Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

F. Augustin

Jak se užívá vzorce Lambertova-Besslova v meteorologii

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 4, 174--187

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122306

$$
\begin{aligned}
\vartheta^{\frac{1}{5}} &= -0{\cdot}4469, \\
a\vartheta^{\frac{2}{5}} &= -0{\cdot}3323, \\
\lambda a^2\vartheta^{\frac{3}{5}} &= -0{\cdot}7313, \\
-\lambda a^3\vartheta^{\frac{4}{5}} &= +0{\cdot}5275, \\
\hline
r &= -0{\cdot}973.
\end{aligned}
$$

Poznamenání. Kdybychom chtěli vzorce (8) a (9) obrátiti a vyjádřiti A, B pomocí p_4 a p_5, přišli bychom tu patrně k rovnicím ještě vyšším; nebo dělíme-li, obdržíme

$$\frac{p_4}{p_5} = q = \frac{5\,(3 - \mathrm{B})}{\mathrm{A}\,(22 + \mathrm{B})},$$

anebo vyjádříme-li B pomocí A,

$$\frac{q\mathrm{A} + 5}{5} = \frac{25}{22 + \mathrm{B}} \quad \text{nebo} \quad \mathrm{B} = \frac{15 - 22\,\mathrm{A}q}{\mathrm{A}q + 5},$$

načež ze vzorce (8) bude

$$p_4\,(16 + \mathrm{B}^2) = 5\mathrm{A}^4\,(3 - \mathrm{B}).$$

Jak patrno, jest tu řešení uvedeno na případ ještě složitější, což dle obsahu I. odstavce našeho bylo hned očekávati, takže *Youngovy* rovnice zůstávají jenom *zvláštním* případem, kdež algebraické složení kořene má tvar *Eulerovský.*

Jak se užívá vzorce Lambertova-Besslova v meteorologii.

Napsal

Dr. F. Augustin,

professor v Praze.

Mnozí badatelé pokoušeli se o odvození mathematického vzorce, jímž by mohli vyjádřiti zjevy periodické, v meteorologii se často vyskytující, jako jsou na př. *denní* a *roční* periody atmosferických úkazů, zvláště pak přesně určiti hlavní momenty periodických proměn, *minima, maxima a media.* Ze všech navržených vzorců užívá se nejvíce vzorce *Lambertova-Besslova.*

Tvar tohoto vzorce jest:

(I) $y = p_0 + p_1 \cos x + q_1 \sin x + p_2 \cos 2x + q_2 \sin 2x + \ldots$
aneb

(II) $$y = u_0 + u_1 \sin(v_1 + x) + u_2 \sin(v_2 + 2x) + u_3 \sin(v_3 + 3x) + \ldots,$$

kdež jsou $p_0 = u_0,\ p_1 = u_1 \sin v_1,\ p_2 = u_2 \sin v_2 \ldots$
$q_1 = u_1 \cos v_1,\quad q_2 = u_2 \cos v_2 \ldots$
konstanty závislé na fysikalních poměrech jednotlivých míst a jež nutno odvoditi z řad pozorování.

Lambert *) tento vzorec ustanovil pro teplotu, kdežto *Bessel* **) přijav jeho druhý tvar, ukázal, že se jím dají vyjádřiti všechny periodické úkazy v přírodě, jsou-li jinak nepřetržité a závislé na proměnné veličině, při čemž udal způsob, jak se vypočítávají konstanty tohoto vzorce.

Určení konstant stává se snadným, jestli hodnoty y empiricky odvozené přísluší k hodnotám x, jež pokračují v progressi arithmetické a vyplňují celou periodu. Konstanty se určí řešením rovnic:

$$(1)\quad \begin{aligned} \alpha &= p + p_1 \cos z + q_1 \sin z + p_2 \cos 2z + q_2 \sin 2z + \ldots \\ \alpha_1 &= p + p_1 \cos z_1 + q_1 \sin z_1 + p_2 \cos 2z_1 + q_2 \sin 2z_1 + \ldots \\ \alpha_2 &= p + p_1 \cos z_2 + q_1 \sin z_2 + p_2 \cos 2z_2 + q_2 \sin 2z_2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

kdež jsou $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ známé hodnoty pro y a $z = \frac{2\pi}{n}$.

Dosadíme-li tedy postupně $0, z, 2z, \ldots, (n-1)z$ místo z, obdržíme následující soustavu rovnic:

$$(2)\quad \begin{aligned} \alpha &= p + p_1 + p_2 + \ldots \\ \alpha_1 &= p + p_1 \cos z + q_1 \sin z + p_2 \cos 2z + q_2 \sin 2z + \ldots \\ \alpha_2 &= p + p_1 \cos 2z + q_1 \sin 2z + p_2 \cos 4z + q_2 \sin 4z + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n-1} &= p + p_1 \cos(n-1)z + q_1 \sin(n-1)z + p_2 \cos(n-1)2z \\ &\quad + q_2 \sin(n-1)2z + \ldots \end{aligned}$$

Tato soustava poskytuje obyčejně více rovnic než počet hledaných veličin obnáší; ustanoví se proto hledané konstanty tak, aby součet čtverců zbylých chyb tedy

---

*) Zeitschrift für Pyrometrie, p. 322, 345. Berlin 1779.

