František Josef Studnička

O algebraickém řešení Youngových rovnic stupně pátého

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 4, 169--174

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122305

O algebraickém řešení Youngových rovnic stupně pátého.

Napsal

prof. Dr. **F. J. Studnička.**

I.

Značí-li n positivní číslo celistvé a

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \tag{1}$$

veličiny buď realné nebo soujemné, představuje výraz

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{2}$$

algebraickou rovnici stupně n-tého. Hodnoty, jež za x dosazeny byvše, levou stranu této rovnice annullují a jichž jest tolik, kolik jednotek obsahuje n, vyjadřují se opět čísly buď realnými nebo soujemnými. Takováta hodnota čili kořen rovnice (2), všeobecně x_k zvaná, jest tedy závislou na číslech řady (1), takže ji možná vyjádřiti obecným tvarem

$$x_k = \mathrm{F}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Značí-li tu F obmezené algebraické spojení veličin v závorkách obsažených, provedené tedy buď sečítáním neb odčítáním, násobením, dělením anebo odmocněním, jest řešení toto *algebraickým*, kdežto v opačném případě, přesahujíc prostředky algebry, sluje *transcendentním*. Algebraicky řešitelnou jest tedy rovnice (2) jenom tehdáž, známe-li pravidlo, kterýmž možná ustanoviti obmezenou algebraickou funkci φ tak, aby

$$\varphi(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = x_k. \tag{3}$$

Pátráme-li v oboru mathematickém po takovýchto pravidlech, přesvědčíme se především, že pro $n = 2$ nebo-li pro rovnice stupně *druhého*

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

platí jednoduchý vzorec

$$x_k = \tfrac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right) = \varphi(a_1, a_2).$$

Podobně shledáme, že rovnici stupně *třetího* a *čtvrtého* možná řešiti tvarem (3), při čemž se stává prostředníkem rovnice stupně o 1 nižšího, v tomto případě tedy třetího, v onom pak druhého, již *Lagrange* nazval *resolventou.*

Jakmile však přijdeme k $n = 5$, změní se poměr resolventy ku předložené rovnici stupně *pátého*; neníť příslušná resolventa, jak dle analogie snad by se soudilo, stupně 4., nýbrž 6., tedy vyššího, nežli jest rovnice daná. Tu tedy všeobecně přestává řešení rovnice (2) tvarem (3) a nastává úkol jiný, jenž jeví se hlavně ve dvou fasích.*)

Buď jsou koëfficienty řady (1) čísla určitá, rovnice (2) tedy číselnou čili *numerickou*, a pak ustanovují se kořeny x_k rozmanitými spůsoby *přibližně* tak přesně, jak si toho právě kdo přeje. Anebo jsou koëfficienty řady (1) čísla sice obecná, avšak zvláštním podmínkám podrobená, že kořeny x_k možná předc vyjádřiti tvarem (3), a pak představuje výraz (2) rovnici *zvláštní*.

Bylo by zajisté zajímavým i vděčným úkolem, *přehledně* vylíčiti rozvoj nauky o rovnicích stupně pátého, ukázati, jak hojné pokusy se tu napřed dály, nežli konečně *Abel* jasně vyložil, že algebraické řešení *všeobecné* není možné, sestaviti četné poučky, týkající se vlastností kořenů, poukázati ke všem geometrickým problemům, s nimiž řešení toto se stýká, a seřaditi konečně všechny výzkumy, ke zvláštním tvarům rovnice stupně 5. se táhnoucí. Bylo by tu třeba probrati a spracovati hojnou literaturu více než-li 100 let posledních objímající, takže by z toho studia povstati mohla dissertace, hodna dvojího doktorátu mathematického.

Vytkneme-li z dlouhé řady badatelů, jež na tomto rozsáhlém poli s větším nebo menším úspěchem pracovali, pouze jména na povrchu plovoucí, obdržíme, majíce zřetel ku pořádku chronologickému, zvučný seznam tento: *Tschirnhaus*, *Euler*, *Malfatti*, *Lagrange*, *Vandermonde*, *Bring*, *Ruffini*, *Abel*, *Galois*, *Jerrard*, *Jacobi*, *Sylvester*, *Hermite*, *Joubert*, *Kronecker*, *Brioschi*, *Jordan*, *Roberts*, *Clebsch*, *Gordan*, *Klein*, *Young* a m. j.

Není naším účelem, abychom blíže se tu zanášeli s obecným řešením vůbec,**) chcemeť jenom seznámiti čtenáře své

*) Řešení pomocí funkcí transcendentních budiž tu mlčením pominuto.

