Gustav Gruss

O určení geometrických elementů pro dráhy hvězd podvojných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 1, 8--13

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122298`

$$\frac{\sin\alpha}{n} - \frac{\cos\alpha}{p} = \frac{1}{\mathrm{R}},$$

v níž jsme literou n označili $\overline{\mathrm{AS}}$. Z obou pak sečtením

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}_1}\right);$$

ježto rovnici (1) lze psáti ve tvaru

$$\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}_1}\right) = \frac{\varrho}{m(\varrho - m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{\varrho - m},$$

soudíme, že $n = \varrho - m$ a tedy $\varrho = m + n = \overline{\mathrm{MS}}$, čímž konstrukce dokázána.

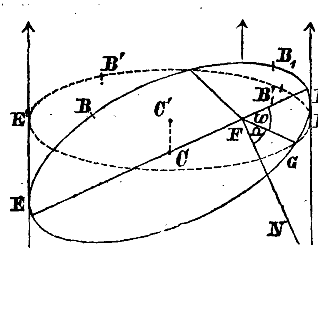
Bylo by věcí zcela snadnou ukázati, že tato konstrukce má i pro formuli (2) platnost a vůbec v každém případě, nechť je vzájemná poloha daných čar jakákoli, a bod M kdekoli.

O určení geometrických elementů pro dráhy hvězd podvojných.

Podává

Dr. G. Gruss.

Při pohybu hvězd podvojných zdá se nám, že jedna hvězda (průvodce) opisuje kolem druhé hvězdy (hlavní) ellipsu v rovině, jež stojí kolmo k přímce průzorné (směrnici — Visionsradius). Ellipsa ta není *pravou* dráhou, nýbrž vzniká projekcí pravé ellipsy na kouli nebeskou.



Budiž F ohnisko pravé ellipsy; proložíme-li bodem F rovinu kolmou k zornici, jejíž směr označen jest šípy, obdržíme v této zdánlivou ellipsu E′E′, jež jest projekcí pravé dráhy — ellipsy EE — nějaké hvězdy podvojné. Středy obou ellips C a C′ leží v témže směru šípy označeném, ohniska ellips však nikoliv.

Jsou-li B, B_1, ... polohy průvodce kolem hlavní hvězdy F v různých dobách, budou B′, B'_1 ... průměty těchto ve zdánlivé ellipsy pro tytéž doby. Z *pozorovaných* vzdáleností (distancí) FB′, FB'_1 ... a z *pozorovaných* úhlů B′FN, B'_1FN, ..., jež tvoří distance FB′, FB'_1 ... se směrem FN kruhu hodinového, kteréžto úhly slovou úhly *posiční*, lze *snadno* sestrojiti ellipsu *zdánlivou.*

Vyskytuje se úloha *určiti z dané ellipsy zdánlivé ellipsu pravou*, t. j. určiti elementy pravé dráhy dvojhvězdy, a to elementy *geometrické* *a*) elementy, jež určují *polohu* dráhy v prostoru, *b)* elementy, jež určují *podobu* a *rozměry* dráhy. Prvé elementy jsou: délka uzlu Ω, t. j. posiční úhel průseku ellipsy pravé se zdánlivou; vzdálenost periastra od uzlu měřená v dráze pravé ω a sklon J dráhy pravé ku dráze zdánlivé. Druhé elementy tvoří výstřednost ellipsy pravé — ε — a veliká poloosa ellipsy pravé – α — (v sekundách). Poněvadž nelze usouditi, která část pravé ellipsy leží *nad* a která *pod* zdánlivou ellipsou, nelze také určiti, zdali G jest uzel výstupný neb sestupný.

Ellipsu zdánlivou (promítnutou — Projectionsellipse) určíme snadným způsobem z daných pozorovaných hodnot: úhlů posičních a distancí a obdržíme takto všeobecnou rovnici

$$\text{(I)} \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 1.$$

Rovnicí touto určíme *geometrické elementy pravé dráhy* jednoduše takto.

a) Osová rovnice ellipsy jest:

$$\text{(1)} \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

kdež α jest velkou poloosou, $\beta = \alpha\sqrt{1-\varepsilon^2}$ malou poloosou a ε výstředností ellipsy.

