Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Pleskot

Některé nové přibližné rektifikace oblouku kruhového

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 47 (1918), No. 2-3, 193--203

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122329

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1918

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

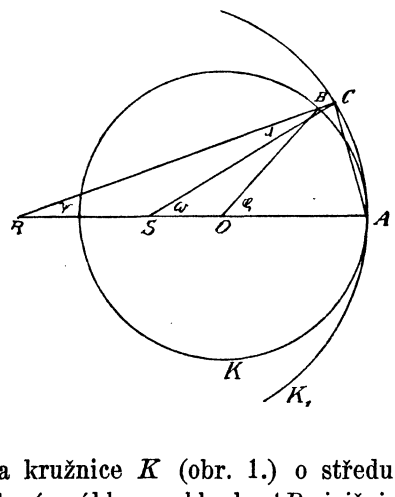
Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Některé nové přibližné rektifikace oblouku kruhového.

Dr. Ant. Pleskot v Plzni.

V následujícím uvedeme jistou obecnou methodu přibližné rektifikace oblouku kruhového, kteráž jakožto zvláštní případy obsahuje některé nové jakož i již známé konstrukce.

(Obr. 1)



Budiž dána kružnice K (obr. 1.) o středu O, poloměru r a na ní o středovém úhlu φ oblouk AB jejž jest vzpřímiti.

Narýsujme kružnici K_1, jež se dotýká dané kružnice v bodě A a jejíž poloměr budiž a, střed S; jest tedy

$$AS = a.$$

Aby konstrukce, jež později vyvodíme, byly jednoduchými, jest výhodno voliti $a > r$, a klademe-li tedy

$$r = ka,$$

jest pro ten případ k zlomkem pravým.

Na spojnici AO zvolme bod R, jehož vzdálenost od středu O budiž d, takže

$$AR = r + d.$$

Spojnice RB protne kružnici K_1 v bodě C; úlohou naší bude nejprvé stanoviti délku AC. Určíme-li tuto, bude další úlohou stanoviti vztah mezi a a d tak, aby délka AC mohla pokládána býti za přibližnou délku oblouku $AB = r\varphi$.

Položme:

$$\sphericalangle ASC = \omega, \quad \sphericalangle RCS = \lambda,$$
$$\sphericalangle SRB = \psi, \quad RB = l.$$

Z obrazce plynou vztahy tyto:

$$l^2 = d^2 + r^2 + 2dr \cos \varphi,$$

čili po známé redukci:

$$l = (d + r) \sqrt{1 - \frac{4dr}{(d+r)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

dále:

$$r : l = \sin \psi : \sin \varphi,$$

t. j.

$$\sin \psi = \frac{r}{l} \sin \varphi$$

$$a : (d - a + r) = \sin \psi : \sin \lambda$$

t. j.

$$\sin \lambda = \sin \psi \cdot \frac{d - a + r}{a} = \frac{d - a + r}{a} \frac{r}{l} \sin \varphi.$$

K určení ψ a λ máme tedy rovnice:

$$\sin \psi = \frac{r}{r+d} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \frac{4dr}{(d+r)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \qquad (\alpha)$$

$$\sin \lambda = \frac{r}{r+d} \frac{d - a + r}{a} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \frac{4dr}{(d+r)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \qquad (\beta)$$

Z obrazce plyne ještě

$$\omega = \psi + \lambda,$$

a konečně

$$AC = s = 2a \sin \frac{\omega}{2}, \tag{γ}$$

čímž prvá část naší úlohy řešena.

Stanovme z rovnic předchozích s jakožto funkci φ řadou potenční a omezme se v řadách na členy dle φ stupně třetího.

Položme pro krátkost v rovnicích (α) a (β) činitele, které jsou před výrazem

$$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \frac{4dr}{(d+r)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

rovným A a B, takže

$$\sin \psi = \frac{A \sin \varphi}{\sqrt{1 - \frac{4dr}{(d+r)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \tag{α}$$

$$\sin \lambda = \frac{B \sin \varphi}{\sqrt{1 - \frac{4dr}{(d+r)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \tag{β}$$

Rozvineme-li pravou i levou stranu rovnic předchozích dle mocnin veličin φ a ψ, φ a λ, obdržíme pro dostatečně malé φ platné rozvoje:

$$\psi - \frac{\psi^3}{6} + \ldots \quad = A\varphi + A\varphi^3\left(\frac{dr}{2\,(d+r)^2} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$

