Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 4, 189--196

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122302

začne blížiti k zemi. Dříve se vzdalovala od země rychlostí as 20 mil (anglických) za vteřinu.

(Monthly Notices. Vol. 40—43).

Vidmo hvězdy β *Lyrae* (Typus Ic) jest proměnlivé, jak *E. Gotthard* z pozorování dokázal. Jest to první příklad změny vidma u hvězd stálých.

(Astr. Nach. Bd. 111.).

Úlohy.

Řešení úlohy 1.

(Zaslal p. *Ferd. Zuna*, stud. VIII. tř. v Písku.)

Jest-li žádaná funkce $\varphi(x) = u$, má býti dle podmínky

$$u^2 + au + b = x^2 + ax + b,$$

z čehož $$u = x \text{ aneb } u = -(a + x).$$

Při funkci 3. stupně jest

$$u^3 + au^2 + bu + c = x^3 + ax^2 + bx + c$$

čili $$u^3 - x^3 + a(u^2 - x^2) + b(u - x) = 0;$$

odtud pak následuje buď $u = x$

aneb $$u = -\tfrac{1}{2}(a + x \mp \sqrt{a^2 - 4b - 2ax - 3x^2}).$$

Správné řešení zaslali pp.: *Boh. Mašek* ze VI. třídy g. na Novém Městě v Praze, *Josef Svoboda* ze VII. tř. g. v Písku a *Frant. Nušl*, stud. v Jindřichově Hradci.

Řešení úlohy 2.

Dle binomické poučky jest

$$(1-x)^{-n} = \sum_0^\infty (-1)^r \binom{-n}{r} x^r$$

$$(1-x)^{-1} = \sum_0^\infty x^r.$$

Z posledního plyne dle věty polynomické

$$(1-x)^{-n} = [\sum_0^\infty x^r]^{-n} = \sum_0^\infty x^r \, \Sigma \frac{n!}{a!\, b!\, c! \ldots},$$

kdež $a, b, c, \ldots$ rovnicím

$$a + b + c + \ldots = n, \qquad b + 2c + 3d + \ldots = r$$

vyhověti mají. Srovnávajíce to s rovnicí hořejší obdržíme

$$\sum_0^\infty (-1)^r \binom{-n}{r} x^r = \sum_0^\infty x^r \Sigma \frac{n!}{a!\, b!\, c! \ldots},$$

kdež součinitelé téhož x^r na obou stranách jsou si rovny; při $r = m - n$ bude

$$(-1)^{m-n} \binom{-n}{m-n} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(m-1)}{(m-n)!}$$

$$= \binom{m-1}{m-n} = \binom{m-1}{n-1},$$

a tedy

$$\Sigma \frac{n!}{a!\, b!\, c! \ldots} = \binom{m-1}{n-1}$$

za podmínek

$$a + b + c + \ldots = n, \quad b + 2c + 3d + \ldots = m - n.$$

(P. *Václav Šimerka.*)

Poznámka redakce. Pan *Ot. Ježek*, assistent mathematiky při českých vysokých školách technických, stanovil v pojednání: „Ueber das formale Bildungsgesetz der Coeffizienten des Quozienten zweier Potenzreihen“, uveřejněném v zasedacích zprávách kr. č. společnosti nauk v Praze 1884 na základě determinantů formalný zákon, jímž tvořeny jsou koefficienty podílu dvou nekonečných řad. Při tom dospěl této zajímavé věty: „Určíme-li všechna celistvá řešení obou rovnic

$$(1) \qquad \begin{aligned} \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n &= n \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\,\lambda_n &= n, \end{aligned}$$

v platnosti jest rovnice

$$\sum_\mu \frac{(n - \lambda_0^{(\mu)})!}{\lambda_1^{(\mu)}!\, \lambda_2^{(\mu)}! \ldots \lambda_n^{(\mu)}!} = 2^{n-1},$$

při čemž $\lambda_0^{(\mu)}, \lambda_1^{(\mu)}, \ldots, \lambda_n^{(\mu)}$ značí μ-té řešení rovnic (1).“

Řešení úlohy 3.

