Příspěvek k použití diferenciálních rovnic v pojistné matematice.

Napsal Dr. *E. Schoenbaum.*

II.

5) V I. části této práce[1]) odvodil jsem z diferenciální rovnice pro spojitý doživotní důchod důležitou větu Blaschke-Grameovu:

„Hodnota doživotního důchodu $\overline{a}_1(x_1)$ pro stáří x_1 při úrokové intensitě δ_1, tabulce úmrtnosti s konstantami α_1, β_1, γ_1 rovná se ϱ násobné hodnotě důchodu $\overline{a}(x)$ pro stáří x při intensitě úrokové δ a při intensitě úmrtnosti o konstantách α, β, γ. Při tom jest x a δ stanoviti ze vztahu:"

$$\varrho=\frac{\gamma}{\gamma_1},\ \delta_1=\frac{\delta}{\varrho}-m,\ x_1=\varrho x+n.$$

Důležitost této věty plyne, nehledě k teoretickému dosahu z praktických aplikací a vzrostla v poslední době snahou teorie i prakse respektovati ve výpočtech pojistné matematiky pokles úmrtnosti průběhem doby, jinými slovy uvažovati intensity úmrtnosti v závislosti na době.[2])

Jest proto důležito řešiti problém opačný:

Jakým podmínkám musí vyhovovati tabulky úmrtnosti, aby doživotní důchody, počítané podle nich vykazovaly vztah prokázaný Gramem pro funkci Gompertz-Makehamovu.

Jest tedy stanoviti intensity úmrtnosti, jakožto funkce stáří $\mu(x)$ tak, aby byly splněny rovnice

$$\overline{a}_1(x_1)=\varrho\,\overline{a}(x),$$

$$\delta_1=\frac{\delta}{\varrho}-m,\ x_1=\varrho x+n \tag{13}$$

kdež ϱ, m, n jsou konstanty, δ_1, δ jsou intensity a x_1, x stáří odpovídající si v obou systémech hodnot $\overline{a}_1$, $\overline{a}$.

Problém tento vyslovil Saxer[3]) a ukázal, že kromě Gompertz-Makehamova hoví také zákon Moivreův, Achardův a Quiquetovy

---

[1]) Viz Čas. pro pěstování mat. a fys. ročník LII.

[2]) Viz na př. Blaschke: Die Sterblichkeit der österr. Versicherten zu verschiedener Zeit, Versicherungs wiss. Mitteilungen 1913; Die Todesursachen bei österr. Versicherten nach fünfjährigen Perioden (1914) a Dobové tabulky úmrtní, Pojistný obzor 1922.

[3]) Mitteilungen der Vereinigung der schweizer Versicherungsmathematiker, 1924.

funkce podmínkám problému. Obecné řešení problému však je asi velmi nesnadné.

Za to lze snadno stanoviti podmínky pro intensitu úmrtnosti takové, aby vztah Grame-Blaschkeův byl splněn invariantně.

Vyjděme za tím účelem ze základní rovnice pro doživotní důchod

$$\frac{d\,\bar{a}\,(x)}{d\,x} = (\mu\,(x)+\delta)\,\bar{a}\,(x) - 1$$

a uvažme, že jest

$$\frac{d\,\bar{a}_1\,(x_1)}{d\,x_1} = \frac{d\,\bar{a}_1\,(x_1)}{d\,x} \cdot \frac{d\,x}{d\,x_1} = \frac{d\,\bar{a}\,(x)}{d\,x}.$$

Platí tudíž pro intensitu $\mu\,(x)$ podmínka

$$[\mu\,(x_1)+\delta_1]\,\bar{a}_1\,(x_1) = [\mu\,(x)+\delta]\,\bar{a}\,(x)$$

a tedy podle (13)

$$[\mu\,(\varrho\,x+n)+\delta_1]\,\varrho\,\bar{a}\,(x) = [\mu\,(x)+\delta]\,\bar{a}\,(x).$$

Musí tedy funkce $\mu\,(x)$ vyhovovati funkcionální rovnici

$$\mu\,(\varrho\,x+n) = \frac{1}{\varrho}\,\mu\,(x) + \frac{\delta}{\varrho} - \delta_1 = \frac{1}{\varrho}\,\mu\,(x)+m.$$

Tuto jednoduchou funkcionální rovnici můžeme rozřešiti metodou, které použil Abel v známém pojednání „Determination d'une fonction au moyen d'une équation qui ne contient qu'une seule variable“[4]), upravíme-li ji poněkud.