Z rovnice této plyne:

$$\psi = A\varphi + \alpha\varphi^3 + \ldots \quad = A\varphi\left(1 + \frac{\alpha}{A}\,\varphi^2\right) + \ldots,;$$

$$\psi^3 = A^3\varphi^3 + \ldots;$$

dosadíme-li tyto hodnoty za ψ a ψ^3 do rovnice předchozí, obdržíme identitu:

$$A\varphi + \varphi^3\left(\alpha - \frac{A^3}{6}\right) + \ldots$$

$$= A\varphi + A\varphi^3\left(\frac{dr}{2\,(d+r)^2} - \frac{1}{6}\right) + \ldots,$$

z níž plyne:

$$\alpha = \frac{A^3}{6} + \frac{A}{2}\frac{dr}{(d+r)^2} - \frac{A}{6}$$

a proto

$$\psi = A\varphi + \varphi^3\left(\frac{A^3}{6} + \frac{A}{2}\frac{dr}{(d+r)^2} - \frac{A}{6}\right) + \dots$$

Podobně obdržíme z rovnice (β)

$$\lambda = B\varphi + \varphi^3\left(\frac{B^3}{6} + \frac{B}{2}\frac{dr}{(d+r)^2} - \frac{B}{6}\right) + \dots$$

a tedy

$$\psi + \lambda = \omega = \varphi(A+B) + \varphi^3\left(\frac{A^3+B^3}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{A+B}{2}\frac{dr}{(d+r)^2} - \frac{A+B}{6}\right) + \dots$$

a

$$\omega^3 = \varphi^3 (A+B)^3 + \dots$$

Dosadíme-li hodnoty tyto do rovnice (γ):

$$s = 2a \sin\frac{\omega}{2} = a\left(\omega - \frac{\omega^3}{24} + \dots\right)$$

dospějeme k výsledku:

$$s = a(A+B)\left(\varphi + \varphi^3\left\{\frac{A^2 - AB + B^2}{6} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{dr}{2(d+r)^2} - \frac{1}{6} - \frac{(A+B)^2}{24}\right\} + \dots\right);$$

poněvadž

$$A + B = \frac{r}{d+r}\left(1 + \frac{d-a+r}{a}\right) = \frac{r}{a} = k,$$

$$A^2 + B^2 - AB = (A+B)^2 - 3AB =$$

$$= k^2 - 3\left(\frac{r}{d+r}\right)^2 \frac{d-a+r}{a} =$$

$$= k^2 - 3\left(\frac{r}{d+r}\right)^2\left(\frac{d+r}{r}\frac{r}{a} - 1\right) =$$

$$= k^2 - 3k\frac{r}{d+r} + 3\left(\frac{r}{d+r}\right)^2,$$

jest

$$s = r\varphi + r\varphi^3\left(\frac{k^3}{6} - \frac{k}{2}\frac{r}{r+d} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r+d}\right)^2 + \right.$$

$$\left.\frac{dr}{2(d+r)^2} - \frac{1}{6} - \frac{k^2}{24}\right) + \ldots$$

Rozdíl $s - r\varphi$, t. j. rozdíl úsečky AC a oblouku AB jest dán řadou, která počíná třetí mocninou φ^3; aby rozdíl ten počínal řadou o páté mocnině φ^5 a tím délka úsečky AC více blížila se oblouku AB, položme

$$\frac{k^2}{6} - \frac{k}{2}\frac{r}{r+d} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r+d}\right)^2 +$$

$$+ \frac{dr}{2(d+r)^2} - \frac{1}{6} - \frac{k^2}{24} = 0.$$

Podmínku tuto lze zjednodušiti, uvážíme-li, že součet členů

$$\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r+d}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{dr}{(d+r)^2} = \frac{1}{2}\frac{r}{d+r}.$$

Zavedeme-li tuto hodnotu do rovnice předchozí, nabude tato tvaru:

$$\frac{k^2}{8} - \frac{1}{6} = \frac{r}{2(r+d)}(k-1),$$

z níž plyne:

$$d = \frac{12k - 3k^2 - 8}{3k^2 - 4}r \qquad (1)$$

Kdybychom v této rovnici dosadili za k, $\frac{r}{a}$, dostali bychom přímo vztah mezi a a d.

Volíme-li tedy při daném k veličinu d tak, že o ní platí rovnice (1), pak

$$AC = r\varphi + r\varphi^5 M,$$

kdež M potenční řadu značí se členem stálým; klademe-li tedy oblouk AB rovným úsečce AC, dopouštíme se chyby, která úměrná jest poloměru a přibližně páté mocnině úhlu φ.

Přibližná rektifikace oblouku kruhového jest tedy tato: Je-li vzpřímiti oblouk AB, pak poloměrem

$$a = \frac{r}{k}$$

opíšeme ze středu S kružnici K_1, která dané kružnice dotýká se v bodě A; na spojnici AO vytkněme bod R tak, že

$$OR = d = \frac{12k - 3k^2 - 8}{3k^2 - 4} r, \tag{1}$$

a pak spojnice RB protne kružnici K_1 v bodě C a délka AC udává přibližně délku oblouku AB.

