Jan Sobotka

K některým konstrukcím kuželoseček, jejichž určující útvary nejsou reálné

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 4, 331--338

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122321

K některým konstrukcím kuželoseček, jejichž určující útvary nejsou reálné.

Napsal *J. Sobotka.*

1. Na str. 226—247 udávají pp. Procházka a Mikan některé pozoruhodné konstrukce kuželoseček, když mezi danými prvky se nacházejí sdruženě imaginárné.

Jedná se tam o kuželosečky stanovené dvěma tečnami a třemi body; dvěma tečnami, dvěma body a jedním párem bodů sdružených, jakož i o řešení úloh duálních, když jest tedy kuželosečka stanovena dvěma body a třemi tečnami aneb dvěma body, dvěma tečnami a párem přímek sdružených. Z konstrukce úloh skupiny prvé plyne tudíž duálně konstrukce úloh skupiny druhé. Z toho důvodu budiž zde přihlíženo hlavně jen k úlohám druhu prvého.

V následujících poznámkách k uvedenému pojednání budiž poukázáno k tomu, jak lze kuželosečky ty sestrojovati pomocí homologie s jistými kuželosečkami pomocnými, při čemž stačí, když se omezíme na některé případy typické.

2. Buďtež A, B, C dané body, a, b dané přímky. Jsou-li body A, B nebo tečny a, b sdruženě imaginárné, označme je A_i, B_i, resp. a_i, a eliptické involuce, které je stanoví, označme $[A_i\, B_i]$ resp. $[a_i\, b_i]$. Sestrojme tak jako v uvedeném pojednání ve svazku přímek, jehož vrchol jest bod $S = (ab)$ přímky r, r', jež oddělují harmonicky jak přímky a, b, tak i přímky SA, SB. Tvoří tedy r, r' společný pár involuce $[a_i b_i]$ s involucí, která promítá $[A_i B_i]$ z bodu S. Průsečíky přímek r, r' s přímkou (AB) resp. $(A_i\, B_i)$ označme R', R. Poláry bodu S vzhledem ke všem kuželosečkám, procházejícím body A, B a dotýkajícím se přímek a, b procházejí buď bodem R nebo bodem R'. Vytkneme-li si jednu z nich k_0 a protíná-li ji přímka SC v bodech C_1, C_2, pak jest kuželosečka k homologická ke k_0. Středem homologie jest bod S, osou homologie přímka (ab) a bodu C na k přísluší bod C_1 nebo C_2 na k_0 Tím jest tato homologie úplně určena a vidíme, že každý z bodů R, R' vede ke dvěma kuželosečkám k, jež vyhovují úloze. Mějme nejprv na zřeteli případ, když jsou dány prvky $a, b, A_i\, B_i, C$. Bod na (RC) harmonický k C vzhledem k R a r budiž D. Veďme bodem R přímku p, která nechť protne a a b v bodech T_α, T_β, pak jest body A_i, B_i stanovena kuželosečka k_0, která se přímek a, b dotýká v bodech T_α, T_β.

Vytkněme si pro ni jakožto určující prvky body A_i, B_i, bod T_α nekonečně mu blízký bod T'_α na a a bod T_β. Je-li $L_1 L_2$ jeden pár v involuci $[A_i B_i]$, setrojíme druhý průsečík L přímky $(T_\beta L_1)$ s k_0 známým způsobem jakožto průsečík s kuželosečkou procházející body T_β, T_α, T'_α, R', L_2.

Přímky $T_\beta L$, $T_\alpha L$ protínají (SC) v jednom páru sdružených bodů vzhledem ke k_0 bod S tvoří s bodem $(p.SC)$ druhý takový pár. Dvojné body involuce těmito dvěma páry stanovené, jsou body C_1, C_2 na k_0.