**) Schumacher's Astronomische Nachrichten Nro. 136, Bd. VI., p. 333.

$$(3) \qquad \sum_{m=0}^{n-1} (-\alpha_m + p + p_1 \cos mz + q_1 \sin mz + \ldots)^2$$

byl minimum.

Této podmínce se vyhoví, ustanoví-li se hledané veličiny z následující soustavy rovnic normalných

$$np + p_1 \Sigma \cos mz + q_1 \Sigma \sin mz \quad + \ldots \qquad - \Sigma \alpha_m = 0$$
$$p \Sigma \cos mz + p_1 \Sigma \cos^2 mz \quad + q_1 \Sigma \sin mz \,.\, \cos mz + \ldots \qquad - \Sigma \alpha_m \cos mz = 0$$
$$(4) \quad p \Sigma \sin mz + p_1 \Sigma \cos mz \,.\, \sin mz + q_1 \Sigma \sin^2 mz \quad + \ldots \qquad - \Sigma \alpha_m \sin mz = 0$$
$$p \Sigma \cos 2mz + p_1 \Sigma \cos 2mz . \cos mz + q_1 \Sigma \cos 2mz \sin mz + \ldots \qquad - \Sigma \alpha_m \cos 2mz = 0$$

. . . .

Uváží-li se, že

$$\sum_{m=0}^{n-1} \cos rmz = 0, \quad \sum_{m=0}^{n-1} \sin rmz = 0, \quad \sum_{m=0}^{n-1} \cos^2 rmz = \frac{n}{2},$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sin^2 rmz = \frac{n}{2}, \quad \sum_{m=0}^{n-1} \sin rmz \,.\, \cos r'mz = 0, \quad \sum_{m=0}^{n-1} \sin rmz \,.\, \sin r'mz = 0,$$

budou žádané konstanty

$$(6) \qquad \begin{aligned} p &= \frac{1}{n} \Sigma \alpha_m \\ p_1 &= \frac{2}{n} \Sigma \alpha_m \cos mz \\ q_1 &= \frac{2}{n} \Sigma \alpha_m \sin mz \\ p_2 &= \frac{2}{n} \Sigma \alpha_m \cos 2mz \\ q_2 &= \frac{2}{n} \Sigma \alpha_m \sin 2mz \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nyní ustanovíme $u_1, u_2, u_3, \ldots, v_1, v_2, v_3, \ldots$ pro tvar vzorce (II). Jest totiž:

$$p_m = u_m \sin v_m, \qquad q_m = u_m \cos v_m;$$

v_m vypočteme ze vzorce

$$\operatorname{tag} v^m = \frac{p_m}{q_m}$$

a u_m, jež se béře vždy positivně, bude

$$u_m = \frac{p_m}{\sin v_m}$$

aneb

$$u_m = \frac{q_m}{\cos v_m}.$$

Kolik členů vzorce se má ustanoviti, rozhodne se v každém jednotlivém případě užitím methody nejmenších čtverců. Jelikož funkce y konverguje, stává se součet kvadratů zbývajících chyb tím menší, čím více přijímáme členů pro y. Zbude-li nepatrná hodnota, jež se může klásti na účet chyb při pozorování učiněných, pak jest určování dalších členů zbytečným.

Pakli jsme určili konstanty, můžeme ustanoviti též dobu, kdy úkaz periodický dosáhne hodnoty nejmenší, největší a prostřední.

Máli y býti minimum nebo maximum, musí $\frac{dy}{dx} = 0$.

Differencujeme-li výraz (II), dostaneme pro vypočtení extremů (maxima neb minima) následující rovnici

$$0 = u_1 \cos (v_1 + x) + 2\, u_2 \cos (v_2 + 2\, x) + \ldots$$

Doba prostředních hodnot ustanoví se z rovnice

$$0 = u_1 \sin (v_1 + x) + u_2 \sin (v_2 + 2\, x) + \ldots$$

jejížto platnost vyplývá z té okolnosti, že arithmetický průměr všech rovnicí (II) určených hodnot pro y rovná se prvnímu členu u_0.

Z period nejčastěji se vyskytujících jest perioda *denní* $n = 24$ a $z = \frac{2\pi}{n} = 15^0$ a perioda *roční* $n = 12$, $z = \frac{2\pi}{n} = 30^0$.