Aby konstrukce byly co možná jednoduché, volíme za k číslo vhodné, aby jak a tak i d snadno se odvodily.

Ukažme nejprvé, že v řadě těchto konstrukcí jest obsažena známá konstrukce Cusanova, někdy i Huyghensova zvaná.

Položíme-li totiž $k = 0$, pak $a = \infty$ a kružnice K_1 přechází v tečnu v bodě A ke kruhu K vedenou; rektifikační bod R nalezneme z rovnice (1), z níž plyne:

$$d = 2r.$$

Uvedeme nyní některé nové jednoduché konstrukce, které udávají pro větší úhly přesnější hodnoty, než konstrukce Cusanova.

Ku každé z konstrukcí uvedeme tabulku, v níž obsaženy jsou pro $r = 1$ a $\varphi = 30^0, 45^0, 60^0, 90^0$ pravé hodnoty oblouků, dále hodnoty konstrukcí přibližnou zjednané a při tabulce pro konstrukci I$^{\text{ní}}$ udáme hodnoty, jež plynou z konstrukce Cusanovy; konečně udáme ještě rozdíl Δ hodnoty pravé a přibližné. Při tom omezíme se na 4 desetinná místa.

Konstrukce I.

Položme rektifikační bod R do středu O; pak $d = o$ a k určení k máme rovnici:

$$3k^2 - 12k + 8 = 0,$$

z níž plyne:

$$k = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3},$$

t. j.

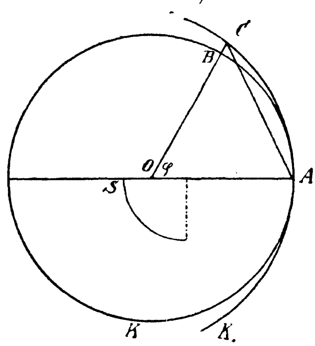
$$a = \frac{r}{k} = \frac{r}{4}(3 + \sqrt{3}).$$

Délku $\frac{r}{4}(3+\sqrt{3})$ sestrojíme snadno, k. př. tak, že poloměr AO rozpůlíme a nad polovici bližší k O sestrojíme rovnostranný trojúhelník, jehož výšku od paty výšky přeneseme na přímku AO, čímž dostaneme střed S kružnice K_1.

Rektifikace jest tedy tato:

Z bodu S, $AS = \frac{r}{4}(3+\sqrt{3})$ opišme kružnici K_1 poloměrem SA; rameno OB protne kružnici K_1 v bodě C a pak AC udává přibližně délku oblouku AB.

(Obr 2.)



φ	Hodnota pravá	Konstrukce	Δ	Konstr. Cusan.	Δ
30^0	0·5236	0·5235	0·0001	0·5234	0·0002
45^0	0·7854	0·7843	0·0011	0·7836	0·0018
60^0	1·0472	1·0428	0·0044	1·0392	0·0080
90^0	1·5708	1·5382	0·0326	1·5	0·0708

Přibližnou délku $AC = s$ počítáme výhodně z rovnic:

$$s = \frac{3+\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\omega}{2},$$

$$\omega = \varphi - \varepsilon,$$

$$\sin\varepsilon = \sin\varphi\,\frac{2\sqrt{3}-3}{3}.$$

Konstrukce II.

Přesnější ještě hodnoty obdržíme, položíme-li rektifikační bod R do protilehlého bodu k bodu A na kružnici, t. j. položíme-li

$$d = r.$$

Pak k určení k máme rovnici:

$$1 = \frac{12k - 8 - 3k^2}{3k^2 - 4},$$

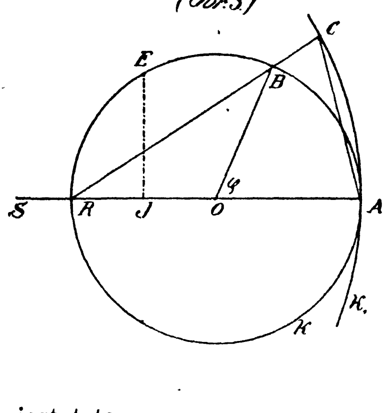
t. j.

$$k = \frac{3 - \sqrt{3}}{3},$$

a tedy

$$a = \frac{r}{k} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} r.$$

(Obr. 3)



Konstrukce jest tato:

Ve středu J poloměru OR vztýčená kolmice protne kružnici K v bodě E; učiníme-li $JE = JS$, obdržíme bod S. Opíšeme-li z bodu S poloměrem SA kružnici K_1, pak spojnice RB protne K_1 v bodě C, a tu AC jest rovno velmi přibližně oblouku AB.

