l(x)$ a

---

[1]) Užívám označení pojednání *Tauberova*: Die Sterblichkeitsuntersuchung in der Invalidenversicherung. Löwenbergs Samml. Bd. III.

čísla $p^{ai}(x)$ a $p^i(s, x)$, a jest stanoviti tabulku čísel $l^{aa}(x)$, t. j. dekrementní tabulku aktivních osob.

Před touto úlohou ocitá se ku př. pojišťovna, užívající určité tabulky úmrtnosti pro životní pojištění, chce-li zavésti doplňkem k životnímu pojištění pojištění invalidní s použitím pravděpodobností o invalidnosti a úmrtnosti invalidů odvozených z cizího materialu, který má býti ovšem dle možnosti podobného složení jako material pojišťovny.[1]

Také tato úloha velmi známá a dávno řešená[2] dá se řešiti rovnicí (1), která stanoví rekurentní vztah mezi $l^{aa}(x)$ a $l^{aa}(x-1)$, $l^{aa}(x-2)$, ... $l^{aa}(x_0)$.

Abychom obdrželi jednodušší řešení než se v učebnicích udává, pišme rovnici tu ve tvaru

$$\frac{l(x)}{l^i(x)} = \frac{l^{aa}(x)}{l^i(x)} + \sum_{s=x_0}^{x-1} \frac{l^{aa}(s)}{l^i(s)} p^{ai}(s) \frac{l^i(s)}{l^i(s+1)}$$

a označíme-li

$$\frac{l^{aa}(x)}{l^i(x)} = \varphi(x) \text{ a } \frac{l(x)}{l^i(x)} = f(x),$$

$$p^{ai}(s) \frac{l^i(s)}{l^i(s+1)} = \frac{p^{ai}(s)}{p^i(s)} = h^{ai}(s),$$

bude

$$f(x) = \varphi(x) + \sum_{s=x_0}^{x-1} \varphi(s)\, h^{ai}(s), \tag{3}$$

kdež tedy $\varphi(x)$ jest neznámá funkce, a $f(x)$ a $h^{ai}(x)$ jsou veličiny, které pro všechna celá $x$ přicházející v úvahu jsou známy.

Z (3) plyne ještě

$$f(x+1) = \varphi(x+1) + \sum_{s=x_0}^{x} \varphi(s)\, h^{ai}(s)$$

a tudíž odečtením

$$f(x+1) - f(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x) + h^{ai}(x) \cdot \varphi(x),$$

čili

$$\varphi(x+1) - \varphi(x)(1 - h^{ai}(x)) = \Delta f(x). \tag{4}$$

Rekurentní vzorec (4) hodí se ku výpočtu veličin $\varphi(x)$ a tedy i $l^{aa}(x)$ daleko lépe než přímé postupné použití rovnice (1)

---

[1]) Viz ku př. Karup: Die Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensversicherungsbank str. 67, kde však se činí předpoklad, že *úmrtnost invalidů jest táž*, jako úmrtnost osob aktivních.

[2]) Viz ku př. Pokorný: Důchod invalidní.

pomocí něhož se obyčejně tabulky čísel $l^{aa}(x)$ vypočítávají.[1]) a dá se použití jeho jednoduše zmechanisovati, píšeme-li jej ve tvaru

$$\Delta\varphi(x) = -h^{ai}(x)\,\varphi(x) + \Delta f(x).$$

Při tom jest důležito, že koefficent $h^{ai}(x)$ je mnohem menší než 1,[2]) takže případná nepřesnost některého $\varphi(x)$ nepřichází do následujících $\varphi(x)$ zvětšená, *na kterouž okolnost při použití rekurrentních vzorců třeba v praxi vždy dbáti.*

Třeba že tedy postupné vyčíslení veličin $\varphi(x)$ a tedy i $l^{aa}(x)$ dle vzorce (4) je velmi jednoduché a výhodné, není bez zajímavosti určiti jednou ze vztahu (4) $\varphi(x)$ a $l^{aa}(x)$ nezávisle na předchozích hodnotách.