Za příklad, jak se užívá vzorce *Lambertova-Besslova* v meteorologii, budiž tuto vypočítán roční běh teploty vzduchu *v Praze* na základě 80letých pozorování, provedených *na hvězdárně* od roku 1800—1879. K ustanovení konstant sloužící měsíční průměry teploty dle C, z pozorování těchto odvozené, jsou sestaveny pod m v tabulce A.

Vypočtení konstant vzorce *Lamb.-Besslova* se v tomto případě velice usnadní, ustanovíme-li, jak učinil *Karlinski**), součty a rozdíly z následujícího seřadění průměrných hodnot měsíčních:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & I & II & III & IV & V \\ VI & XI & X & IX & VIII & VII. \end{array}$$

Součty a rozdíly seřaděných těchto hodnot

$$\text{(a)} \quad \begin{array}{ll} s_0 = 0 + VI & r_0 = 0 - VI \\ s_1 = I + XI & r_1 = I - XI \\ s_2 = II + X & r_2 = II - X \\ s_3 = III + IX & r_3 = III - IX \\ s_4 = IV + VIII & r_4 = IV - VIII \\ s_5 = V + VII & r_5 = V - VII. \end{array}$$

Stejným způsobem se vypočtou další součty a rozdíly:

$$\text{(b)} \quad \begin{array}{ll} S_0 = s_0 + s_3 & R_0 = s_0 - s_3 \\ S_1 = s_1 + s_5 & R_1 = s_1 - s_5 \\ S_2 = s_2 + s_4 & R_2 = s_2 - s_4. \end{array}$$

Taktéž dostaneme:

$$\text{(c)} \quad \begin{array}{ll} \Sigma_0 = r_0 + r_3 & \Delta_0 = r_0 - r_3 \\ \Sigma_1 = r_1 + r_5 & \Delta_1 = r_1 - r_5 \\ \Sigma_2 = r_2 + r_4 & \Delta_2 = r_2 - r_4. \end{array}$$

Pro vypočtení koefficientů platí pak následující rovnice:

$$\text{(d)} \quad \begin{array}{l} 12\, p_0 = S_0 + S_1 + S_2 \\ 6\, p_1 = r_0 + R_1 \cos 30^0 + R_2 \cos 60^0 \\ 6\, q_1 = r_3 + \Sigma_1 \sin 30^0 + \Sigma_2 \sin 60^0 \\ 6\, p_2 = R_0 + (S_1 - S_2) \cos 60^0 \\ 6\, q_2 = (\Delta_1 + \Delta_2) \sin 60^0 \\ 6\, p_3 = r_0 - R_2 \\ 6\, q_3 = \Sigma_1 - r_3 \\ 6\, p_4 = S_0 - (S_1 + S_2) \cos 60^0 \\ 6\, q_4 = (\Delta_1 - \Delta_2) \sin 60^0 \\ 6\, p_5 = r_0 - R_1 \cos 30^0 + R_2 \cos 60^0 \\ 6\, q_5 = r_3 + \Sigma_1 \sin 30^0 - \Sigma_2 \sin 60^0 \\ 6\, p_6 = R_0 - S_1 + S_2 \\ 6\, q_6 = 0. \end{array}$$

Výpočty tyto lze vykonati bez užití logarithmických tabulek.

---

*) Rozprawy i sprawozdania z posiedzień Akademii Umiejętności w Krakowie VII. 1880, p. 59.

Konstanty $u_1, u_2, u_3, \ldots, v_1, v_2, v_3, \ldots$ určí se způsobem svrchu uvedeným.

Vzorec k ustanovení teploty vzduchu v *Praze* dle měsíčních hodnot m v tabulce A obsažených jest

$$
\begin{aligned}
\text{(II)} \qquad y = 9{\cdot}348 &+ 10{\cdot}997 \sin (268^\circ\ 4' + x) \\
&+ 0{\cdot}218 \sin (327^\circ 37' + 2x) \\
&+ 0{\cdot}290 \sin (125^\circ 20' + 3x) \\
&+ 0{\cdot}115 \sin (342^\circ 49' + 4x) \\
&+ 0{\cdot}114 \sin (241^\circ\ 4' + 5x) \\
&+ 0{\cdot}258 \sin (270^\circ\ 0' + 6x).
\end{aligned}
$$

K odvození periodické funkce pro určení *ročního* běhu teploty mělo by se užiti jenom průměrů stejné hodnoty, vypočtěných ze stejně dlouhých period. Obyčejné prostřední hodnoty tepla pro měsíce občanské nejsou však hodnotami odvozenými ze stejně dlouhých dob. Jedině správné jsou zde průměry normalných měsíců o 30·44 dnech, pročež nutno ustanoviti chyby, jež učiníme, užíváme-li měsíců *občanských* místo měsíců stejně dlouhých tak zvaných *normalných* o 30·44 dnech aneb o 30·42 dnech, počítáme-li délku roku na 365 dnů.