3. Buďtež dány A_i, B_i, C, a_i, b_i.

Stanovíme opět bod D jako prve a body C', D' na přímkách (SC), (SD) harmonické k C a D vzhledem k bodu S a přímce p. Pak jsou involucí $[p]$, v níž $[a_i b_i]$ protíná p, stanoveny dva body P_i, Q_i, jimiž, jakož i body C, D a C', D' prochází kuželosečka k_0, která se přímek a_i, b_i v P_i a Q_i dotýká. Budiž k opět jedna z hledaných kuželoseček, jež jest ke k_0 homologická pro (CD) jakožto osu a S jakožto střed homologie.

Pro další konstrukci odvoďme poláru libovolného bodu G na $(A_i B_i)$ vzhledem ke k_0. Vhodně zvolme bod ten na spojnici dvou reálných bodů na k_0: na př. v průsečíku přímky CC' s $(A_i B_i)$. Za tím účelem stanovíme další průsečík H přímky GD s křivkou k_0 již předpokládáme jakožto stanovenou body C, C', P_i, Q_i, D, takže lze H známým způsobem lineárně sestrojiti. Ježto známe pak průsečíky C, C' a D, H s k_0 dvou přímek z bodu G vycházejících, jest tím již polára g z bodu G určena.

Bodu G nechť přísluší v $[A_i B_i]$ bod G'. Jsou tudíž G, G' dva sdružené body vzhledem ke kuželosečce k. Jim příslušejí v homologii mezi k a k_0 body G_0, G'_0, které jsou vzhledem ke k_0 sdruženy. Body tyto lze sestrojiti, jak následuje.

Spojnice párů sdružených bodů vzhledem ke k_0 na přímkách SG, SG' obalují kuželosečku u, která se dotýká přímek těchto v bodech E, F na přímce p a mimo to přímky h, která spojuje bod G s bodem $(g.SG')$ a je tím stanovena. Přímky homologické $(GG') = (A_i B_i)$ a $(G_0 G'_0)$ musí se protnouti v bodě R na ose homologie; proto musí přímka $(G_0 G'_0)$ býti tečnou k u procházející bodem R. Sestrojíme tedy tečny u_1, u_2 k u z bodu R. Spojnice bodu R s body G a $(g.SG')$ tvoří jeden pár, přímky (RS) a p druhý pár involuce, jejíž dvojné paprsky jsou žádané přímky u_1, u_2, poněvadž R leží na ose prométnosti řad bodových, které tečny křivky u z (SG) a (SG') vytínají. Tím dospíváme opět k dvěma homologiím a tedy ke dvěma křivkám k. V jedné přísluší přímce $(A_i B_i)$ přímka u_1, v druhé přímka u_2.

4. Jiné řešení z daných prvků A_i, B_i, C, a_i, b_i obdržíme, když k hledané kuželosečce sestrojíme homologickou kuželosečku k^* pro R a r jakožto střed a osu homologie, jejíž karakteristika rovná se $\sqrt{-1}$. Za tím účelem sestrojíme v $[a_i b_i]$ pár a' b' harmonický k páru rr' a v involuci $[A_i B_i]$ pár $A'B'$ harmonický k páru RR'.

Vytknutou homologií přechází pár a_i b_i v pár $a'b'$, pár A v pár $A'B'$ a body C, D přecházejí v body C_i D_i jakožto dvojné involuce Φ, pro niž R a průsečík přímky r s (CD) tvoří jeden pár, body C, D pár druhý.