φ	Hodnota pravá	Konstrukce	Δ
30^0	0·5236	0·5236	0·0000
45^0	0·7854	0·7853	0·0001
60^0	1·0472	1·0469	0·0003
90^0	1·5708	1·5687	0·0021

Délku $AC = S_1$ počítáme dle rovnic:

$$s = (3 + \sqrt{3}) \sin \frac{\omega}{2},$$

$$\omega = \frac{\varphi}{2} - \varepsilon,$$

$$\sin \varepsilon = \sin \frac{\varphi}{2} \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}.$$

Konstrukce tato, jíž v praktickém rýsování možno užíti pro úhly od 0^0 do 90^0, jest upravená konstrukce I. tím způsobem, že vede k výsledkům přesnějším, neboť rektifikujeme-li dle I. oblouk k úhlu $\frac{\varphi}{2}$, ale k poloměru za to dvojnásobnému, dospíváme ke konstrukci II.

Konstrukce III.

Další jednoduchou konstrukci obdržíme, učiníme-li podmínku, aby rektifikační bod R stotožnil se středem S kružnice K_1, t. j. položíme-li

$$r + d = a,$$

t. j.

$$1 + \frac{d}{r} = \frac{1}{k};$$

z rovnice (1) obdržíme pro k podmínku:

$$1 + \frac{12k - 8 - 3k^2}{3k^2 - 4} = \frac{1}{k},$$

kteráž vede k rovnici;

$$(3k - 2)^2 = 0,$$

čili

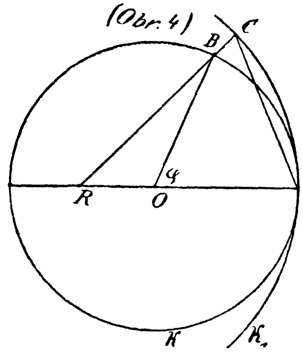
$$k = \frac{2}{3},$$

a tedy

$$a = \frac{3r}{2}.$$

Konstrukce jest tato: Rozpůlme poloměr protisměrný poloměru OA; tím dostaneme bod R, takže $OR = \frac{r}{2}$. Poloměrem RA opišme ze středu R kružnici K_1, kterou protne přímka RB v bodě C; i jest opět AC přibližně rovno oblouku AB.

(Obr. 4)



φ	Hodnota pravá	Konstrukce	Δ
30^0	0·5236	0·5236	— 0·0000
45^0	0·7854	0·7856	— 0·0002
60^0	1·0472	1·0480	— 0·0008
90^0	1·5708	1·5772	— 0·0064

Této konstrukce možno užíti při praktickém rýsování pro úhly od 0^0 do 90^0.

Délku $s = AC$ počítáme z rovnic:

$$s = 3r \sin \frac{\omega}{2},$$

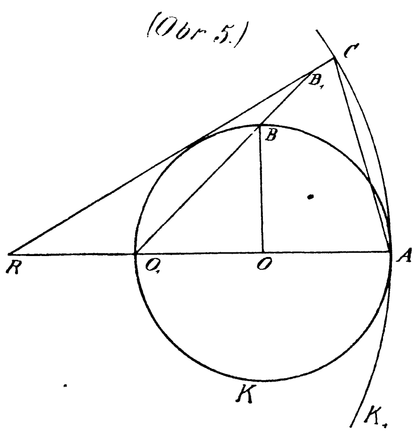
$$\sin \omega = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{5 + 4 \cos \varphi}}.$$

Přibližné hodnoty, které udává tato konstrukce, jsou tytéž, jež podává ve formě jiné konstrukce D'Ocagneova.

Konstrukce IV.

Konstrukci III. možno ještě učiniti přesnější pro větší úhly rektifikujeme-li oblouk o polovičním úhlu, ale s dvojnásobným poloměrem; tím ovšem stane se konstrukce poněkud složitější.

V následujícím rektifikován quadrant kruhový.



Učiňme $OR = 2r$; budiž O_1 protilehlý bod bodu A na kružnici K. Na přímce O_1B stanovme bod B_1, takže $O_1B_1 = 2r$; kružnici K_1 opsanou z bodu R poloměrem RA, protne přímka RB_1 v bodě C i jest opět AC rovno velmi přibližně oblouku AB. —

Pro kvadrant činí absolutní chyba $0 \cdot 0004r$, takže dvojnásobná délka úsečky AC velmi přibližně udává délku půlkružnice. Že všechny tyto konstrukce řeší opačnou úlohu, narýsovati úhel středový, dán-li příslušný oblouk, jest samozřejmo.