Za tím účelem řešme jednoduchou differenční rovnici 1. řádu (4) známým způsobem:

Položme

$$\varphi(x) = \prod_{s=x_0}^{x-1}\left(1 - h^{ai}(s)\right) . \, C(x),$$

kde neznámá funkce $C(x)$ se určí dosazením do (4) rovnicí

$$C(x+1) - C(x) = \frac{\Delta f(x)}{\prod\limits_{s=x_0}^{x}\left(1 - h^{ai}(s)\right)},$$

čili

$$C(x) = \sum_{t=x_0}^{x-1} \frac{\Delta f(t)}{\prod\limits_{s=x_0}^{t}\left(1 - h^{ai}(s)\right)} + \varphi(x_0)$$

a tedy

$$\varphi(x) = \prod_{s=x_0}^{x-1}\left(1 - h^{ai}(s)\right)\left[\sum_{t=x_0}^{x-1} \frac{\Delta f(t)}{\prod\limits_{s=x_0}^{t}\left(1 - h^{ai}(s)\right)} + f(x_0)\right], \qquad (5)$$

kde napravo jsou vesměs známé veličiny.

Vzorec (5), tuto prve odvozený, je ovšem pro přímé vyčíslení veličin $\varphi(x)$ příliš složitý a hodí se nejvýše ke kontrolle

---

[1]) Viz ku př. *Schärtlin*: Die mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung 1907, *Czuber*: Wahrscheinlichkeitsrechnung II. Band 224, *Richard*: Étude sur l'assurence complémentaire, Paris 1911.

[2]) Pro všechna $x$ nepřevyšující určité stáří (ku př. 60); pro $x < x_0$ je ovšem $h^{ai}(x) = 0$.

výpočtů dle rekurentního vzorce (4), jsou-li vyčísleny součiny $\Pi(1 - h^{ai}(s))$.

Zbývá ukázati, jak stanoví se čísla $p^{ai}(s)$, nejsou-li známa přímo z pozorování. K tomu účelu jsou nutny předpoklady o rozdělení invalidit a průběhu úmrtnosti invalidů během roku. Na základě nejčastěji činěné hypothesy rovnoměrného rozdělení invalidních případů i úmrtí během roku jest ku př.

$$p^{ai}(s) = i(s)\left(1 - \frac{q^i(s)}{2}\right) = i(s) \cdot \frac{1 + p^i(s)}{2}\,^{1)},$$

při čemž si tedy myslíme, že všichni invalidové povstali průměrně v polovici roku a podléhají úmrtnosti invalidů jen půl roku.

Pro tuto hypothesu jest pak

$$h^{ai}(s) = \cdot \frac{p^{ai}(s)}{p^i(s)} = \frac{i(s)}{2}\left(\frac{1}{p^i(s)} + 1\right).$$

2. Doposud jsme za časovou jednotku brali dobu jednoho roku, vzorce však odvozené se nemění, volíme-li jednotku časovou $\frac{1}{n}$ roku. Necháme-li růsti $n$ do nekonečna, můžeme provésti úvahy dříve učiněné pro časový differentiál $dx$.

Mysleme si tedy opět veličiny $l^{aa}(x)$, $l^{ii}(x)$ co reálné funkce proměnné $x$ mající derivaci a místo pravděpodobností mysleme si, že jsou dány intensity:

1. intensita invalidnosti $\nu(x)$, jejíž význam je ten, že $\nu(x)\,dx$ znamená pravděpodobnost pro $x$-letou aktivní osobu, státi se během následujícího nekonečně krátkého intervalu časového $dx$ invalidní.

2. intensita úmrtnosti invalidů $\mu^i(x)$, kde tedy $\mu^i(x)\,dx$ udává pravděpodobnost úmrtí pro $x$-letého invalidu v době $x$ až do $x + dx$.

