$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

jeť různý od nully; *lze tedy z nich utvořiti nanejvýše $n-s$ podstatně různých soustav $x_1 \ldots, x_n$. Tolik jich ale taky skutečně lze utvořiti* vůči okolnosti, že $x_{s+1}, \ldots, x_n$ jsou libovolné, že tedy tyto vždy lze tak voliti, aby determinant z $n-s$ soustav utvořeny $\Sigma \pm x_{s+1}^{(1)} x_{s+2}^{(2)} \ldots x_n^{(n-s)}$ nebyl nullou.

Ale i opak nalezené věty platí t. j.: *Vyhovuje-li daným rovnicím $n-s$ podstatně různých soustav $x$, pak musí vymizeti $\Delta$ i se všemi minory, jichž stupeň jest vyšší než $s$.* Neboť jakmile by některý nemizící nejvyšší minor byl stupně $\sigma > s$, tu bychom ihned soudili, že může existovati nanejvýše $n-\sigma$ podstatně různých řešení, kdežto jich dle supposice jest $n-s$, to jest více než $n-\sigma$.

V Praze, v prosinci 1884.

---

# Důchod invalidní.

Napsal

**Martin Pokorný.**

(Pokračování.)

2. Vypočítání hodnoty $i_{n+1}$ předpokládá tedy mimo známé veličiny $p_n$ a $s_n$ ještě $A_n$ jakožto známé, kteroužto veličinu tedy bylo by též určiti.

Počínajíce si podobně jako při určování veličiny $i_{n+1}$, rozdělme rok opět v $m$ dílů, a určeme postupujíce po $m$tinách roku vždy zbývající aktivní. Podle vzorce (2) jest pravděpodobnost, že osoba aktivní, žijící na konci $(x-1)$ní $m$tiny, přežije $x$-tou $m$tinu,

$$\frac{m-x+x \, . \, r_n}{m-x+1+(x-1)\,r_n},$$

či zavede-li se

$$1-r_n = w_n,$$

také

$$\frac{m-x\,w_n}{m-(x-1)\,w_u}.$$

Z $A_n$ aktivních $n$letých přežije tedy první $m$tinu roku

$$A_n \, . \, \frac{m - w_n}{m},$$

od nich jest nyní odečísti počet povstalých invalidních, totiž $A_n \frac{p_n}{m}$, zbude tedy aktivních na konci 1. *m*tiny roku:

$$A_n \, . \, \frac{m - w_n}{m} - A_n \frac{p_n}{m} \, .$$

Z těch přežije 2. *m*tinu roku

$$\left(A_n \frac{m - w_n}{m} - A_n \frac{p_n}{m}\right) . \frac{m - 2\,w_n}{m - w_n},$$

od nich opět odečísti bude počet invalidních $A_n \frac{p_n}{m}$, tak že bude aktivních na konci 2. *m*tiny roku:

$$A_n \left[\left(\frac{m - w_n}{m} - \frac{p_n}{m}\right) . \frac{m - 2\,w_n}{m - w_n} - \frac{p_n}{m}\right],$$

tedy dále na konci 3. *m*tiny:

$$A_u \left[\left(\left\{\frac{m - w_n}{m} - \frac{p_n}{m}\right\} . \frac{m - 2w_n}{m - w_n} - \frac{p_n}{m}\right) . \frac{m - 3w_n}{m - 2w_n} - \frac{p_n}{m}\right],$$

a na konci *m*té *m*tiny, čili za celý rok

$$A_{n+1} = A_n \left|\left\{ \ldots \left[\left(\frac{m - w_n}{m} - \frac{p_n}{m}\right) . \frac{m - 2w_n}{m - w_n} \frac{p_n}{m}\right] . \frac{m - 3w_n}{m - 2w_n} - \ldots \right\} \right.$$
$$\left. . \frac{m - m\,w_n}{m - (m - 1)\,w_n} - \frac{p_n}{m}\right| .$$

Provedouce násobení obdržíme:

$$A_{n+1} = A_n \frac{m - m w_n}{m} - A_n p_n (1 - w_n) \left(\frac{1}{m - w_n} + \frac{1}{m - 2\,w_n}\right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{1}{m - (m - 1) w_n} + \frac{1}{m - m w_n}\right) .$$

