Eduard Weyr

Strojení středů zakřivení trochoid. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 1, 4--8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122301

ony pak *peridromické*,*) ježto se tu hodnoty vracejí k původní platnosti, onde pak postupují o stejné přírůstky dále, při čemž odpovídá obyčejné periodičnosti neboli peridromičnosti zvláštní způsob mnohoznačnosti nekonečné neboli isodromičnost.

Strojení středů zakřivení trochoid.

Napsal

Eduard Weyr.

V rovině buďte dány dvě čáry, dotýkající se v jistém bodě; jedna z nich budiž pevna a druhá nechť se kotalí bez šinutí po první, t. j. nechť se tak pohybuje, by se stále dotýkala pevné čáry a by zároveň oblouky obou čar na sebe applikované měly stejné délky. Libovolný bod roviny, pevně spojený s pohyblivou čarou, opíše pak čáru, která se vzhledem k vytčenému pohybu nazývá trochoidou (kotálnice, roulette).

V této krátké úvaze chci jednoduchým spůsobem odvoditi známé konstrukce normaly a poloměru zakřivení trochoidy.

Za tím účelem pokládejme křivou čáru za limitní tvar čáry lomené, utvořené ze spojivých přímek po sobě jdoucích bodů dané čáry, a to pro ten případ, že se délky spojnic stávají nekonečně malými; patrně lze za příčinou zjednodušení předpokládati, že veškeré tyto spojnice mají délku stejnou.

Vzhledem k tomuto názoru uvažujme o dvou lomených čarách, složených ze stejně dlouhých přímek a jež mají jednu společnou stranu. Uveďme jednu z obou čar v pohyb tím, že ji otočíme kolem jednoho společného vrcholu, až splynou další dvě strany; pak ji opět otočíme kolem nového společného vrcholu až do splynutí dalších dvou stran, atd. Dráha opsaná bodem M, pevně spojeným s pohyblivou čarou, bude se skládati z kruhových oblouků opsaných resp. kolem oněch po sobě jdoucích vrcholů A, B, ... a bude tedy normala dráhy procházeti pří-

---

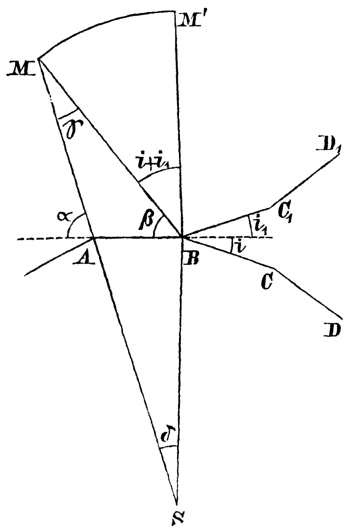
*) Tím by se zavedly výrazy stejného rázu, jako jsou již známé *monodrom* a *polydrom*, jichž někteří mathematikové užívají ve svých výkladech funkčních.

slušným vrcholem, t. j. bodem dotyčným obou čar. Tím získána konstrukce normaly k trochoidě.

Otočení kolem bodu B se děje (viz obr. 1.) o úhel $i+i_1$, tak že dospěje-li bod M do M', máme

$$\widehat{MBM'} = i + i_1 .$$

Přímky AM a BM' jsou sousední normaly dráhy bodu M, a má tedy jich průsečný bod S za limitní polohu střed zakřivení trochoidy.



Obr. 1.

Poloha bodu M vzhledem k pohyblivé čáře buď stanovena délkou $AM = m$ a úhlem α, jejž svírá tato délka se společnou tečnou obou čar. V trojúhelníku MSB platí proporce

$$\begin{aligned} MS : MB &= \sin(i+i_1) : \sin\delta \\ &= \sin(i+i_1) : \sin(i+i_1-\gamma) , \end{aligned}$$

t. j., rozvineme-li druhý sinus,

$$\frac{MB}{MS} = \cos\gamma - \cos(i+i_1)\frac{\sin\gamma}{\sin(i+i_1)} .$$

V limitě má γ hodnotu 0, taktéž $i + i_1$ a tedy

$$\lim \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MS}} = 1 - \lim \frac{\sin \gamma}{\sin (i + i_1)} = 1 - \lim \frac{\sin \gamma}{i + i}.$$

Avšak, značí-li R a R_1 poloměry zakřivení daných čar v jich společném dotyčném bodě A, platí

$$\lim \frac{i}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\mathrm{R}}, \quad \lim \frac{i_1}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\mathrm{R}_1};$$

vzhledem k tomu pišme

$$\frac{\sin \gamma}{i + i_1} = \frac{\sin \gamma}{\mathrm{AB}} \frac{1}{\frac{i}{\mathrm{AB}} + \frac{i_1}{\mathrm{AB}}} = \frac{\sin \beta}{m} \frac{1}{\frac{i}{\mathrm{AB}} + \frac{i_1}{\mathrm{AB}}}$$

a máme

$$\lim \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MS}} = 1 - \frac{\sin \alpha}{m} \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}_1}},$$

to jest

$$\frac{m}{\varrho} = 1 = \frac{\sin \alpha}{m} \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}_1}}, \tag{1}$$

značíme-li ϱ poloměr zakřivení trochoidy opsané bodem M. Toť však formule Eulerova, řešící vytčený úkol.

Při odvození této formule jsme předpokládali, že dané čáry k sobě obracejí ve společném bodě A své vypuklé strany, a že $i + i_1 > \gamma$; kdyby $i + i_1 < \gamma$, tu by bod S zapadl do prodloužené přímky AM a obdrželi bychom obdobně

$$\frac{m}{\varrho} = \frac{\sin \alpha}{m} \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}_1}} - 1. \tag{2}$$

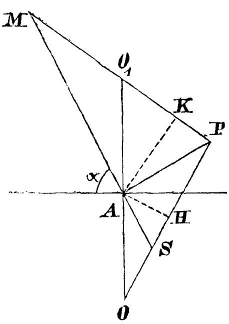
Platí tedy formule (1) neb (2) dle toho, platí-li hořejší nebo dolejší znamení v nerovnosti

$$\frac{i}{\mathrm{AB}} + \frac{i_1}{\mathrm{AB}} \gtrless \frac{\sin \gamma}{\mathrm{AB}} = \frac{\sin \beta}{\mathrm{AM}},$$

t. j. v nerovnosti

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \gtrless \frac{\sin \alpha}{m}\,.$$

Výraz ϱ daný formulí (1) lze snadno sestrojiti. Buďtež (obr. 2.) O a O_1 středy zakřivení pevné a pohyblivé čáry, tedy $\overline{AO} = R$, $\overline{AO_1} = R_1$; vztýčíme-li v bodě A kolmici k přímce AM a označíme-li P průsečík této kolmice s přímkou MO_1, pak protne OP přímku AM ve středu zakřivení S trochoidy.



Obr. 2.

Abychom to ukázali, veďme AK kolmo k MP a položme $\overline{AP} = p$, $\overline{AK} = k$, $\widehat{PAK} = \vartheta$; pak promítnutím délek $\overline{AM}$, $\overline{AP}$, $\overline{AO_1}$ do $\overline{AK}$ obdržíme rovnice

$$m \sin \vartheta = p \cos \vartheta = R_1 \cos(\alpha - \vartheta) = k\,,$$

a tedy

$$R_1 \left(\frac{k}{p} \cos \alpha + \frac{k}{m} \sin \alpha\right) = k,$$

čili

$$\frac{\cos \alpha}{p} + \frac{\sin \alpha}{m} = \frac{1}{R_1}\,.$$

Obdobně plyne, promítáme-li délky $\overline{AP}$, $\overline{AS}$, $\overline{AO}$ do přímky AH vedené kolmo k PO, relace

$$\frac{\sin\alpha}{n} - \frac{\cos\alpha}{p} = \frac{1}{R},$$

v níž jsme literou n označili $\overline{AS}$. Z obou pak sečtením

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right);$$

ježto rovnici (1) lze psáti ve tvaru

$$\frac{1}{\sin\alpha} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) = \frac{\varrho}{m(\varrho - m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{\varrho - m},$$

soudíme, že $n = \varrho - m$ a tedy $\varrho = m + n = \overline{MS}$, čímž konstrukce dokázána.

Bylo by věcí zcela snadnou ukázati, že tato konstrukce má i pro formuli (2) platnost a vůbec v každém případě, nechť je vzájemná poloha daných čar jakákoli, a bod M kdekoli.

O určení geometrických elementů pro dráhy hvězd podvojných.

Podává

Dr. G. Gruss.

Při pohybu hvězd podvojných zdá se nám, že jedna hvězda (průvodce) opisuje kolem druhé hvězdy (hlavní) ellipsu v rovině, jež stojí kolmo k přímce průzorné (směrnici — Visionsradius). Ellipsa ta není *pravou* dráhou, nýbrž vzniká projekcí pravé ellipsy na kouli nebeskou.