3. a intensita úmrtnosti osob vůbec $\mu(x)$, tak že

$$l(x)\,\mu(x)\,dx$$

udává, kolik $x$-letých osob vůbec (aktivních i invalidů) zemře během následujícího intervallu časového $dx$.

---

[1]) Jiné hypothesy viz ku př. Pokorný, Důchod invalidní str. 15.—18.

Při tom jest dle definice

$$\frac{dl^i(x)}{dx} = - l^i(x)\mu^i(x)$$

a integrujeme-li, patrně

$$l^i(x) = Ce^{-\int_s^x \mu^i(\xi)d\xi},$$

kde se pro pro $x = s$ určí $C = l^i(s)$, tedy

$$\frac{l^i(x)}{l^i(s)} = e^{-\int_s^x \mu^i(\xi)d\xi} = p^i(x, s),$$

pravděpodobnost, že $s$-letý invalida dožije se stáří $x$ jako invalida, a úplně analogicky pravděpodobnost $p(s, x)$, že $s$-letá osoba vůbec dožije se stáří $x$ (buď jako aktivní nebo invalidní)

$$p(x, s) = \frac{l(x)}{l(s)} = e^{-\int_s^x \mu(\xi)d\xi}.$$

Jsou-li tedy dány intensity $\mu(x)$ a $\mu^i(x)$ jako integrace schopné funkce stáří, známe též dekrementní tabulku osob vůbec a invalidů a tedy čísla $l(x)$ a $l^i(x)$.

Určení intensit děje se buď přímo ze statistického pozorování [1]) methodami numerického differencování anebo z jiných veličin odvozených ze zkušeností [2]).

Jest opět úkolem, stanoviti funkci $l^{aa}(x)$, známe-li intensity $\nu(x)$, $\mu^i(x)$, $\mu(x)$ a počáteční stav aktivních

$$l^{aa}(x_0) = l(x_s).$$

Patrně jest opět

$$l(x) = l^{aa}(x) + l^{ii}(x),$$

kde $l^{ii}(x)$ značí počet invalidů, kteří vznikli během doby ze souhrnu aktivních a dožili se jako invalidové stáří $x$; uvážíme-li, že jest pravděpodobnost pro $s$ letou aktivní osobu, státi se v následujícím differenciálu časovém $ds$ invalidní a dožíti se pak stáří $x$ roků patrně

$$\nu(s)\, ds\, p^i(x, s),$$

---

[1]) Viz *Karup*: Die Finanzlage der Gothaischen Witwensocietät atd. str. 41.

[2]) Viz ku př. *Spangenberg*: Die Karupsche Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten. Versich. math. Abhandlungen 1911.

najdeme ihned, integrujeme-li od $x_0$ do $x$, rovnici

$$l(x) = l^{aa}(x) + \int_{x_0}^{x} l^{aa}(s)\,\nu(s)\,p^i(x, s)\,ds, \tag{7}$$

která odpovídá rovnici (1).

Z této rovnice určíme (po případě numerickými methodami integrace) funkci $l(x)$, dány-li jsou funkce $l^{aa}(x)$, $\nu(x)$, $\mu^i(x)$.

Nás zajímá však úkol opačný, určiti $l^{aa}(x)$ z daných $\mu(x)$, $\nu(x)$, $\mu^i(x)$.

Za tím účelem uvažme opět, že

$$p^i(x, s) = \frac{l^i(x)}{l^i(s)} = e^{-\int_s^x \mu^i(\xi)\,d\xi}.$$

Z rovnice (7) dostaneme tedy

$$\frac{l(x)}{l^i(x)} = \frac{l^{aa}(x)}{l^i(x)} + \int_{x_0}^{x} \frac{l^{aa}(s)}{l^i(s)}\,\nu(s)\,ds,$$

a položíme-li

$$\frac{l(x)}{l^i(x)} = f(x), \quad \frac{l^{aa}(x)}{l^i(x)} = \varphi(x),$$

a derivujeme-li dle $x$ jednou:

$$f'(x) = \varphi'(x) + \varphi(x)\,\nu(x), \tag{8}$$

kde $f(x)$ a $\nu(x)$ jsou známé funkce a $\varphi(x)$ hledáme.