a) Snadně lze dokázati, že u řady

$$1^n, 2^n, 3^n, 4^n, \ldots$$

rovná se v-tý člen m-té řady rozdílové

$$C_m^v = \sum_0^m (-1)^{m-r} \binom{m}{r} (r+v)^n,$$

prvý člen tedy

$$C^1_m = \sum_0^m (-1)^{m-r} \binom{m}{r} (r+1)^n.$$

Avšak n-tá řada rozdílová má vesměs stejné členy a proto jest $C^1_{n+1} = 0$; z té příčiny obdržíme

$$\sum_0^{n+1} (-1)^r \binom{n+1}{r} (r+1)^n = 0$$

a snížíme-li zde n o jednotku, bude

$$\sum_0^{n} (-1)^r \binom{n}{r} (r+1)^{n-1} = 0$$

při $n > 0$.

b) Poněvadž

$$\binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1} \frac{r+1}{n+1},$$

jde z předešlé rovnice

$$\sum_0^{n} (-1)^r \binom{n+1}{r+1} \frac{r+1}{n+1} (r+1)^{n-1} = 0,$$

tedy

$$\sum_0^{n} (-1)^r \binom{n+1}{r+1} (r+1)^n = 0.$$

(P. *Václav Šimerka.*)

Řešení úlohy 4.

(Zaslal p. *František Jirásek,* stud. VIII. tř. v Broumově.)

Poněvadž se strana kužele rovná součtu poloměrů R a r obou jeho podstav, jest daný plášť $P = \pi(R + r)^2$. Poloměr g koule vepsané bude $g = \sqrt{Rr}$ a poloměr h průseče společné $h = \frac{2Rr}{R+r}$, tedy průseč $q = \frac{4\pi R^2 r^2}{(R+r)^2}$ a povrch koule $p = 4\pi Rr$.

Vzhledem ke vzorcům p, P bude

$$q = \frac{p^2}{4P}, \quad \text{tedy} \quad p = 2\sqrt{Pq} = 18{\cdot}7\ dm^2.$$

Správné řešení zaslali pp: *Jar. Pavlousek* z VIII. třídy v Mladé Boleslavi, *Jos. Novák* ze VII. tř. r. v Hoře Kutné, *Šimon Pokoj* z VIII. tř. a *Frant. Nušl* z V. tř. g. v Jindřichově Hradci, *Ferd. Koláčný* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Boh. Mašek* ze VI. tř. g. na Novém Městě v Praze, *Antonín Pavlík* a *Ferd. Zuna* z VIII. tř. v Písku, *Ant. Klír* a *J. Prokůpek* ze VII. tř.

české v. real. šk. v Praze, *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Jos. Sumr, Frant. Ullrich, B. Tschapek* ze VII. tř. r., *Karel Rajdl* a *Alois Čenský* ze VI. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *Jos. Černovský* ze VI. tř. g. v Příbrami.

Řešení úlohy 9.

(Zaslal p. *Boh. Mašek,* stud. VI. tř. g. na N. Městě v Praze.)

Budiž r poloměr základny, v výška válce, ω odchylka osy od základny; pak jest

$$A = \frac{2rv}{\sin\omega}, \qquad B = 2rv, \qquad C = \pi r^2 \sin\omega,$$

následovně

$$r = \sqrt{\frac{AC}{\pi B}}, \quad v = \frac{B}{2}\sqrt{\frac{\pi B}{AC}}, \quad \sin\omega = \frac{B}{A}.$$

Dosazením hodnot daných v úloze obdržíme:

$$r = 3\,dm, \qquad v = 5\,dm, \qquad \omega = 45^0 35' 5''.$$

Průmět těžiště na základnu má od středu jejího vzdálenost

$$\frac{v}{2}\cos\omega = 2{\cdot}4495\,dm < r;$$

tudíž má válec postavený na základnu polohu stálou.

Tutéž úlohu řešili pp.: *Jos. Černovský* ze VI. tř. g. v Příbrami, *Ferd. Zuna* z VIII. tř. v Písku, *Ant. Klír* a *J. Prokůpek* ze VII. tř. české v. real. šk. v Praze, *Ferd. Koláčný* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Moric Hirsch* z VIII. tř. a *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Josef Novák* ze VII. tř. r. v Hoře Kutné, *Josef Sumr, B. Tschapek* ze VII. tř. r. a *Karel Rajdl, Boh. Müller* ze VI. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze.

Řešení úlohy 10.

(Zaslal p. *J. Karlík;* stud. VII. tř. r. v Karlíně.)