Zaveďme za tím účelem novou funkci $\varphi\,(y)$ rovnicemi

$$x = \varphi\,(y)$$

$$\varrho\,x+n = \varphi\,(y+1). \tag{14}$$

Pak bude $$\mu\,(\varphi\,(y+1)) = \frac{1}{\varrho}\,\mu\,(\varphi\,(y))+m$$

a položíme-li $$\mu\,\varphi\,(y) = \psi\,(y)$$

$$\psi\,(y+1) = \frac{1}{\varrho}\,\psi\,(y)+m.$$

Ježto je parcielní řešení této jednoduché diferenční rovnice patrně $$\frac{\varrho\,m}{\varrho-1},$$

jest úplné řešení dáno výrazem

[4]) Abel Oeuvres complètes Tome second str. 36 a násl.

$$\psi(y) = \frac{\varrho m}{\varrho - 1} + C_1 \frac{1}{\varrho^y},$$

při čemž C_1 jest libovolná periodická funkce o periodě 1, takže jest

$$C_1(y+1) = C_1(y).$$

Vrátíme-li se k definici funkce $\varphi(y)$, máme

$$x = \varphi(y),\ y = \omega(x),$$

a k určení funkce $\omega(x)$ rovnici diferenční

$$\varrho\varphi(y) + n = \varphi(y+1)$$

která poskytuje řešení

$$x = \varphi(y) = \frac{n}{1-\varrho} + C_2\,\varrho^y,$$

kdež opět C_2 jest periodická funkce o periodě 1.

Odtud obdržíme jakožto řešení

$$\mu(x) = \frac{\varrho m}{\varrho - 1} - \frac{C_1 . C_2}{x - \frac{n}{1-\varrho}} = \frac{\varrho m}{\varrho - 1} - \frac{(1-\varrho)\,C_1\,C_2}{x(1-\varrho) - n}.$$

Položíme-li $C_1 . C_2 = C$, odvodíme jednoduchou integrací tento výraz:

$$l_x = e^{-\frac{\varrho m}{\varrho - 1}(x - x_0)} \cdot \left[\frac{x(1-\varrho) - n}{x_0(1-\varrho) - n}\right]^C. \tag{15}$$

Tím dospíváme k důležitému výsledku:

Řád úmrtnosti vyjádřený výrazem (15) má vlastnost, že provedeme-li s úrokovou mírou δ_1 a se stářím x lineární transformaci

$$\delta_1 = \frac{\delta}{\varrho} - m,\ x_1 = \varrho x + n,$$

násobí se doživotní důchod podle něho počítaný koeficientem ϱ.

Stačí tudíž znáti hodnoty $\bar{a}(x)$ pro jedinou úrokovou míru δ, aby bylo lze stanoviti hodnotu pro libovolnou jinou míru úrokovou δ_1, součinem

$$\varrho\ \bar{a}_{x_1}.$$

Funkce l_x vyjádřená v (15) jest též jediná, která má tuto pozoruhodnou vlastnost.

Konstantu C lze určiti z podmínky

$$l_\omega = 0,$$

kde ω je nejvyšší stáří v tabulce se vyskytující; x_0 značí nejnižší stáří tabulky.