Takovéto prostřední hodnoty pro měsíce normalné, vypočtené z denních průměrů teploty za dobu 80 let, obsaženy jsou v tab. A pod m_1. Konstanty vzorce *Lamb.-Besslova* dle hodnot pro měsíce normalné odvozených jsou

$$
\begin{aligned}
\text{(II')} \qquad y = 9{\cdot}396 &+ 10{\cdot}996 \sin (269^\circ\ 4' + x) \\
&+ 0{\cdot}235 \sin (321^\circ 44' + 2x) \\
&+ 0{\cdot}291 \sin (133^\circ\ 0' + 3x) \\
&+ 0{\cdot}109 \sin (343^\circ 17' + 4x) \\
&+ 0{\cdot}136 \sin (241^\circ 35' + 5x) \\
&+ 0{\cdot}235 \sin (270^\circ\ 0' + 6x).
\end{aligned}
$$

Po případě, že by nebylo lze ustanoviti průměrné hodnoty ekvidistantní přímo z pozorování, jak se stává na většině míst pozorovacích, kde se odvozují pouze průměry pro nestejně dlouhé měsíce občanské, jak ustanovil kongress meteorologický, byly navrženy *Plantamourem* a *Weihrauchem* rozličné methody interpolační, dle kterých lze proměniti obyčejné průměry měsíční v průměry ekvidistantní a užiti jich k odvození konstant vzorce

*Lamb.-Besslova. Plantamour**) se snaží řešiti úlohu tuto interpolací differenční, kdežto *Weihrauch***) užívá methody, již můžeme nazvati interpolací *parabolickou* a *goniometrickou*, podle toho, považujeme-li jednotlivé části křivky znázorňující běh meteorologických úkazů za oblouk parabolický nebo kruhový. Vezmeme v úvahu tyto dvě methody pro zjednání ekvidistantních průměrů teploty z měsíců občanských.

Předpokládáme-li křivku, znázorňující běh teploty za parabolickou a nazveme-li ordinatu y, příslušnou abscissu z, jest

$$y = a + 2\,bz + 3\,cz^2$$

a

$$\int y\,dz = az + bz^2 + cz^3.$$

Jsou-li m_{k-1}, m_k, m_{k+1} průměrné hodnoty tepla pro tři za sebou jdoucí měsíce jakožto jednotlivé části periody a z_{k-2}, z_{k-1}, z_k, z_{k+1} abscissy vyjádřené počtem dnů omezující tyto jednotlivé části periody, dají se integrováním v příslušných mezích pro jednotlivé m ustanoviti rovnice, z nichž se určí konstanty a, b, c. Pomocí těchto konstant vypočteme na základě pozorování 80letých pro jednotlivé měsíce teplotu vzduchu v Praze:

leden	$y = 2{\cdot}351 - 0{\cdot}1840\,z + 0{\cdot}00197\,z^2$
únor	$y = -2{\cdot}038 + 0{\cdot}0006\,z + 0{\cdot}00093\,z^2$
březen	$y = -1{\cdot}005 + 0{\cdot}0376\,z + 0{\cdot}00136\,z^2$
duben	$y = 0{\cdot}065 + 0{\cdot}2150\,z - 0{\cdot}00030\,z^2$
květen	$y = 5{\cdot}992 + 0{\cdot}2416\,z - 0{\cdot}00105\,z^2$
červen	$y = 12{\cdot}353 + 0{\cdot}1738\,z - 0{\cdot}00096\,z^2$
červenec	$y = 16{\cdot}710 + 0{\cdot}1242\,z - 0{\cdot}00114\,z^2$
srpen	$y = 18{\cdot}866 + 0{\cdot}1088\,z - 0{\cdot}00197\,z^2$
září	$y = 21{\cdot}076 - 0{\cdot}0846\,z - 0{\cdot}00081\,z^2$
říjen	$y = 18{\cdot}001 - 0{\cdot}1669\,z - 0{\cdot}00027\,z^2$
listopad	$y = 13{\cdot}761 - 0{\cdot}2820\,z - 0{\cdot}00134\,z^2$
prosinec	$y = 6{\cdot}031 - 0{\cdot}1738\,z + 0{\cdot}00093\,z^2$.

Z těchto rovnic vypočteme ekvidistantní měsíční průměry tepla, dosadíme-li za z počet dnů odpovídající středům vždy tří

*) Nouvelles études sur le climat de Genève. Memoires de la société de physique et d'histoire naturelle de Genève XXIV. p. 431.

**) Zeitschrift der österreich. Gesellschaft für Meteorologie XVII. p. 20.

za sebou jdoucích měsíců na př. $z_1 = 1 . \frac{365}{24} + 31$,

$z_2 = 3 . \frac{365}{24} + 0, \quad z_3 = 5 . \frac{365}{24} - 31, \ldots, z_{12} = 23 . \frac{365}{24} - 304$,

takže bude v lednu $z = 46 \cdot 208$, v únoru $z = 45 \cdot 625$, v březnu $z = 45 \cdot 042, \ldots$

Způsobem tímto z rovnic určené měsíční průměry teploty jsou sestaveny pod m_2 v přehledné tabulce A. Vzorec *Lamb.-Besslův* dle těchto hodnot bude

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{II}'') \qquad y = 9\cdot402 &+ 11\cdot062 \sin(268^\circ 58' + x\ ) \\
&+ 0\cdot254 \sin(320^\circ 47' + 2x) \\
&+ 0\cdot298 \sin(128^\circ 24' + 3x) \\
&+ 0\cdot130 \sin(341^\circ 17' + 4x) \\
&+ 0\cdot127 \sin(240^\circ 38' + 5x) \\
&+ 0\cdot304 \sin(270^\circ\ 0' + 6x).
\end{aligned}
$$

Předpokládáme-li, že má křivka znázorňující běh některého meteorologického úkazu pro tři za sebou následující oddíly periody, jako jsou měsíce, tvar

$$y = \mathrm{A} + \mathrm{B} \sin(\beta + x)$$

aneb $\qquad y = \mathrm{A} + \mathrm{D} \cos x + \mathrm{E} \sin x,$

pak jest $\qquad \int y\, dx = \mathrm{A}x + \mathrm{D} \sin x - \mathrm{E} \cos x.$

Zavedeme místo úseček z_k oblouky ξ_k a ustanovíme integrováním v příslušných mezích rovnice pro m_{k-1}, m_k, m_{k+1}, z nichž vypočteme A, D, E. Hodnota

$$m_k = \mathrm{A} + \mathrm{D} \frac{\sin \xi_k - \sin \xi_{k-1}}{\xi_k - \xi_{k-1}} + \mathrm{E} \frac{\cos \xi_{k-1} - \cos \xi_k}{\xi_k - \xi_{k-1}}$$

aneb $\qquad m_k \ = \mathrm{A} + \mathrm{D} . sk + \mathrm{E} . ck;$

dále $\qquad m_{k-1} = \mathrm{A} + \mathrm{D}(sk - 1) + \mathrm{E}(ck - 1),$

$\qquad m_{k+1} = \mathrm{A} + \mathrm{D}(sk + 1) + \mathrm{E}(ck + 1).$

Z těchto rovnic vypočteme A, D a E a k ustanovení B a β máme

$$\mathrm{B} \sin \beta = \mathrm{D}, \qquad \mathrm{B} \cos \beta = \mathrm{E}.$$

Pro teplotu vzduchu v Praze získáme pak následující vzorce interpolační:

leden	$y = 11\cdot802 - 13\cdot747 \sin(74^\circ 29' + x)$
únor	$y = 6\cdot754 - 8\cdot530 \sin(82^\circ 55' + x)$
březen	$y = 12\cdot752 - 13\cdot516 \sin(61^\circ 29' + x)$
duben	$y = 7\cdot221 - 11\cdot734 \sin(86^\circ 46' + x)$

květen $y = 7{\cdot}492 - 11{\cdot}618 \sin (85^0 30' + x)$
červen $y = 11{\cdot}561 - 8{\cdot}531 \sin (68^0 28' + x)$
červenec $y = 11{\cdot}889 - 8{\cdot}225 \sin (67^0 31' + x)$
srpen $y = 5{\cdot}939 - 14{\cdot}602 \sin (64^0 4' + x)$
září $y = 11{\cdot}744 - 9{\cdot}971 \sin (83^0 41' + x)$
říjen $y = 7{\cdot}954 - 11{\cdot}907 \sin (66^0 49' + x)$
listopad $y = 12{\cdot}974 - 13{\cdot}558 \sin (89^0 6' + x)$
prosinec $y = 6{\cdot}409 - 8{\cdot}435 \sin (64^0 9' + x)$.

Dosadíme-li v těchto vzorcích $x = 15^0, 45^0, 75^0, 105^0, \ldots$, dostaneme ekvidistantní hodnoty za y, jež jsou pod m_3 obsaženy v tab. A, z nichž vypočteme konstanty vzorce *Lamb.-Besslova.*

(II''') $$\begin{aligned} y = 9{\cdot}390 &+ 11{\cdot}086 \sin (269^0 4' + x) \\ &+ 0{\cdot}237 \sin (320^0 58' + 2x) \\ &+ 0.325 \sin (132^0 45' + 3x) \\ &+ 0{\cdot}126 \sin (336^0 53' + 4x) \\ &+ 0{\cdot}127 \sin (243^0 9' + 5x) \\ &+ 0{\cdot}283 \sin (270^0 0' + 6x). \end{aligned}$$

Tabulka A poskytuje přehled průměrných hodnot teploměrných, jichž bylo užito k vypočtení konstant vzorce *Lamb.-Besslova*, a sice jsou obsaženy pod m hodnoty pro měsíce občanské, pod m_1 hodnoty pro měsíce normalné o 30·22 dnech ustanovené přímo z řady pozorovací a pod m_2, m_3 hodnoty ekvidistantní určené interpolací. Pod $c_1 = m_1 - m$, $c_2 = m_2 - m$, $c_3 = m_3 - m$ sestaveny jsou korrekce sloužící k odvození průměrných hodnot ekvidistantních z obyčejných průměrů měsíčních:

Tab. A.

	m	m_1	m_2	m_3	c_1	c_2	c_3
	°	°	°	°	°	°	°
Leden	—1·79	—1·80	—1·94	—1·95	—0·01	—0·15	—0·16
Únor	—0·13	—0·03	—0·08	—0·13	+0·10	+0·04	0·00
Březen	3·30	3·56	3·45	3·45	+0·26	+0·15	+0·15
Duben	9·30	9·59	9·59	9·62	+0·29	+0·29	+0·32
Květen	14·74	14·96	15·01	15·04	+0·22	+0·27	+0·30
Červen	18·23	18·31	18·43	18·42	+0·08	+0·20	+0·19
Červenec	19·92	20·00	20·04	20·05	+0·08	+0·12	+0·13
Srpen	19·51	19·44	19·62	19·62	—0·07	+0·11	+0·11
Září	15·42	15·31	15·38	15·37	—0 11	- 0·04	—0·05

	m	m_1	m_2	m_3	c_1	c_2	c_3
	o	o	o	o	o	o	o
Říjen	9·82	9·67	9·76	9·65	—0·15	—0·06	—0·17
Listopad	3·72	3·63	3·57	3·54	—0·09	—0·15	—0·18
Prosinec	0·13	0·11	0·01	0·03	—0·02	—0·12	—0·10
Rok	9·35	9·40	9·40	9·39	+0·05	+0·05	+0·04.

Z přehledu toho poznáváme, že jest celoroční teplota odvozená z ekvidistantních hodnot měsíčních o 0·°05 C větší nežli celoroční průměr z občanských měsíců ustanovený a že jsou v krajních případech opravy těchto měsíců značné, takže nelze užiti jejich hodnot ku správnému ustanovení konstant vzorce *Lambert-Besslova* místo hodnot ekvidistantních. Porovnáváním konstant obsažených ve vzorci (II), (II′),... vypočtených na základě obyčejných a ekvidistantních hodnot měsíčních shledáme rozdíly zejména v konstantách úhlových a sice v prvním úhlu o 1°, v druhém o 6°, v třetím o 9° atd. Naproti tomu jsou rozdíly v koefficientech číselných malé.

Nyní jde o to, abychom ustanovili, zdali vyhovují svému účelu dosavadní methody k získání hodnot ekvidistantních z obyčejných průměrů měsíčních tam, kde je nelze vypočísti přímo a snáze z řady pozorovací a mohou-li býti odporučeny ku všeobecnému užívání. Zvoleny byly na zkoušku z method dosud navržených dvě nejlepší, jež podává *Weihrauch.* O jejich hodnotě a správnosti můžeme se přesvědčiti, zkoušíme-li výsledky těmito methodami docílené, jež jsou sestaveny v tab. A. Shledáme, že interpolované ekvidistantní hodnoty měsíční m_2, m_3 dají celoroční průměr teploty o $\pm$ 0·006 rozdílný od ekvidistantních hodnot pozorovaných m_1 a že korrekce c_2, c_3 postupují až na nepatrné odchylky stejně s korrekcemi c_1. Jak viděti vedou obě methody k výsledkům zcela správným a spolehlivým, které však z obou má se dáti přednost, jest zde těžko rozhodnouti, jelikož jsou obě mathematicky přesné a kdežto methoda parabolická vede rychleji k cíli nežli methoda goniometrická, jest opět tato problemu přiměřenější.

Přes to všechno zjednají si sotva tyto methody všeobecné platnosti. Již *Bessel* praví, že vývin vzorce pro úkaz periodický má jenom tenkráte interess, když při rychlém konvergování řady nemusí se ustanoviti mnoho členů, kdežto předcházející upravení měsíčních hodnot v hodnoty ekvidistantní dle method *Weihrauchových* vyžaduje mnohem více času a práce nežli vypočtění sebe většího počtu konstant. Pro velký počet míst bylo by provedení takové práce velice obtížné.

Následující tabulka B. obsahuje ekvidistantní měsíční hodnoty tepla m', m'_1, m'_2, m'_3 vypočtené vzorcem *Lambert-Besslovým*, dosadíme-li do (II), (II'), ... za $x = 0$, 30^0, 60^0, ... jakož i odchylky a, a_1, ... těchto hodnot od daných hodnot v tab. A.

Tab. B.

	m'	m'_1	m'_2	m'_3	a	a_1	a_2	a_3
Leden	—1·93	—1·92	—2·04	—2·05	—0·14	—0·12	—0·10	—0·10
Únor	0·01	0·08	0·13	0·04	+0·14	+0·11	+0·21	+0·17
Březen	3·07	3·45	3·33	3·33	—0·23	—0·11	—0·12	—0·12
Duben	9·43	9·70	9·75	9·76	+0·13	+0·11	+0·16	+0·14
Květen	14·61	14·81	14·77	14·88	—0·13	—0·15	—0·24	—0·16
Červen	18·48	18·43	18·54	18·52	+0·25	+0·12	+0·11	+0·10
Červenec	19·80	19·89	19·83	19·87	—0·12	—0·11	—0·21	—0·18
Srpen	19·63	19·57	19·76	19·73	+0·12	+0·13	+0·14	+0·11
Září	15·40	15·19	15·20	15·21	—0·02	—0·12	—0·18	—0·16
Říjen	9·95	9·79	9·90	9·80	+0·13	+0·12	+0·14	+0·15
Listopad	3·76	3·55	3·50	3·40	+0·04	—0·08	—0·07	—0·14
Prosinec	0·21	0·22	0·11	0·18	+0·08	+0·11	+0·10	+0·15.

Konstanty vzorce *Lambert-Besslova* byly vypočteny na základě měsíčních průměrů teploty, pro které platí intervall časový $x = 30^0$. Jedná-li se však o ustanovení denních průměrů teploty,*) upraví se vzorec tím způsobem, že se zvětší číselné koefficienty všech členů v poměru sinusu k oblouku $\frac{30}{2}$, $2 . \frac{30}{2}$, $3 . \frac{30}{2}$ ...

Úhel x byl vzat od 15·22 ledna, chceme-li jej počítati od 1. ledna, dosadíme $v_1 - 15^0$ za v_1, dále $v_2 - 30^0$ místo v_2 atd.

K ustanovení denních průměrů teploty počítaných od 1. ledna, upravíme vzorec (II'), jejž pokládáme za nejsprávnější. Dostaneme

*) Viz *Bravais:* „Voyages en Scandinavie“ 1838.

$$(\mathrm{II}'a) \qquad \begin{aligned} y = 9{\cdot}396 &+ 11{\cdot}122 \sin (254^\circ\ 4' + x) \\ &+ 0{\cdot}246 \sin (291^\circ 44' + 2x) \\ &+ 0{\cdot}323 \sin (\ 88^\circ\ 0' + 3x) \\ &+ 0{\cdot}132 \sin (283^\circ 17' + 4x) \\ &+ 0{\cdot}185 \sin (166^\circ 35' + 5x) \\ &+ 0{\cdot}369 \sin (180^\circ\ 0' + 6x). \end{aligned}$$

Pro vzorec tento jest $x = \frac{360^\circ}{365} = 0^\circ 59' 10'' 685$. Chceme-li vypočísti normalný běh prostřední teploty vzduchu v *Praze* ode dne ke dni na základě pozorování 80letých, dosadíme postupně za $x = 0^\circ$, $0^\circ 59' 10'' 685$, $1^\circ 58' 21'' 370$, ...

Abychom ukázali, jaký jest roční normalný postup teploty vzduchu v *Praze*, vypočetli jsme ze vzorce *Lamb.-Besslova* prostřední teplotu pentad a sestavili její hodnoty v tab. C.

Pro pentady jest $x = \frac{360^\circ}{73} = 4^\circ 55' 53'' 425$.

Tab. C.

Leden	3.	8.	13.	18.	23.	28.	
	—1°44	—1°93	—2°17	—2°20	—2°04	—1°71	
Únor	2.	7.	12.	17.	22.	27.	
	—1·23	—0·74	—0·19	0·33	0·79	1·21	
Březen	4.	9.	14.	19.	24.	29.	
	1·64	2·13	2·72	3·46	4·42	5·49	
Duben	3.	8.	13.	18.	23.	28.	
	6·54	7·76	8·93	10·01	11·09	12·02	
Květen	3.	8.	13.	18.	23.	28.	
	12·82	13·57	14·27	14·96	15·65	16·18	
Červen	2.	7.	12.	17.	22.	27.	
	17·00	17·61	18·15	18·59	18·93	19·18	
Červenec	2.	7.	12.	17.	22.	27.	
	19·37	19·53	19·70	19·88	20·07	20·24	
Srpen	1.	6.	11.	16.	21.	26.	31.
	20·36	20·36	20·23	19·88	19·36	18·71	17·89
Září	5.	10.	15.	20.	25.	30.	
	17·03	16·15	15·29	14·48	13·70	12·92	