Nahradíme-li zde členy řady v závorce jako při (3), a sečteme-li členy dle rovných mocnin, vyjde při témž označení jako tam:

$$A_{n+1} = A_n (1 - w_n) - A_n p_n (1 - w_n) \left(1 + \frac{w_n}{m^2} \sum_1^m m + \frac{w_n^2}{m^3} \sum_1^m m^2\right.$$
$$\left. + \frac{w_n^3}{m^4} \sum_1^m m^3 + \ldots\right) .$$

Obecný člen řady v závorce jest

$$\frac{w_n^x}{m^{x+1}}\sum_1^m m^x = \frac{w_n^x}{m^{x+1}}\left(\frac{m^{x+1}}{x+1}+\frac{m^x}{2}+\frac{1}{2}\binom{x}{1}\mathrm{B}_1\, m^{x-1}-\ldots\right)$$

$$=\frac{w_n^x}{x+1}+\frac{w_n^x}{2m}+\frac{1}{2}\binom{x}{1}\mathrm{B}_1\frac{w_n^x}{m^2}-\ldots,$$

z čehož pro $\lim m = \infty$,

$$\lim \frac{w_n^x}{m^{x+1}}\sum_1^m m^x = \frac{w_n^x}{x+1}.$$

Vložíce hodnotu tuto pro $x = 1, 2, \ldots$ do hořejšího vzorce pro $\mathrm{A}_n$, obdržíme:

$$\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{A}_n(1-w_n) - \mathrm{A}_n p_n (1-w_n)\left(1+\frac{w_n}{2}+\frac{w_n^2}{3}+\frac{w_n^3}{4}+\ldots\right)$$

$$= \mathrm{A}_n(1-w_n) - \mathrm{A}_n p_n(1-w_n)\frac{1}{w_n}\left(w_n+\frac{w_n^2}{2}+\frac{w_n^3}{3}+\ldots\right),$$

čehož jako ve vzorci (6) vyjde ihned:

$$\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{A}_n(1-w_n) + \mathrm{A}_n p_n(1-w_n)\,.\,\frac{1}{w_n}\,.\, l(1-w_n), \quad (7)$$

čili položíme-li $1 - w_n = r_n$:

$$\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{A}_n r_n\left(1+p_n\frac{l\, r_n}{1-r_n}\right). \quad (7')$$

Z počátečného čísla $\mathrm{A}_n$ dala by se vypočítati všecka další čísla $\mathrm{A}_{n+1}$, $\mathrm{A}_{n+2}$, atd., kdyby mimo $p_n$, $p_{n+1}$ atd. známa byla i čísla $r_n$ čili také $w_n$, t. j. úmrtnost aktivních, kterýchžto však tabell dosud z pozorování není, jak jsme již z předu podotkli. Aby se místo této neznámé úmrtnosti vzala úmrtnost všeobecné tabelly životní, nemůžeme schvalovati. Shledáme ihned, že možno veličiny $\mathrm{A}_n$ určiti jinou cestou a tu by pak ze vzorce (7') dala určiti se patrně veličina $r_n$.

3. Podle označení dříve udaných jest $\mathrm{J}_n$ počet invalidů z jistého počtu osob vůbec od počátku povstalých a ve věku $n$ roků ještě žijících. Během příštího roku zemře z těchto invalidů $\mathrm{J}_n u_n$, přežije tedy příští rok $\mathrm{J}_n(1-u_n) = \mathrm{J}_n s_n$; během téhož roku přibude pak ještě nových invalidů $i_{n+1}$, tak že po uplynulém roce bude vůbec na živě invalidů:

$$\mathrm{J}_{n+1} = \mathrm{J}_n s_n + i_{n+1}. \quad (8)$$

4. Konečně pak uvažme, že majíce za základ některou osvědčenou tabellu úmrtní všeobecnou, musíme nutně souvislost mezi ní a tabellami aktivních i invalidních připustiti tuto:

Dejme tomu, že ve věku $r$ let žije vůbec osob v pozorování vzatých $L_r$, že však v tom věku není jestě invalidů, že tedy všickni jsou aktivní. Tu jest

$$A_r = L_r .$$

Z těchto aktivních vypočísti lze vzorcem (6) počet invalidů, kteří z nich povstali a po roce ještě jsou živi, t. j. $i_{r+1}$. Poněvadž před tím invalidů ještě nebylo, jest zároveň

$$J_{r+1} = i_{r+1} .$$

Dále udává tabella obecná, že po roce jest osob vůbec z oněch $L_r$ ještě na živě $L_{r+1}$, nehledíc k tomu, jsou-li ještě aktivní či již invalidní, jakož i k tomu, byli-li ti, kdož v tom roce z nich zemřeli, totiž $L_r - L_{r+1}$, v době svého úmrtí aktivní či invalidní. V čísle $L_{r+1}$ jsou tedy patrně zahrnuti všickni v tom věku ještě žijící aktivní i invalidní, neboť jiných osob není.

Platí tedy nutně vztah

$$L_{r+1} = A_{r+1} + J_{r+1} .$$

Z toho vypočte se $A_{r+1}$, z čehož opět vzorcem (6) $i_{r+2}$ pak vzorcem (8) $J_{r+2}$. Z obecné tabelly úmrtní dále jde, že z $L_{r+1}$ osob žijících po roce žije ještě $L_{r+2}$. Poněvadž číslo $L_{r+1}$ skládalo se z $A_{r+1}$ aktivních a $J_{r+1}$ invalidních, z nichž dohromady zemřelo $L_{r+1} - L_{r+2}$, kdežto z ostatních někteří aktivní stali se invalidními, musí nutně opět

$$L_{r+2} = A_{r+2} + J_{r+2} ,$$

z čehož vypočte se $A_{r+2}$.

Patrně půjde počet tím způsobem dále a stanoví se tak tabelly pro $i_n$, $J_n$ a $A_n$ současně. Při tom na místo vzorce (7) vstoupil jiný vztah, který z hořejšího rozboru přirozeně plyne, že totiž *počet všech aktivních a všech invalidních stejného věku činí vždy dohromady počet žijících vůbec toho věku*, t. j.

$$L_n = A_n + J_n . \tag{9}$$

Tu tedy k vypočítávání oněch čísel $i_n$, $J_n$, $A_n$ stačí zúplna vzorce (6), (8), (9), v nichž nevyskytuje se úmrtnost aktivních, kterouž bychom naopak nyní mohli vzorcem (7) pro kterýkoli věk vypočísti. —

Že na tento téměř na první pohled patrný jednoduchý vztah položil jsem zvláštní důraz, není bez příčiny.

Pokud probírali mathematikové otázky invalidnosti na základě stejné úmrtnosti pro aktivní a neaktivní, byla i rovnice (9) pojata v jejich rozbory. O tom svědčí mimo jiné také spis Zeunerův již shora jmenovaný. Zeuner používá vztahu toho jakožto samozřejmého a používá ho při vypočítávání tabell invalidity, ale tak, že nejprv určuje počet aktivních pomocí úmrtnosti obecné a odečtením jich od žijících vůbec vypočítává teprv počet invalidních; bere se tedy cestou naší opáčnou.

Ježto pak i po vydání tabell Běhmových (zvláštní úmrtnosti pro invalidy) podrželi mathematikové v praxi k určování počtu aktivních úmrtnost obecnou $t_n$, nemohly ovšem pro čísla $A_n$ a $i_n$ vyjíti hodnoty, vyhovující rovnici (9), za kteroužto příčinou ji také raději ignorovali, *což dlužno prohlásiti za vadu podstatnou.*

## II.

Ačkoliv by vypočítání hodnot $A_n$ dle vzoru (6) nečinilo v praxi zvláštních obtíží, přece s ohledem na praktické mathematiky a i na školy, kde by chtěli učiti těmto oborům, vidím se pohnuta nastoupiti cestu, která nepřestupuje obor mathematiky elementární, ale vede ovšem k výsledku méně přesnému, ač přece dosti blíživému a pro praxi úplně dostačujícímu.

Otázka pensí invalidních na základě zvláštní úmrtnosti pro invalidy nejšíře prakticky provedena byla *Lewinem* a *Spitzrem*, z nichž prvý uveřejnil o tom spis r. 1872, druhý r. 1881 *), podavše spolu již podrobné tabulky. Uvedu nejprve cestu, kterou brali se tito dva mathematikové.

1. *Spitzer*, jenž již před Lewinem na jiných místech o této věci pojednal, počíná si k určení čísla $i_{n+1}$ takto:

Z $A_n$ aktivních na počátku roku žijících stane se během roku invalidními $A_n p_n$. Kdyby tito invalidi byli jimi bývali hned na počátku roku, zemřelo by jich do konce roku $A_n p_n u_n$. Poněvadž však jedni stali se invalidními hned na počátku, jiní zase až na konci roku, nepochybíme mnoho, představujíce si, že průměrem všech $A_n p_n$ povstalo uprostřed roku. Tu pak mají

*) *Lewin*, Invalidenpensionen etc., Pesth, 1872. *Spitzer*, Anleitung zur Berechnung der Leibrenten u. Anwartschaften, sowie der Invaliden-Pensionen etc. Wien, 1881.

k dožití konce roku jen ještě půl leta a za ten čas není úmrtnost jejich $u_n$, nýbrž zajisté jen polovička $\frac{1}{2}u_n$, t. j. z invalidů nově povstalých zemře do konce roku $\frac{1}{2}A_n p_n u_n$, i zbude jich tedy

$$\begin{aligned} i_{n+1} &= A_n p_n - \tfrac{1}{2}A_n p\, u_n \\ &= A_n p_n\,(1 - \tfrac{1}{2}u_n), \end{aligned} \tag{10}$$

čili zavedeme-li $1 - u_n = s_n$, také

$$i_{n+1} = A_n p_n \frac{1 + s_n}{2}. \tag{10'}$$

*Lewin* nechtěje spokojiti se s tímto vzorem vychází nejprve od jednodušší podmínky, podle které by úmrtnost invalidů nelišila se od úmrtností aktivních, tedy ani od úmrtnosti lidí vůbec, a přirovnávaje povstávání invalidů a odumírání jich k vytahování kuliček bílých a černých ze dvou osudí, dochází rozborem dosti složitým výrazu pro pravděpodobnost úmrtí invalidů těch $= \frac{t_n}{2 - t_n}$, což zavedením $t_n = 1 - z_n$ dává také $\frac{1 - z_n}{1 + z_n}$, čili $1 - \frac{2\,z_n}{1 + z_n}$. (K této hodnotě dospěl před tím již *Zeuner* v uvedeném svém spise, ale cestou jinou, nemálo složitou). Lewin přechází pak z tohoto výrazu ihned k novému, přibíraje různou úmrtnost pro invalidy a pro aktivní (kteroužto klade za rovnu s úmrtností obecnou). Výraz ten jest

$$\frac{u_n}{2 - t_n},$$

tedy

$$\begin{aligned} i_{n+1} &= A_n p_n - A_n p_n \frac{u_n}{2 - t_n} \\ &= A_n p_n \left(1 - \frac{u_n}{2 - t_n}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Jak viděti, zaměnil Lewin úmrtnost obecnou za úmrtnost invalidů pouze v čítateli, ponechav ji v jmenovateli nezměněnu. Že tak učinil, odůvodňuje předně malým rozdílem mezi čísly $u_n$ a $t_n$ a mimo to tvrdí, že vedly jej při tom i důvody theoretické, o nichž však ničeho nepověděl. —

Se stanoviska dostatečné blíživosti nelze proti postupu Spitzrovu ničeho namítati. Přidržíce se cesty této, uvidíme ihned, jaký smysl mají oba výrazy právě uvedené a v čem co do významu se liší.

Rozbor náš v odst. I. vedoucí k určení veličiny $i_{n+1}$ má zde plnou platnost, toliko že se velice zjednoduší, neboť patrně položiti jest ve vzorci (2) $m = 2$, t. j. rozděliti rok na dvě půlky (místo na $m$tiny). Zároveň jest ve vzorci tom položiti $\frac{l_{n+1}}{l_n} = s_n$, poněvadž jde o úmrtnost invalidů. Vzorec (2) tedy bude míti nyní tvar:

$$\frac{2 - x + x s_n}{3 - x + (x - 1) s_n}$$

a znamenati pravděpodobnost, že invalida příštího půl roku přežije.

Položíme-li tedy $x = 1$, vyjde pravděpodobnost, že *invalida přežije první polovici roku*:

$$\frac{1 + s_n}{2} = 1 - \tfrac{1}{2} u_n ; \qquad (\alpha)$$

za $x = 2$ pak vyjde pravděpodobnost, že *invalida přežije druhou polovici roku*:

$$\frac{2\, s_n}{1 + s_n} = \frac{2 - 2\, u_n}{2 - u_n} = 1 - \frac{u_n}{2 - u_n}. \qquad (\beta)$$

Přirovnajíce tyto dvě hodnoty ($\alpha$) a ($\beta$) ke vzorcům (10′) a (11), shledáme, že první z nich srovnává se s pravděpodobností Spitzrovou, druhá s Lewinovou, ač nahradí-li se ve výraze Lewinově $t_n$ v jmenovateli číslem $u_n$.

Vzorec Spitzrův (10) nebo (10′) vyjadřuje tedy vlastně podmínku, že invalidi $A_n p_n$ povstali vesměs na počátku a přežili první polovici roku, kdežto Lewinův (11) vyhovoval by správněji (se změnou řečenou v jmenovateli) podmínce, že invalidi $A_n p_n$ uprostřed roku žijící přežijí druhou polovici roku.

Ostatně dojdeme tohoto výsledku samostatně velmi snadně takto:

Je-li $l_n$ počet žijících některé kategorie, bude jich po půl letě na živě ještě $l_{n+\frac{1}{2}}$ a tu chybíme málo pokládajíce počet tento za průměr mezi počty žijících na počátku a na konci roku, t. j.

$$l_{n+\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,(l_n + l_{n+1}).$$

Pravděpodobnost, že $(n + \frac{1}{2})$letý přežije příštího půl roku, jest tedy

$$\frac{l_{n+1}}{l_{n+\frac{1}{2}}} = \frac{l_{n+1}}{\frac{1}{2}\,(l_n + l_{n+1})} = 2\,\frac{l_{n+1}}{l_n} : \left(1 + \frac{l_{n+1}}{l_n}\right),$$

a jelikož zde $\frac{l_{n+1}}{l_n} = s_n$, jest pravděpodobnost ta:

$$\frac{2\,s_n}{1+s_n},$$

z čehož pak bezprostředně vychází:

$$i_{n+1} = A_n p_n \,.\, \frac{2\,s_n}{1+s_n}. \tag{12}$$

Vzorec (12) může tedy pro praxis nahraditi vzorec (6) nebo (6′) a dává skutečně hodnoty velmi přibližné.

2. Poněvadž, jak již dříve pověděno, žádný mathematik neužil po zavedení zvláštní úmrtnosti invalidů pro výpočty vzorce (9), byli ovšem nuceni, vypočítávati veličiny $A_n$ vzorcem zvláště vyvozeným, analogickým k našemu vzorci (7).

*Lewin* i *Spitzer*, jako jiní, učinili to takto: Z $A_n$ žijících $n$letých aktivních ubude během příštího roku úmrtím $A_n t_n$ (poněvadž brali úmrtnost obecnou $t_n$ místo úmrtnosti aktivních) a krom toho všickni ti invalidi $i_{n+1}$, kteří v tom čase povstali a konce roku se dočkali, t. j.

$$A_{n+1} = A_n - A_n t_n - i_{n+1} = A_n\,(1 - t_n) - i_{n+1}. \tag{13}$$

V tom však shledáváme jednu nesprávnost, které ani při pouhém přibližném určování hledané veličiny nelze pominouti, totiž že odečítají se jen ti invalidi, kteří v roce nezemřeli, při čemž myšlénkou vedoucí jest to, že ti z invalidů, kteří zemřeli, odečítají se již mezi zemřelými aktivními. — Tento postup přešel sem nezměněn z vývodů starších, kdy ještě pokládala se úmrtnost invalidů za totožnou s úmrtností aktivních. Jakmile béřeme úmrtnost invalidů za rozdílnou, neudává $A_n t_n$ počet všech zemřelých v roce, totiž aktivních i také invalidních.

Správnější bude cesta obdobná s tou, jíž jsme se brali při vyvíjení vzorce (7), totiž tato:

Poněvadž invalidi $A_n p_n$ povstali z $A_n$ aktivních nenáhle po celý rok, budeme jako při vývoji vzorce (12) předpokládati, že povstali najednou uprostřed roku a ubudou tu od aktivních tou dobou ještě žijících. Po 1. pülletí žije z aktivních původních dle ($\alpha$), kdež místo $s_n$ ovšem nutno položiti $r_n$,

$$A_n \,.\, \frac{1+r_n}{2},$$

od nich pak ubude $A_n p_n$ invalidních, zbude tedy aktivních

$$A_n \cdot \frac{1+r_n}{2} - A_n p_n.$$

Pravděpodobnost, že aktivní dožijí se i konce 2. půlletí, jest dle ($\beta$)

$$\frac{2\, r_n}{1+r_n},$$

pročež konečně:

$$A_{n+1} = \left(A_n \cdot \frac{1+r_n}{2} - A_n p_n\right) \cdot \frac{2\, r_n}{1+r_n},$$

čili

$$A_{n+1} = A_n r_n - A_n p_n \cdot \frac{2\, r_n}{1+r_n}. \qquad (14)$$

Pokud vzorec tento se srovnává se vzorcem Lewinovým a Spitzrovým (13) a pokud od něho se liší, snadno viděti, přibere-li se k tomu vzorec (12). Přímo klassickým stane se výsledek porovnání, uvážíme-li, že vzorec (13), pokud úmrtnost invalidů ještě brala se za rovnu s úmrtností aktivních, se vzorcem (14) naprosto byl totožný a že zavedením rozdílné úmrtnosti invalidních do členu $i_{n+1}$ ve vzorci (13), tedy rozhodným zlepšením tohoto členu, hodnota $A_{n+1}$ od pravdy se vzdálila, poněvadž člen $A_n p_n \frac{2\, r_n}{1+r_n}$ není s členem $i_{n+1}$ totožný.

Příčinou jest zřejmě to, že odvození vzorce pro $A_{n+1}$ v tom způsobu, jak je nalezáme u Lewina a Spitzra, bylo zcela správné pro stejnou úmrtnost všech osob, ale přestalo býti správným, jakmile pro invalidy se vzala úmrtnost jiná.

K vypočítání tabelly pro $A_{n+1}$, neznajíce hodnoty $r_n$, mohli bychom tedy po příkladě jiných mathematiků užiti hodnot úmrtnosti obecné $t_n$ na základě vzorce (14).

Avšak dle rozboru našeho v oddíle I. poslouží nám k tomu přesněji vzorce (8) a (9), kteréž tedy se vzorcem (12) v každé příčině dostačí na sestrojení tabulek invalidních i aktivních. —

Pro dokonalejší přehled postupu zopakujeme tedy celý děj výpočtu:

Dány jsou tabelly hodnot $L_n$, $p_n$ a $u_n$ (čili $1-s_n$).

Začíná-li se tabella hodnot $p_n$ od věku $n = r$, položíme nejprv:

$$A_r = L_r,$$
$$i_r = J_r = 0.$$

Z toho vypočítáme vzorcem (12):

$$\dot{i}_{r+1} = A_r p_r \cdot \frac{2\, s_r}{1 + s_r} = L_r p_r \cdot \frac{2\, s_r}{1 + s_r},$$

z toho dále vzorcem (8)

$$J_{r+1} = J_r s_r + \dot{i}_{r+1} = \dot{i}_{r+1},$$

a ze vztahu (9) konečně:

$$A_{r+1} = L_{r+1} - J_{r+1} = L_{r+1} - \dot{i}_{r+1}.$$

Podobně vyjde dále z rovnic (12), (8), (9) po sobě:

$$\dot{i}_{r+2} = A_{r+1} p_{r+1} \cdot \frac{2\, s_{r+1}}{1 + s_{r+1}},$$

$$J_{r+2} = J_{r+1} s_{r+1} + \dot{i}_{r+2},$$

$$A_{r+2} = L_{r+2} - J_{r+2} \text{ atd.}$$

Tabelly z toho přímo sestavované budou tedy tyto:

| Věk | Počet osob žijících vůbec | Pravděpodobnost, že osoba aktivní stane se za rok invalidní | Pravděpodobnost, že invalidní osoba příští rok přežije | Počet invalidních během roku povstalých a na počátku $n$-tého roku ještě žijících | Počet invalidů vůbec na počátku $n$-tého roku žijících | Počet aktivních na počátku $n$-tého roku žijících |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $L_n$ | $p_n$ | $s_n$ | $\dot{i}_n$ | $J_n$ | $A_n$ |
| $r$ | $L_r$ | $p_r$ | $s_r$ | 0 | 0 | $L_r$ |
| $r+1$ | $L_{r+1}$ | $p_{r+1}$ | $s_{r+1}$ | $L_r p_r \cdot \frac{2\, s_r}{1 + s_r}$ | $\dot{i}_{r+1}$ | $L_{r+1} - \dot{i}_{r+1}$ |
| $r+2$ | $L_{r+2}$ | $p_{r+2}$ | $s_{r+2}$ | $A_{r+1} p_{r+1} \cdot \frac{2\, s_{r+1}}{1 + s_{r+1}}$ | $J_{r+1} s_{r+1} + \dot{i}_{r+2}$ | $L_{r+2} - J_{r+2}$ |
| $r+3$ | $L_{r+3}$ | $p_{r+3}$ | $s_{r+3}$ | $A_{r+2} p_{r+2} \cdot \frac{2\, s_{r+2}}{1 + s_{r+2}}$ | $J_{r+2} s_{r+2} + \dot{i}_{r+3}$ | $L_{r+3} - J_{r+3}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

(Pokračování.)