6. Z diferenciální rovnice pro doživotní důchod (9) odvozené v části I. tohoto pojednání

$$\frac{dy}{du} - \left(\frac{\sigma}{u} + \zeta\right) y + \frac{1}{\gamma u} = 0$$

lze nejjednodušším způsobem dokázati výsledky důležité pro praksi počtářskou o variaci konstant zákona úmrtnosti, dokázané po prvé Friedlim[6]) částečně obtížnými úvahami o charakteru transcendent $P(\lambda, k)$ a $Q(\lambda, k)$, jimiž je hodnota důchodu vyjádřena.

Budiž na příklad úkolem zjistiti variaci veličiny $\bar{a}_x$ s ohledem na variaci konstanty g zákona Gompertz-Makehamova.

Vyjdeme-li z označení (6) a (8) prvé části, máme

$$\beta = -\log g, \quad \beta e^{\gamma x} = \zeta, \quad \gamma = \log c$$

a tedy řadu vztahů

$$\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial g} = \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial g} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial \beta} = \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} = \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial \zeta} \cdot \frac{\zeta}{\beta}$$

$$\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial x} = \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial \zeta} \cdot \gamma \zeta.$$

Z těchto vztahů odvodíme ihned

$$\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial g} = -\frac{\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial x}}{g\beta \cdot \gamma} = -\frac{\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial x}}{g \log \frac{1}{g} \log c}.$$

V čitateli můžeme nahraditi derivaci $\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial x}$ pravou stranou diferenciální rovnice (8), takže máme

$$\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial g} = -\frac{\gamma(\sigma + \zeta)\bar{a}_x - 1}{g \log \frac{1}{g} \log c},$$

kdež za γ, σ, ζ jest dosaditi konstanty původní formule podle vztahů (6) a (8).

Velmi snadno obdržíme příslušný výraz pro variaci veličiny s

$$\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial s} = \frac{\partial \bar{a}_x}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial s}$$

[6]) Reserve und Rentenbarwert als Analytische Functionen. Dr. W. Friedli gung der schweizer. Versicherungsmathematiker 1918

a uvážíme-li, že
$$\alpha = \log \frac{1}{s}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s} = -\frac{1}{s}$$
a konečně pro $\frac{\partial \alpha_x}{\partial c}$ jednoduchým výpočtem
$$\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial c} = -\frac{1}{c \log c}\left[(\alpha+\delta)\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial \delta} + \bar{a}_x - x\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial x}\right].$$

Při současné změně konstant g, s, c o $\Delta g, \Delta s, \Delta c$, dostaneme konečně sloučením členů s týmiž koeficienty vztah
$$\Delta \bar{a}_x = \left(\Delta g + \frac{\Delta c}{c} g \log g \,.\, x\right)\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial g} +$$
$$+\left(\Delta s - s\Delta\delta + \frac{s\Delta c}{c}\,\frac{\log\frac{1}{s}+\delta}{\log c}\right)\frac{\partial \bar{a}_x}{\partial s} - \frac{\Delta c}{c}\,\frac{\bar{a}_x}{\log c}$$
mezi úplnou variací funkce $\bar{a}_x$ a variacemi Δg, Δs, Δc, dokázaný rozborem transcendent Q a P v citované práci.

7. Z lineární diferenciální rovnice 2. řádu (11)
$$u\frac{d^2z}{du^2} + (1-\sigma+\zeta u)\frac{dz}{du} + \zeta z = \emptyset$$
pro funkci $z = \gamma \bar{a}_{x+t}$, při $u = e^{\gamma t}$, plyne souvislost její s transcendentou G (ε, η, x), definovanou nekonečnou řadou
$$G(\varepsilon, \eta, x) = 1 + \frac{\varepsilon}{1!\,\eta}x + \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)}{2!\,\eta(\eta+1)}x^2 + \ldots,$$
která jest řešením rovnice
$$x y'' + (\eta - x) y' - \varepsilon y = \emptyset$$
a uvažovanou opětovně v literatuře.[7])

Ale ježto uvedená diferenciální rovnice 2. řádu jest též degenerací hypergeometrické diferenciální rovnice, lze funkci $\gamma \bar{a}_{x+t}$ vyjádřiti pomocí hypergeometrické řady $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, pro $\beta = 1$, $\gamma = -\sigma$, $x = \frac{\zeta}{\alpha}$, necháme-li α konvergovati k ∞.[8])

Toto vyjádření pomocí hypergeometrické řady bylo odvozeno Mc. Clintockem a van des Belten z analytického výrazu pro $\bar{a}_x$.

---

[7]) Viz na př. Goursat: Cours d'analyse math. II. díl, 1911 a Friedli v citované práci str. 187.

[8]) Viz na př. Goursat cit. místo.

Souvislost mezi $P(\lambda, k)$ a $Q(\lambda, k)$ uvažovanými zvláště Hermitem[9]) $\gamma \bar{a}_{x+t}$, lze vyšetřiti rovněž nejlépe, vycházíme-li z rovnice (7).

Položíme-li konečně

$$s = 1, \quad \text{tedy } \alpha = 0 \quad \text{a} \quad \delta = \emptyset,$$

obdržíme jakožto zvláštní případ funkce $\bar{a}(x)$ funkci $\bar{e}(x)$, t. j. průměrnou délku života při Gomperzově formuli.

V tomto případě mění se rovnice (7) na diferenciální rovnici definující integrallogaritmus, takže máme vztah

$$\bar{e}_x = \frac{-e^{-\xi} Li(e^{+\xi})}{\gamma},$$

kdež $Li(e^{-\xi})$ je označení pro integrallogaritmus, jehož odvození není jinak snadné.

*

Contribution à l'application des équations différentielles à la science actuaire.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans cette deuxième partie de son mémoire, l'auteur résout le problème inverse à celui, résolu par lui dans la première partie, à savoir: quelles sont les conditions auxquelles doit satisfaire le taux instantanné de mortalité pour que les rentes viagères, calculées d'après ce taux, remplissent la relation trouvée par Gram pour la fonction de Gomperz-Makeham. On trouve pour l'intensité de la mortalité $\mu(x)$ l'équation fonctionnelle

$$\mu(\varrho x + n) = \frac{1}{\varrho}\mu(x) + \frac{\delta}{\varrho} - \delta_1 = \frac{1}{\varrho}\mu(x) + m$$

qu'on résout par la méthode employée par Abel dans son mémoire cité dans le texte.[4]) On obtient ainsi la loi de mortalité (15); elle jouit de la propriété suivante: si l'on applique au taux δ et à l'âge x la transformation linéaire

$$\delta_1 = \frac{\delta}{\varrho} + m, \quad x_1 = \varrho x + n,$$

alors la rente viagère, calculée d'après la loi trouvée, est multipliée par un coefficient ϱ. On peut déduire d'une manière simple, de l'équation différentielle (9), trouvée pour la rente viagère dans la première partie, des résultats importants au point de vue du calcul numérique, concernant la variation des constantes de la loi de

[9]) Viz na př. Nielsen: Handbuch der Theorie des Gammafunction str. 25 a j.

mortalité, démontrée pour la première fois par Friedli,[6]) p. ex. la variation de $\bar{a}_x$ par rapport à la variation de la constante g, etc. Pour la variation simultannée de g, s, c on obtient la relation (19).

Il suit, de l'équation linéaire du 2e ordre (11), immédiatement la connexion du problème avec la fonction transcendente

$$G(\varepsilon, \eta, x) = 1 + \frac{\varepsilon}{1!\,\eta} x + \frac{\varepsilon(\varepsilon + 1}{2!\,\eta(\eta + 1)} x^2 + \cdots.$$

ainsi qu'avec la série hypergéométrique.

Si, enfin, on pose $s = 1$, et, par conséquent $\alpha = 0$, $\delta = 0$, on obtient une expression de la fonction donnant la durée moyenne de la vie $\bar{e}(x)$, à l'aide de l'intégrale-logarithme.