**) Kdo by s podstatou tohoto úkolu se chtěl seznámiti, nechť prostuduje spisy aspoň tyto: *Serret* „Handbuch der höheren Algebra“. Deutsch. von Wertheim. Leipzig, Teubner 1868, a *Klein* „Vorlesungen s nejnovějším zjevem na užším poli tomto, jejž uveřejnil posledně jmenovaný tuto badatel americký o algebraickém řešení zvláštního druhu rovnic stupně *pátého*,*) a to budiž předmětem druhého odstavce našeho.

II.

Jakož patrno, přijde rovnice (2) pro $n = 5$ v

$$x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0, \qquad (4)$$

což jest obecný tvar algebraické rovnice stupně pátého. A ten možná, což *Bring* již v předešlém století dokázal, bez obmezení všeobecnosti převésti na tvar trojčlenný

$$x^5 + p_4 x + p_5 = 0, \qquad (5)$$

v němž jeví se jen dva obecné koëfficienty a sice p_4 a p_5; položíme-li tu pak s *Hermitem*

$$x = \varrho t, \qquad (6)$$

převedeme přiměřenou volbou činitele ϱ tvar (5) na jiný, taktéž trinomický a sice

$$t^5 - t - \mathrm{A} = 9, \qquad (7)$$

kdež hodnota pěti kořenů t_k závisí pouze na jediné stálé A.

Předmětem úvah Youngových bylo pak vyšetřiti, které vlastnosti musí koëfficienty p_4 a p_5 v rovnici (5) míti, aby možná bylo ji řešiti algebraicky, při čemž arci nesnížitelnost stupně jejího předpokládal.

Co byl výsledek jeho badání, sestaveno tuto v několika vzorcích, jež představují takořka recept na řešení zvláštních rovnic, jež po svém pěstiteli mohou býti *Youngovými* jmenovány.

Značí-li A, B libovolná čísla realná, a složíme-li z nich koëfficienty p_4, p_5 tak, aby bylo

$$p_4 = \frac{5\,\mathrm{A}^4\,(3 - \mathrm{B})}{16 + \mathrm{B}^2}, \qquad (8)$$

$$p_5 = -\frac{\mathrm{A}^5\,(22 + \mathrm{B})}{16 + \mathrm{B}^2}; \qquad (9)$$

über das Ikosaëder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.“ Leipzig, Teubner 1884.

*) V pojednání právě mi zaslaném „Solution of Solvable Irreducible Quintic Equations, withoud the aid of a Resolvent Sextic.“ By *George Paxton Young*, University College, Toronto Canada.

značí-li pak λ kořen rovnice stupně čtvrtého

$$\lambda^4 - B\lambda^3 - 6\lambda^2 + B\lambda + 1 = 0,\text{*)} \tag{10}$$

a sestavíme-li z veličin A, B, λ výrazy

$$a = -\frac{\lambda^2+1}{A\lambda(\lambda-1)}, \tag{11}$$

$$\vartheta = -\frac{A^5\lambda(\lambda-1)^2}{(16+B^2)(\lambda+1)(\lambda^2+1)}, \tag{12}$$

vyjádřuje se r jakožto kořen rovnice (5) algebraickým vzorcem

$$r = \vartheta^{\frac{1}{5}} + a\vartheta^{\frac{2}{5}} + \lambda a^2 \vartheta^{\frac{3}{5}} - \lambda a^3 \vartheta^{\frac{4}{5}}. \tag{13}$$

Jakými obraty dokázal *Young* současnou platnost těchto relací, nehodláme zde vykládati, nýbrž podáme ku konci ze šesti příkladů v uvedeném pojednání sestavených dva, aby se jimi postup v počítání na jevo uvedl.

Př. 1. Jestli zvoleno

$$A = 1, \quad B = 0,$$

bude podlé vzorce (8) a (9)

$$p_4 = \frac{15}{16}, \quad p_5 = \frac{11}{8};$$

rovnice stupně pátého (5) promění se v

$$16x^5 + 15x + 22 = 0,$$

---

*) Rovnici tuto možná uvésti na tvar převratný

$$\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) - B\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) - 6 = 0,$$

takže položíme-li tu

$$\lambda - \frac{1}{\lambda} = z, \tag{a}$$

z čehož plyne, zmocníme-li,

$$\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} = z^2 + 2,$$

z rovnice této povstane kvadratická

$$z^2 - Bz - 4 = 0, \tag{b}$$

jejíž *positivní* kořen jest

$$z_1 = \tfrac{1}{2}(B + \sqrt{B^2+16}), \tag{14}$$

načež z rovnice (a) obdržíme

$$\lambda^2 - z_1\lambda - 1 = 0, \tag{c}$$

kdež *positivní* kořen jest

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(z_1 + \sqrt{z_1^2+4}). \tag{15}$$