Poloměr základny určen jest rovnicí

$$2r = \sqrt{b^2 - v^2} \pm \sqrt{a^2 - v^2},$$

z které při hodnotách daných obdržíme

$$r_1 = 7\,dm, \qquad r_2 = 2\,dm.$$

Označíme-li obsahy příslušných kuželů K_1, K_2, poloměry koulí vepsaných ϱ_1, ϱ_2 a obsahy těchto koulí L_1, L_2, bude

$$K_1 = \tfrac{1}{3}\pi r_1^2 v = 196\,\pi, \quad K_2 = \tfrac{1}{3}\pi r_2^2 v = 16\,\pi,$$

$$\varrho_1 = \frac{2r_1 v}{a+b+2r_1} = 4, \quad \varrho_2 = \frac{2r_2 v}{a+b+2r_2} = \tfrac{3}{2},$$

$$K_1 : L_1 = 147 : 64, \qquad K_2 : L_2 = 32 : 9.$$

Tutéž úlohu řešili pp.: *Fr. Vejdělek* a *Jos. Novák* ze VII. tř. r. v Hoře Kutné, *Josef Kulhánek* ze VII. třídy r. v Hradci Králové, *Jan Pochobradský*, *Moric Hirsch* z VIII. tř. a *Antonín Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *František Hepnar* z VIII. tř. v Broumově, *Jos. Stehlík* ze VII. tř. g., *Frant. Ullrich*, *Josef Sumr, B. Tschapek* ze VII. tř. r., *Boh. Müller* a *Karel Rajdl* ze VI. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *Jindřich Heineman* z VIII. tř. a *Jar. Pavlousek* ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi, *Fr. Fišer* z VIII. tř. v Roudnici, *Antonín Klír* a *J. Prokůpek* ze VII. tř. české v. real. šk. v Praze, *Bohuslav Mašek* ze VI. tř. g. na Novém Městě v Praze, *Ferd. Zuna, A. Klíma* z VIII. tř., *Josef Svoboda* ze VII. třídy g. v Písku a *Jos. Černovský* ze VI. tř. g. v Příbrami.

Řešení úlohy 11.

(Zaslal p. *Edvard Schwarz*, stud. VIII. tř. v Klatovech.)

Dejme tomu, že zrychlení volného pádu jest g_1, nevolného g_2, pak jest výška pádu

$$s = \tfrac{1}{2} g_1 t_1^2 = \tfrac{1}{2} g_2 t_2^2, \quad \text{tedy} \quad g_1 : g_2 = t_2^2 : t_1^2 .$$

Pro pohybující sílu P při volném a P_2 nevolném pádu jest také $P : P_2 = g_1 : g_2$.

Spojením obou úměr dostaneme

$$P_2 = \frac{t_1^2}{t_2^2} P,$$

napjetí tedy

$$p = P - P_2 = \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2} P.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Josef Svoboda* ze VII. tř. g. v Písku, *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi a *Josef Wierer* z VIII. tř. v Klatovech.

Řešení úlohy 12.

(Podal p. *Ant. Pleskot,* stud. VII. tř. g. v Chrudimi.)

Pohybovala-li se první koule dobu T, jest doba pohybu druhé koule $T - t$, a ježto mezné jejich rychlosti jsou si rovny, jest $c_1 - uT = c_2 - u(T - t)$ čili $c_1 - c_2 = ut$,

tedy $$u = \frac{c_1 - c_2}{t}.$$

Dráha první koule jest pak

$$s_1 = c_1 T - \frac{c_1 - c_2}{2t} T^2,$$

druhé $$s_2 = c_2 (T - t) - \frac{c_1 - c_2}{2t} (T - t)^2,$$

a tedy rozdíl obou

$$s = s_1 - s_2 = \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2)\, t.$$

Správné řešení zaslali pp.: *František Nušl* z V. tř. g. v Jindřichově Hradci, *J. Žák* a *Josef Svoboda* ze VII. tř. g. v Písku, *Edvard Schwarz* z VIII. tř. v Klatovech a *Moric Hirsch* z VIII. tř. v Chrudimi.

Úloha 22.

Řešiti rovnici

$$\cos^{10} x + \sin^{10} x = k,$$

a ustanoviti podmínky realnosti kořenů. Prof. *A. Strnad.*

Úloha 23.

Jaké jest geometrické místo vrcholu trojúhelníka o stálé půdici, vyhovují-li úhly trojúhelníka toho ležící při půdici podmínkám:

a) $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = k,$

b) $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} : \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = k,$

c) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = k,$

d) $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} : \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = k,$

e) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = k,$

kde k jest veličina stálá. *Týž.*

Úloha 24.