Říjen	5.	10.	15.	20.	25.	30.
	12·11	11·21	10·22	9·12	7·93	6·73
Listopad	4.	9.	14.	19.	24.	29.
	4·56	4·49	3·55	2·79	2 20	1·71
Prosinec	4.	9.	14.	19.	24.	29.
	1·13	0·92	0·50	0·02	—0·51	—1·04.

Ze vzorce ustanovíme též roční extremy teploty jakož i dobu, v které se objeví prostřední teplota roku.

Připadá minimum	—2°·22	na fasi	15°52′	17. ledna
maximum	20°·40	„ „	212°24′	4. srpna
1. medium	9°·396	„ „	103° 6′	16. dubna
2. medium	9°·396	„ „	287°37′	19. října.

Roční proměna teploty vzduchu v Praze jest 22°·62. Vzdálenost minima od maxima obnáší 199 dní; stoupá tudíž teplota během roku o 33 dni déle nežli klesá. Nejrychleji postupuje v dubnu a v říjnu, nejméně se mění v lednu a v červenci. Doba, kdy se drží teplota nad průměrem celoročním jest 186 dní a jest o 7 dní delší nežli doba, kdy jest teplota nižší nežli celoroční průměrná. Pod nullou nachází se teplota od 20. prosince do 14. února celkem 56 dní.

Stejným způsobem, jak byl tuto sledován na základě mnoholetých pozorování roční běh teploty vzduchu v *Praze*, může býti ustanoven vypočtením konstant i běh ostatních úkazův atmosférických, jestli dostatek dobrých pozorování. Výminku činí jedině denní perioda teploty vzduchu, jež se nedá zcela přesně vyjádřiti vzorcem, jelikož zde způsobuje východ slunce náhlé zahnutí křivky teploměrné.

Porovnáváním konstant vzorce *Lambertova-Besslova* na rozličných místech pozorovacích hleděl *Kämtz**) a v novější době *Wild***) ustanoviti některá pravidla pro tyto konstanty. Zejména shledal *Wild*, že první konstanta stupňová u_1 (II′) se rovná asi poloviční amplitudě roční a první konstanta úhlová v_1 naznačuje přibližně příchod podzimního media a že obě konstanty mají menší hodnoty na místech s polohou přímořskou resp. vysokou

*) Lehrbuch der Meteorologie I. p. 121.

**) Die Temperaturverhältnisse des russischen Reiches p. 246.

nežli na místech s polohou kontinentalní resp. nízkou. Avšak konstanty vzorce nejsou dosud vypočteny pro velký počet míst, takže nelze vzhledem k závislosti jejich na poloze a zeměpisné šířce místa pozorovacího docíliti žádoucích výsledků.

Drobné zprávy z astronomie.

Napsal

dr. **Gustav Gruss.**

Vidma hvězd roztřiďují se nyní dle prof. *Vogla* v následující typy:

Typus I. obsahuje vidma, v nichž čáry Frauenhoferovy velmi jemně se vyskytují neb docela scházejí a části modrá a fialová jasností vynikají;

a) čárky vodíkové jsou široké a zřejmé.

b) „ „ scházejí.

c) „ „ a čárka D_3 jsou světlé. (Posud známé jsou β Lyrae a γ Cassiopejae).

Typus II. obsahuje vidmo s *četnými ostrými* čárami kovovými; část lomivější jest nejasná, v méně lomivé části vystupují někdy slabé pruhy.

a) Četné kovové čáry vynikají v části žluté a zelené.

b) Některé čáry jsou světlé.

Typus III. Vedlé četných tmavých čar vyskytují se četné tmavé pruhy a lomivější část vidma jest nápadně slabá.

a) Pruhy jsou ke straně fialové tmavé a ostře označené, ke straně červené neurčité a nejasné.

b) Pruhy jsou opáčné než předešle.

Dle tohoto rozvrhu započato spektroskopickým prozkoumáním severního nebe v Potsdamu prof. *Voglem* a v Lundu drem. *Dunèrem*. Část pruhu mezi -1^0 a $+20^0$ deklinace jest již uveřejněna. Vidmo všech hvězd až do $7^1/_2$ velikosti (a mimo to mnohých slabších tohoto pruhu) jest zkoumáno. Celkem prozkoumáno posud 4051 hvězd; z těchto 349 hvězd nedá se určitě v žádnou třídu vřaditi;