Bodem R veďme opět libovolnou přímku p_0, která nechť protne a' v bodě P_0, b' v bodě Q_0; pak jest body C_i, D_i stanovena kuželosečka k_0, která se přímek a', b' dotýká v bodech P_0, Q_0. Můžeme tudíž sestrojiti jako dříve průsečík K přímky (P_0C) s kuželosečkou k_0 jakožto danou bodem Q_0, bodem Q'_0 mu nekonečně blízkým na b', body C_i, D_i a bodem P_0. Nyní můžeme sestrojiti průsečíky A_1, A_2 přímky (SA') s kuželosečkou k_0 jakožto dvojné body involuce na této přímce, jejíž jeden pár jest dán bodem S a bodem ležícím na p_0, jeden pár pak body, které jsou na (SA') vyťaty přímkami (P_0K) a (Q_0K). Body ty A_1, A_2 nechť jsou reálné. V homologii, jež má střed S a osu (CD) a v níž bodu A_1 (resp. A_2) přísluší bod A', přísluší kuželosečce k_0 kuželosečka k^*, která se přímek a', b' dotýká a prochází body A', B', C_i, D_i a tudíž odpovídá jí v uvedené imaginárné homologii jedna z hledaných kuželoseček k. Protíná-li (SA') přímku (CD) v bodě M, sestrojíme v involuci Φ příslušný bod M' a pomocí homologie mezi k_0 a k^* bod M'' na (SA') sdružený k M vzhledem ke k. Jest tudíž přímka $(M'M'')$ polárou bodu M vzhledem ke k. Protíná-li tato polára přímku r v bodě N, jest (CD) jeho polárou jak vzhledem ke k^* tak i vzhledem ke k. Následkem toho jsou přímky (NC) a (ND) tečnami křivky k v bodech C a D. Přímce p_0 odpovídá v homologii mezi k_0 a k^* přímka p, která jest společnou polárou bodu S vzhledem ke kuželosečkám k^* a k. Spojíme-li tudíž bod $(r.p)$ s jedním z bodů C, D a bod S s druhým přímkami, protnou se tyto v bodě V, náležejícím křivce k, čímž jest tato reálně stanovena.

5. Budiž kuželosečka k dána body A_i, B_i tečnami a_i, b_i a reálným párem M_1M_2 bodů sdružených.

Sestrojíme jako v článku předcházejícím kuželosečku k_0 která se dotýká přímek a', b' v bodech P_0, Q_0 na p_0 a prochází body A', B'. (P_0B'), (Q_0B') protínají r ve dvou sdružených bodech křivky k_0, další dva sdružené body S její jsou S a (p_0, r). Sestrojíme dvojné body G, H v involuci stanovené těmito páry. (RG), (RH) jsou tečnami v G a H ke křivce k_0. Přímky $(P_0\,G)$, (Q_0, H) nechť se protínají v bodě U; pak kuželosečka k', která prochází body G, H, U a dotýká se přímek RG, RH, přísluší kuželosečce k_0 v dříve uvedené homologii imaginárné; ona prochází tudíž body A_i, B_i a dotýká se přímek a_i, b_i.

Dále sestrojíme na př. poláru vzhledem ke k' bodu E, v němž (UG) protíná přímku SM_1, tím, že sestrojíme ještě průsečík H' přímky HE s k', načež obdržíme tuto poláru pomocí čtyřrohu $UGHH'$. Protíná-li tato polára SM_2 v bodě E', má kuželosečka u dotýkající se přímky EE' a přímek SM_1, SM_2, těchto v bodech na p_0 tu vlastnost, že každá její tečna seče SM_1 a SM_2 ve dvou bodech, vzhledem ke k' sdružených. Bodem $(M_1M_2 . A_i B_i)$ procházejí dvě tečny u_1, u_2 k u, jež známým způsobem sestrojíme.

V homologii středu S a osy (A_iB_i), v níž přímce u_1 (nebo u_2) přísluší přímka (M_1M_2) odpovídá kuželosečce k' kuželosečka k, jež vyhovuje daným podmínkám.