A tento kořen má *Young* na mysli, ač se o jakosti rovnice (10) a jejím řešení nezmiňuje.

a rovnice (10) stane se přímo kvadratickou pro

$$\lambda^2 = z,$$

jelikož se uvede na tvar

$$z^2 - 6z + 1 = 0,$$

jejíž positivní kořen jest

$$\lambda = \sqrt{3 + \sqrt{8}} = 2\cdot414215.$$

Dále bude dle vzorce (11)

$$a = -\frac{4 + \sqrt{8}}{3 + \sqrt{8} - \sqrt{3 + \sqrt{8}}} = -2,$$

a podle vzorce (12) podobně

$$\vartheta = -0\cdot01294, \text{*)}$$

načež snadno sestavíme řadu hodnot

$$\begin{array}{r}
\vartheta^{\frac{1}{5}} = -0\cdot419194 \\
a\vartheta^{\frac{2}{5}} = -0\cdot351447 \\
\lambda a^2\vartheta^{\frac{3}{5}} = -0\cdot711345 \\
-\lambda a^2\vartheta^{\frac{4}{5}} = +0\cdot596384 \\
\hline
r = -0\cdot885602.
\end{array}$$

Jest tedy jedním kořenem této rovnice

$$r = -0\cdot8856.$$

Př. 2. Učiníme-li v případě druhém

$$A = 1, \quad B = \sqrt{2},$$

bude rovnice (5)

$$18x^5 + 5(3 - \sqrt{2})\,x + 22 + \sqrt{2} = 0$$

a rovnice (10)

$$\lambda^4 - \lambda^3\sqrt{2} - 6\lambda^2 + \lambda\sqrt{2} + 1 = 0,$$

jejíž kořen positivní jest

$$\lambda = \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

jakož pomocí vzorců (14) a (15) snadno se ustanoví. Na to se obdrží, vyhledá-li se příslušná hodnota veličiny a a ϑ,

---

*) V časopise „American Journal of Mathematics“, kdež v VII. sv. Nr. 2. toto pojednání uveřejněno, není 0 před bod desetinný postavena, nýbrž jen bod dole v levo položen, takže na př. $\vartheta = -{}_{\cdot}01294$.

$$\begin{aligned} \vartheta^{\frac{1}{5}} &= -0{\cdot}4469, \\ a\vartheta^{\frac{2}{5}} &= -0{\cdot}3323, \\ \lambda a^2\vartheta^{\frac{3}{5}} &= -0{\cdot}7313, \\ -\lambda a^3\vartheta^{\frac{4}{5}} &= +0{\cdot}5275, \\ \hline r &= -0{\cdot}973. \end{aligned}$$

Poznamenání. Kdybychom chtěli vzorce (8) a (9) obrátiti a vyjádřiti A, B pomocí p_4 a p_5, přišli bychom tu patrně k rovnicím ještě vyšším; nebo dělíme-li, obdržíme

$$\frac{p_4}{p_5} = q = \frac{5(3-B)}{A(22+B)},$$

anebo vyjádříme-li B pomocí A,

$$\frac{qA+5}{5} = \frac{25}{22+B} \quad \text{nebo} \quad B = \frac{15-22\,Aq}{Aq+5},$$

načež ze vzorce (8) bude

$$p_4(16+B^2) = 5A^4(3-B).$$

Jak patrno, jest tu řešení uvedeno na případ ještě složitější, což dle obsahu I. odstavce našeho bylo hned očekávati, takže *Youngovy* rovnice zůstávají jenom *zvláštním* případem, kdež algebraické složení kořene má tvar *Eulerovský.*

Jak se užívá vzorce Lambertova-Besslova v meteorologii.

Napsal

Dr. F. Augustin,

professor v Praze.

Mnozí badatelé pokoušeli se o odvození mathematického vzorce, jímž by mohli vyjádřiti zjevy periodické, v meteorologii se často vyskytující, jako jsou na př. *denní* a *roční* periody atmosferických úkazů, zvláště pak přesně určiti hlavní momenty periodických proměn, *minima, maxima a media.* Ze všech navržených vzorců užívá se nejvíce vzorce *Lambertova-Besslova.*

Tvar tohoto vzorce jest: