Jaroslav Jarušek

Vzorec Faa di Brunoův

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 54 (1925), No. 4, 317--319

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122316

Vzorec Faa di Brunoův.

Napsal Dr. *Jaroslav Jarušek.*

Faa di Bruno odvodil vzorec, podle něhož některé mocniny determinantu druhého stupně se mohou vyjádřiti jedním determinantem vyššího stupně. Pomocí toho vzorce je možno dokázati, že některé determinanty, jichž členy jsou jisté výrazy utvořené z binárních forem daného systému, jsou kovarianty nebo semiinvarianty. Ale to se dá vždy pohodlněji dokázati přímým provedením operací $\varDelta_{12}$ nebo $\varDelta_{21}$. Naopak vzorec Faa di Brunoův, jak ukážeme, je jednoduchým důsledkem invariantní vlastnosti jistého determinantu.

Polární operace

$$D = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

je záměnná s operací $\varDelta$; při tom $\varDelta$ je $\varDelta_{12}$ nebo $\varDelta_{21}$. Při provádění operace $\varDelta$ i D platí totiž zákony o derivování. Tudíž záměnnost jich platí pro součet, platí-li pro jednotlivé sčítance. Dále platí také pro součin, platí-li pro oba činitele; dostaneme totiž

$$\varDelta A\, u v = \varDelta (u D v + v D u) = \varDelta u \,.\, D v + D u \cdot \varDelta v + u \,.\, \varDelta D v + v \,.\, \varDelta D u$$

a pro $D \varDelta u v$ týž výraz. Zbývá pak dokázati záměnnost D a $\varDelta$ pouze pro výrazy nejjednodušší

$$a_k,\ x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2.$$

Ve všech těchto případech provedení operace $\varDelta$ a D dává nulu mimo případy

$$D \varDelta_{12} x_2 = -D x_1 = -y_1, \qquad \varDelta_{12} D x_2 = \varDelta_{12} y_2 = -y_1;$$
$$D \varDelta_{21} x_1 = -D x_2 = -y_2, \qquad \varDelta_{21} D x_1 = \varDelta_{21} y_1 = -y_2.$$

Tím je záměnnost D a $\varDelta$ dokázána.

Odtud ihned plyne, že determinant

$$T = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \ldots \\ D A_0 & D A_1 & D A_2 & \ldots \\ D^2 A_0 & D^2 A_1 & D^2 A_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

splňuje rovnici $\varDelta T = 0$,

platí-li $\quad \Delta A_i = \alpha_i A_{i-1}, \; \Delta A_0 = 0.$

Provedeme-li totiž Δ na první sloupec T, budou v něm samé nuly a provedeme-li Δ na jiný sloupec, vznikne determinant o dvou sloupcích úměrných.

Vezměme specielně

$$A_i = x_1^{k-i} x_2^i,$$

takže

$$\Delta_{12} A_i = -i A_{i-1}.$$

Pak determinant

$$U,(xy) = \begin{vmatrix} x_1^k & x_1^{k-1} x_2 & \dots & x_2^k \\ D x_1^k & D x_1^{k-1} x_2 & \dots & D x_2^k \\ \frac{1}{2!} D^2 x_1^k & \frac{1}{2!} D^2 x_1^{k-1} x_2 & \dots & \frac{1}{2!} D^2 x_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{k!} D^k x_1^k & \frac{1}{k!} D^k x_1^{k-1} x_2 & \dots & \frac{1}{k!} D^k x_2^k \end{vmatrix}$$

splňuje rovnici

$$\Delta_{12} U(x, y) = 0.$$

Poněvadž je v obou indexech váhy

$$-1 - 2 - 3 - \dots - k = -\frac{1}{2} k(k+1),$$

jest to invariantní útvar. Tudíž, provedeme-li substituci

$$x_1 = l x'_1 + l' x'_2, \quad y_1 = l y_1 + l' y'_2$$
$$x_2 = m x'_1 + m' x'_2, \quad y_2 = m y'_1 + m' y'_2,$$

bude

$$U(x', y') = (lm' - l'm)^{-\frac{1}{2} k(k+1)} U(x, y).$$

Dosaďme pak

$$x'_1 = 1, \; x'_2 = 0, \; y'_1 = 0, \; y'_2 = 1,$$

takže

$$x_1 = l, \; x_2 = m, \; y_1 = l', \; y_2 = m'.$$

Pak v $U(x', y')$ budou v hlavní diagonále jednotky a ostatní členy rovny nule a tudíž $U(x', y') = 1$. Dostaneme tak vzorec Faa di Brunoův

$$\begin{vmatrix} l^k & l^{k-1} m & , \dots , & m^k \\ k l^{k-1} l', & (k-1) l^{k-2} l' m + l^{k-1} m', & \dots , & k m^{k-1} m' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l'^k, & l'^{k-1} m' & , \dots , & m'^k \end{vmatrix} =$$

$$= (lm' - l'm)^{\frac{1}{2} k(k+1)}.$$

Na levé straně členy $(i+1)$-ho sloupce jsou koeficienty různých mocnin t ve výrazu

$$(l+l' t)^{k-i}(m+m' t)^i.$$

*

La formule de Faà de Bruno.

(Extrait de l'article précédent.)

Faà de Bruno a déduit une formule qui exprime certaines puissances d'un déterminant du deuxième ordre à l'aide d'un déterminant d'ordre plus élevé. On emploie cette formule à prouver que certaines fonctions exprimées par des déterminants sont des covariants des formes données. L'auteur fait voir que cette formule de Faà de Bruno est la conséquence de l'invariance d'une fonction qui est, elle aussi, un covariant, comme on prouve facilement d'une manière directe.