Má se ustanoviti obsah čtverce o ellipsu opsaného a dokázati, že čtverec ellipse vepsaný rovná se obsahem obdélníku, jehož vrcholy jsou body, v nichž se strany opsaného čtverce ellipsy dotýkají.

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 25.

Dány jsou v rovině tři přímky a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2; budiž ustanoven bod d tak, aby se vyhovělo úměře

$$\triangle a_1a_2d : \triangle b_1b_2d : \triangle c_1c_2d = \alpha : \beta : \gamma,$$

jsou-li α, β, γ daná čísla.

Týž.

Úloha 26.

V pravoúhlé soustavě dány jsou tři přímky rovnicemi

$$P_i \equiv x \cos \alpha_i + y \sin \alpha_i - p_i = o \quad (i = 1, 2, 3),$$

v nichž $\cos \alpha_i$, $\sin \alpha_i$, p_i jsou hodnoty racionálné.

Budiž dokázáno, že přímky ty omezují racionálný trojúhelník.

Týž.

Úloha 27.

Na parabole má se ustanoviti bod, k němuž příslušný střed křivosti leží na téže křivce.

Týž.

Úloha 28.

Do rovnostranného trojúhelníka vepsány jsou tři oblouky parabolické tak, že každý z nich prochází dvěma vrcholy a dotýká se dvou stran. Paraboly tyto omezují kolem středu trojúhelníka určitý trojúhelník obloukový. V kterém poměru jest ploský obsah jeho k ploše trojúhelníka daného?

Týž.

Úloha 29.

Budiž dokázána věta:

Jsou-li r_1, r_2 poloměry křivosti ellipsy v takových dvou bodech, jimiž procházejí dva sdružené průměry, jest

$$r_1^{\frac{2}{3}} + r_2^{\frac{2}{3}} = \text{const.}$$

Týž.

Úloha 30.

Na přímce, půlící daný úhel α, jest dán bod. Má se položiti bodem tímto přímka tak, aby část její oběma rameny úhlu omezená měla danou délku a.

(Úloha tato jest známá, je-li úhel α pravý). Řed. *Martin Pokorný.*

Úloha 31.

Které číslo o 16 cifrách má tu vlastnost, že přeložíme-li první jeho číslici z levé strany na druhý konec, stane se číslo o polovici větší, a přeloží-li se opět při nově povstalém čísle první číslice z levé strany na druhý konec, číslo to také o polovici se zvětší? *Týž.*

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Dvanáctá výroční zpráva c. k. státního realného gymnasia v Třeboni za školní rok 1884 obsahuje pojednání: *Příspěvek k theorii křivek a ploch stupně druhého.* Napsal prof. *Jos. Kasparides. (14 stran).*

Pojednání to jest pokračováním prací páně spisovatelových, uveřejněných v progr. téhož ústavu z r. 1879. a 1881., jichž předmětem byly otázky, které pan spisovatel takto stilisoval:

1.) *„Za jakých podmínek vytvoří křivka stupně druhého, která se točí kolem přímky mimo její rovinu ležící, plochu stupně 2.?“*

2.) *„Dána-li osa a kterýkoli rovinný průsek točné plochy 2. stupně k ní nakloněný, určiti a sestrojiti plochu samu, totiž její hlavní meridián.“*

Na otázku první odpovídá pan spisovatel:

„Má-li vzniknouti točná plocha stupně druhého, musí průmět osy otáčení na rovinu k ní kolmou ležeti v některé ose průmětu dané křivky 2 st. na tutéž rovinu a lze z vespolné polohy os a ohnisek tohoto průmětu k průmětu osy bezprostředně udati a stanoviti druh plochy, jež otáčením dané plochy, kolem dané osy vznikne.“

Odpověď na druhou otázku zní:

„Meridian M hledané točné plochy P stupně druhého lze považovati a sestrojiti, jakožto orthogonální průmět určitého průseku C (točného) kužele T s T′, dotýkajícího se plochy P dle některé povrchové kružnice K.“

V tomto pojednání užívá pan spisovatel nejprve známé věty: „Každou kuželosečku lze pokládati za rovinný průsek točné plochy kuželové promítnutý na rovinu kružnice z ohniska kuželosečky opsané“ (str. 5.), z níž vyplývá, že kuželosečka