6. Můžeme ale s výhodou provésti konstrukci kuželosečky k dané prvky a_i, b_i, A_i, B_i, C, tím, že použijeme kuželosečky k^*, která jí přísluší v prve uvažované homologii imaginárné, v níž bodům A_i, B_i C, D přísluší body A', B', C_i, D_i a přímkám a_i, b_i přímky a', b', jež jsme dříve blíže určili. Kuželosečka k^* jest tedy stanovena dvěma reálnými tečnami, dvěma reálnými body a pak dvěma body sdruženě imaginárnými. Body A', B', C_i, D_i a $S = (a'.b')$ jest stanovena kuželosečka, jejíž druhý průsečík E s přímkou a' známým způsobem pomocí věty Pascalovy jako v případech předcházejících sestrojíme. Paprsky dvojné g_1, g_2 v involuci přímek $A'B', C_iD_i$. RE, RS jsou pak polárami bodu S vzhledem ke dvěma kuželosečkám, které daným podmínkám vyhovují.

Seče-li g_1 přímky a' b' v bodech P_1, Q_1 a přímku r v bodě R_0, pak jest jedna křivka k^* stanovena body reálnými P_1, Q_1 body sdruženě imaginárnými C_i, D_i a reálným bodem A' nebo B'; následkem toho jest jedna z hledaných kuželoseček k stanovena sdruženě imaginárnými body $A_i B_i$, dále sdruženě imaginárnými body, jež jsou dvojnými v involuci $RR_0 . P_1Q_1$ a bodem reálným C nebo D; lze ji tudíž lineárně sestrojiti pomocí bodů na přímkách bodem C nebo D procházejících. Přímka g_2 dává stejným způsobem druhou křivku k, hovící daným podmínkám, kdežto bod R' a přímka r' by stejným způsobem vedly k dalším dvěma kuželosečkám.

Konstrukce kuželosečky z daných prvků a_i, b_i, A_i B_i, c, kde c značí tečnu reálnou, vyžaduje tedy sestrojení přímky d harmonické k c vzhledem k R a r (resp. R' a r'). Involucí $cd.rs$, kde přímka s spojuje body R a $(c.r)$ jsou stanoveny dvě přímky sdruženě imaginárné c_i, d_i. Použijeme opět prve uvedené homologie imaginárné, v níž prvkům a_i, b_i, A_i, B_i, c, d příslušejí prvky a', b', A', B', c_i, d_i.

V řadě kuželoseček, jež se dotýkají přímek a', b', c_i, d_i, sestrojíme pak ony dvě k_1^*, k_2^*, které procházejí bodem A' (a tedy i bodem B'). Za tím účelem vytkneme si v této řadě kuželosečku, která se dotýká přímky $(A_iB_i) = (A'B')$ a jest tedy stanovena dvěma reálnými tečnami a', b', dvěma sdruženě imaginárnými tečnami c_i, d_i a reálnou tečnou (A_iB_i), k níž lze tudíž lineárně sestrojiti známým způsobem druhou tečnu t, procházející bodem A' na (A_iB_i). Dvojné přímky u_1, u_2 involuce ve svazku přímek o vrcholu A', pro niž přímky procházející body $(a'.b')$, $(c_i.d_i)$ tvoří jeden pár a přímky (A_iB_i), t druhý pár, jsou tečnami v bodě A pro křivky k_1^*, k_2^*. Nechť protínají přímky u_1, u_2 přímku r v bodech U_1, U_2. Pro dvě hledané křivky k_1, k_2, vyhovující uvedeným podmínkám, známe nyní sdruženě imaginárné tečny a_i, b_i, dále sdruženě imaginárné tečny U_1A_i, U_1B_i resp. U_2A_i, U_2B_i a tečnu reálnou c; tím jsou tyto stanoveny, neboť můžeme pak lineárně sestrojovati známým způsobem další jejich tečny, vycházející z bodů na c.

7. Konečně uvažujme případ, kdy jest kuželosečka stanovena tečnami a_i, b_i body A_i, B_i a párem sdružených bodů M, M'. Abychom nemuseli rozlišovati, jsou-li body M, M' reálné neb sdružené

imaginárné, předpokládejme, že jsou dány jakožto dvojné body involuce I na reálné přímce m, při čemž involuce ta může býti hyperbolická nebo eliptická. V involuci v rovině, jejíž střed jest R a osa r, přísluší přímce m přímka m' a involuci I involuce I' na m'. Libovolným párem involuce I, příslušným párem involuce I' a body $A_i B_i$ prochází kuželosečka a jak v citovaném pojednání uvedeno, všecky takové kuželosečky tvoří svazek Σ. Jedna kuželosečka v Σ se rozkládá v přímku $(A_i B_i)$ a v přímku q, která spojuje bod v I příslušný bodu $(A_i B_i . m)$ s bodem R.

Druhou kuželosečku v Σ stanovíme tak, aby procházela bodem $S = (a' . b')$. Všecky kuželosečky totiž, které procházejí body A_i, B_i, S a vytínají z m involuci I tvoří svazek Σ', jehož čtvrtý základní bod L jest reálný. V Σ' jest obsažena kuželosečka rozkládající se v přímku $(A_i B_i)$ a v přímku h, která spojuje bod S s bodem $(q . m)$. Je-li $H_1 H_2$ libovolný pár v I pak body A_i, B_i, H_1, H_2 a S jest stanovena jedna kuželosečka Σ' a přímka h ji protíná ještě v uvedeném bodě L, jejž lze tedy známým způsobem lineárně sestrojiti.

Budiž na (RL) bod L' harmonický od L oddělený bodem R a přímkou r. Kuželosečka l body A_i, B_i, L, L' a S náleží patrně svazku Σ; ona se dotýká přímky RS v bodě S.

Tím jest konstrukce křivky k převedena na konstrukci v článku předcházejícím; jelikož známe pro ni body A_i, B_i, L a tečny a_i, b_i. V homologii imaginárné, jíž zde používáme, přísluší křivce l křivka l^*, která prochází body A', B', S a dvojnými body L_i, L'_i involuce, pro niž R, $(RL . r)$ a L, L' tvoří dva páry prvků; můžeme tedy druhý průsečík E^* přímky a' s l^* pomocí věty Pascalovy sestrojiti. Každá z dvojných přímek v involuci svazku přímek o vrcholu R, v níž $(A_i B_i)(LL')$ tvoří jeden a (RS), (RE^*) taktéž jeden pár, jest polárou bodu S vzhledem k jedné z křivek k. Označíme-li poláru tu p, jest tedy kuželosečka k stanovena body $(a_i . p)$, $(b_i . p)$ A_i, B_i a bodem L, resp. L'; lze tedy další body křivky té lineárně sestrojovati.

8. Uvedené úvahy vedou též k řešení obecnějších úloh, v nichž totiž místo přímek a, b aneb místo bodů A, B jest dána kuželosečka, čímž docházíme ke konstrukci kuželoseček, které procházejí třemi body A, B, C a dotýkají se dané kuželosečky u ve dvou bodech aneb kuželoseček, které mají s danou kuželosečkou u dvojí dotyk a dotýkají se daných tří přímek. Vytkněme si úlohu prvou.

Přímka (AB) nechť protne u v bodech U_1, U_2; involuce $AB . U_1 U_2$ měj tedy body dvojné R, R'. Ze čtyř kuželoseček, které vyhovují dané úloze, obdržíme dvě, jejichž tětivy styčné s u, procházejí bodem R a dvě, jejichž tětivy styčné s u procházejí bodem R'. Přihlížejme k prvním z nich.

Polára r bodu R vzhledem k u jest též polárou jeho vzhledem k zmíněným dvěma kuželosečkám k. Má-li k procházeti bodem C, pak musí procházeti též bodem D harmonicky od něho odděleným prvky R, r. Náleží tudíž k svazku kuželoseček (l) procházejících body A, B, C, D a přímka r jest polárou bodu R vzhledem ke všem kuželosečkám tohoto svazku. Průsečíky libovolně kuželosečky ve svazku tom mají proto tu vlastnost, že leží na dvou přímkách g_1, g_2, procházejících bodem R. Probíhá-li kuželosečka ta svazek (l), popisuje pár příslušných přímek g_1, g_2 involuci a dvojné prvky její p, p' jsou tětivami styčnými hledaných kuželoseček s danou kuželosečkou u.

Úloha druhá jest k této duální.

9. Proveďme řešení právě odvozené, na př. pro ten případ, když jsou body A_i, B_i sdruženě imaginárné, a když i křivka u_i jest imaginárná, přináležející reálnému systému polárnímu; tedy kuželosečka hledaná k prochází body A_i, B_i, C a má dvojí dotyk s u_i. Involuce $[A_iB_i]$ a involuce sdružených bodů vzhledem k u_i mají RR' za společný pár, který jest v našem případě vždy reálný; tím jsou i bod D i přímka r reálné. Přímky (A_iB_i) a (CD) tvoří jeden pár involuce $g_1g_2 . pp . p'p'$. Na (CD) jest párem bodů C, D a párem bodů R, $(CD . r)$ stanovena eliptická involuce o dvojných bodech C_i, D_i. Na (A_iB_i) budiž pak $A'B'$ pár v involuci $[A_iB_i]$, který jest k RR' harmonický.

V homologii o středu R a ose r, jejíž dvojpoměr jest $\sqrt{-1}$ přísluší křivce u_i křivka reálná u', bodům A_i, B_i příslušejí body A', B' a bodům C, D body C_i, D_i; svazku (l) přísluší svazek kuželoseček (l') procházející body A', B', C_i, D_i. Zvolíme-li na u' libovolný bod G_1, jest jím jedna kuželosečka v (l') stanovena. Můžeme tudíž druhý průsečík její E s přímkou, spojující G_1 s libovolným bodem E' na u' lineárně sestrojiti. Ona prochází též bodem G'_1 harmonickým s G_1 k bodům R a $(RG_1 . r)$. Protíná-li $(G_1'A')$ křivku u' v bodě A_0, pak dle známé věty se protnou přímky (EA'), $(E'A_0)$ v bodě G_2 na přímce spojující ostatní dva body společné; jest tudíž (RG_2) touto přímkou. Přímky (RG_1), (RG_2) tvoří tudíž jeden pár v involuci $g_1g_2 . pp . p'p'$; poněvadž (A_iB_i), (CD), tvoří taktéž jeden pár její, jest tím stanovena a můžeme tudíž její dvojné přímky p, p' sestrojiti. Jsou-li p a p' reálné, jest hledaná křivka k určena body sdruženě imaginárnými, v nichž p, resp. p' protíná u_i, body sdruženě imaginárnými A_i B_i a jedním reálným bodem, za nějž můžeme zvoliti buď C nebo D.

10. K dalšímu zevšeobecnění dojdeme, když nejen přímky a, b nahradíme kuželosečkou u, nýbrž i body A, B kuželosečkou v. Jedná se tedy o konstrukci kuželosečky k, která má s každou z daných dvou kuželoseček u, v dvojí dotyk a buďto prochází daným bodem P anebo se dotýká dané přímky p.

Poněvadž konstrukce těchto dvou úloh jsou duálné, postačí, když se budeme zabývati toliko prvou z nich. Dotýká-li se k křivky u v bodech μ, μ', křivky v v bodech ν, ν' a je-li R průsečíkem těchto přímek, jest polára bodu R vzhledem k u též polárou jeho vzhledem ke křivce k; totéž platí o v. Procházejí tudíž tětivy styčné křivky k s u a v jedním vrcholem společného trojúhelníka polárního $RR'R''$ křivek u a v, takže obdržíme tři skupiny křivek k. Vyšetřme skupinu příslušnou k bodu R. Veďme bodem tím přímku g_μ protínající u v bodech G'_μ, G''_μ. Kuželosečky, které se dotýkají u v bodech G'_μ, G''_μ, tvoří svazek; každá z nich protne v ve čtyřech bodech, položených na dvou přímkách bodem R jdoucích; takto obdržené dvojice přímek tvoří pro všecky křivky svazku toho involuci o dvojných elementech g_ν, g'_ν. Tím obdržíme dvě kuželosečky, dotýkající se dvakrát jak křivky u tak i křivky v; prvé v bodech G'_μ, G''_μ druhé se dotýká jedna z nich v bodech na g_ν, druhé na g_ν'.

Přiřadíme-li k sobě dvě přímky g_μ, g_ν svazku R tak, aby jedna byla tětivou styčnou s u, druhá tětivou styčnou s v pro jednu kuželosečka k, vzniká v něm příbuznost (2, 2) značná, která se však rozkládá. Neboť každý paprsek bodem R, považujeme-li jej za dvojný, representuje jednu takovou kuželosečku, která má jak s u, tak s v dvojí dotyk. Tedy každý paprsek takový sám sobě přísluší a vlastní vztah mezi g_μ a g_ν musí býti promětností. V této promětnosti jsou společné tětivy q_1, q_2 křivek u a v, které procházejí bodem R dvojnými paprsky, poněvadž společné body křivek u, v na takovém paprsku representují jednu kuželosečku, mající s nimi dvojí dotyk.

Promětnost tato jest involucí. Neboť když přímka g_μ protíná u v bodech A, B, tu ve svazku kuželoseček dotýkajících se u v těchto bodech jedna degeneruje v přímku dvojnou g_μ druhá v tečny t_α, t_β v A a B k u. Svazek ten protíná v ve skupinách čtyřbodových, které, jak víme, se promítají s bodu R obyčejnou involucí, jejíž jeden paprsek dvojný jest g_μ a druhý paprsek dvojný jest tětivou styčnou g_ν kuželosečky k, příslušnou ke g_μ. Tato involuce seče t_α v involuci bodové, jejíž jeden bod dvojný jest A a jeden pár bodový jest v průsečících křivky v s t_α. Tutéž involuci na t_α vytíná také svazek kuželoseček, stanovený prvky u a v, jemuž náleží též degenerovaná kuželosečka $(q_1 q_2)$. Jsou tudíž skutečné přímky g_μ, g_ν párem involuce Φ o dvojných elementech q_1 a q_2.

Prochází-li kuželosečka s bodem P a má-li s u dvojí dotyk takový, že tětiva styčná prochází bodem R, protíná dále tečna v P k s kuželosečku u v bodech 1, 1′ a je-li P_μ bod harmonicky k P vzhledem k 1 a 1′, pak jest dle prve uvedeného $(P_\mu R)$ tětiva styčná pro u a s. Rovněž tak soudíme, když P_ν jest bod na uvažované tečně sdružený k P vzhledem k v, že přímka $(P_\nu R)$ jest tětivou styčnou pro v a kuželosečku s', která rovněž bodem P prochází a má v něm (PP_μ) za tečnu. Otáčí-li se (PP_μ) kolem bodu P, popíší P_μ, P_ν dvě řady bodové perspektivní a tudíž přímky (RP_μ), (RP_ν) dva promětné svazky, mající za dvojné elementy přímku, která spojuje R s bodem sdruženým k P, vzhledem k oběma kuželosečkám u, v a přímku (RP). V těchto svazcích promětných jsou dva páry příslušných sobě přímek $g_\mu g_\nu'$ a $g'_\mu g''_\nu$, jež náležejí též involuci Φ. Jsou tudíž g_μ, g_ν tětivy styčné s u, resp. v pro jednu kuželosečku k, která dané úloze vyhovuje, g'_μ, g_ν' pak pro druhou takovou kuželosečku.

A propos de constructions de coniques déterminées par des éléments imaginaires.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur donne plusieurs compléments au sujet traité dans le mémoire de MM. Procházka et Mikan (voir ce tome, p. 246), ainsi que des simplifications de quelques-unes des constructions qui y sont traitées. De plus, il étend ces constructions aux cas où la conique en question est déterminée par un point ou par une tangente et par deux coniques doublement tangentes.