Linearní differenciální rovnice (8) 1. řádu skýtá nám pak pro $\varphi(x)$ řešení ve tvaru

$$\varphi(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \nu(\xi)d\xi} + e^{-\int_{x_0}^{x} \nu(\xi)d\xi} \int_{x_0}^{x} f'(x)\,e^{\int_{x_0}^{x} \nu(\xi)d\xi}\,dx,$$

a uvážíme-li, že pro $x = x_0$

$$l^{aa}(x_0) = l(x_0)$$

a tedy $\qquad \varphi(x_0) = f(x_0)$,

$$\varphi(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} \nu(\xi)d\xi}\left[f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(x)\,e^{\int_{x_0}^{x} \nu(\xi)d\xi}\,dx\right].$$

Provedeme-li ještě partielní integraci v druhém sčítanci, bude po jednoduché redukci

$$\varphi(x) = f(x) - e^{\int_{x_0}^{x} \nu(\xi)d\xi} \int_{x_0}^{x} f(t)\,e^{-\int_{x_0}^{x} \nu(\xi)d\xi}\,\nu(t)\,dt$$

čili

$$\varphi(x) = f(x) - \int_{x_0}^{x} f(t) e^{-\int_t^x \nu(\xi) d\xi} \nu(t)\, dt,$$

a vrátíme-li se k významu funkcí $\varphi(x)$ a $f(x)$

$$l^{aa}(x) = l(x) - l^i(x) \int_{x_0}^{x} \frac{l(t)}{l^i(t)} e^{-\int_t^x \nu(\xi) d\xi} \nu(t)\, dt, \qquad (9)$$

čímž nalezen jest pro hledanou funkci analytický výraz závislý na známých funkcích $\mu(x)$, $\mu^i(x)$ a $\nu(x)$ a tím tedy úkol úplně řešen.

(Dokončení.)

---

# O těžných křivkách.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

**1.** V knihovně Jednoty českých mathematiků a fysiků našel jsem psané přednášky Kulíkovy o mechanice, které mají nadpis „Höhere Mechanik. Nach den Vorlesungen des Jak. Phil. Kulik, k k. Prof. zu Prag 1840/1 geschrieben von Wenzel Šimerka.“ Mezi str. 32. a 33. bylo vloženo několik listů, které obsahují nedokončený náčrtek nadepsaný „O křivkách těžných (těžnicích)“, jehož autorem jest snad Šimerka. V Kulíkových přednáškách jest obšírná kapitola o vlastnostech těžiště, ale nenašel jsem tam nic, co by se vztahovalo bezprostředně k onomu náčrtku. Jeho obsah jest takovýto: Zvolme na dané rovinné křivce pevný bod $A$; pohybuje-li se jiný bod $B$ po křivce, opisuje těžiště $M$ jejího oblouku $AB$ t. zv. *těžnou křivku.* Dokazuje se, že tečna sestrojená v bodě $M$ tečné křivky prochází příslušným bodem $B$ křivky původní a odvozují se rovnice pro těžnou křivku kružnice. Jiný druh těžných křivek dostaneme, když sestrojujeme těžiště plochy omezené obloukem křivky, osou useček a dvěma krajními pořadnicemi dané křivky, z nichž jest jedna pevná, druhá proměnná. —

Domnívám se, že zvláště pozoruhodná jest první tečná křivka, jejíž geometrický vztah ke křivce původní nezávisí na volbě soustavy souřadnic. V následujících řádcích odvozuji některé vlastnosti této těžné křivky; zobecňuji její konstrukci ve