Položíme-li počátek nových souřadnic pravoúhlých $(x'y')$, rovnoběžných k soustavě souřadnic (xy) do ohniska ellipsy, obdržíme rovnici ellipsy vzhledem k této soustavě:

$$\frac{x'^2}{\alpha^2(1-\varepsilon^2)} + \frac{2\varepsilon x'}{\alpha(1-\varepsilon^2)} + \frac{y'^2}{\beta^2(1-\varepsilon^2)} = 1;$$

aneb zavedeme-li

$$\pi = \alpha(1-\varepsilon^2),$$

obdržíme:

$$(2) \qquad \frac{x'^2}{\alpha\pi} + 2\varepsilon\frac{x'}{\pi} + \frac{y'^2}{\pi^2} = 1.$$

Otočíme-li soustavu souřadnic v ohnisku o úhel ω, obdržíme soustavu souřadnic $(x''y'')$, jež souvisí se soustavou $(x'y')$ rovnicemi:

$$x' = x'' \cos\omega - y'' \sin\omega$$
$$y' = x'' \sin\omega + y'' \cos\omega.$$

Rovnice ellipsy v soustavě $x''y''$ jest pak:

$$(3) \qquad ax''^2 + bx''y'' + cy''^2 + dx'' + ey'' = 1,$$

kdež

$$(4) \qquad \begin{aligned} a &= \frac{\pi\cos^2\omega + \alpha\sin^2\omega}{\alpha\pi^2} \\ b &= \frac{\varepsilon^2}{\pi^2}\sin 2\omega \\ c &= \frac{\pi\sin^2\omega + \alpha\cos^2\omega}{\alpha\pi^2} \\ d &= \frac{2\varepsilon\cos\omega}{\pi} \\ e &= -\frac{2\varepsilon\sin\omega}{\pi} \end{aligned}$$

Ze soustavy rovnic (4) plynou tyto vztahy:

$$(5) \qquad \begin{aligned} de + 2b &= 0 \\ a + c &= \frac{\pi + \alpha}{\alpha\pi^2}. \end{aligned}$$

b) Rovnice:

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y = 1 \tag{6}$$

značí všeobecnou rovnici ellipsy v pravoúhlé soustavě souřadnic, proložených bodem *libovolným*.

Jde-li týmž libovolným bodem nová soustava souřadnic pravoúhlých tak, aby osa x'' svírala s osou x úhel Ω a aby rovina nových souřadnic $x''y''$ svírala s rovinou souřadnic xy úhel J, obdržíme tyto vztahy mezi oběma soustavami:

$$x = x'' \cos\Omega - y'' \sin\Omega \cos \mathrm{J}$$
$$y = x'' \sin\Omega + y'' \cos\Omega \cos \mathrm{J}\ .$$

Hodnoty x a y do rovnice (6) vložené dají tvar rovnice:

$$\mathrm{A}''x''^2 + \mathrm{B}''x''y'' + \mathrm{C}''y''^2 + \mathrm{D}''x'' + \mathrm{E}''y'' = 1. \tag{7}$$

Ellipsa rovnice (6) jest průmětem ellipsy vyjádřené rovnicí (7). Určíme-li dříve libovolný bod nyní *ohniskem* ellipsy a osu x'' přímkou tvořící s velkou osou ellipsy úhel ω, seznáme snadno, že rovnice (7) vyjadřuje ellipsu v soustavě souřadnic pravoúhlých, proložených ohniskem a otočených o úhel ω k ose hlavní. *Rovnice* (7) *jest tudíž identickou s rovnicí* (3). Z toho plynou relace:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}'' &= \mathrm{A}\cos^2\Omega + \frac{\mathrm{B}}{2}\sin 2\Omega + \mathrm{C}\sin^2\Omega &&= a\\
\mathrm{B}'' &= (-\mathrm{A}\sin 2\Omega + 2\mathrm{B}\cos 2\Omega + \mathrm{C}\sin 2\Omega)\cos \mathrm{J} &&= \mathrm{b}\\
\mathrm{C}'' &= (\mathrm{A}\sin^2\Omega - \frac{\mathrm{B}}{2}\sin 2\Omega + \mathrm{C}\cos^2\Omega)\cos^2 \mathrm{J} &&= c\\
\mathrm{D}'' &= \mathrm{D}\cos\Omega + \mathrm{E}\sin\Omega &&= d\\
\mathrm{E}'' &= (-\mathrm{D}\sin\Omega + \mathrm{E}\cos\Omega)\cos \mathrm{J} &&= e.
\end{aligned} \tag{8}$$

Soustava relací (8) obsahuje *jednoduché* řešení úlohy určiti: *z daných veličin* zdánlivé ellipsy (A, B, C, D, E) *geometrické* elementy dráhy pravé: Ω (uzel), J sklon, ω (poloha velké osy vzhledem k přímce uzlové), ε výstřednost a α velkou poloosu ellipsy.

Z prvé rovnice soustavy (5) plyne:

$$de + 2b = \mathrm{D}''\mathrm{E}'' + 2\mathrm{B}'' = 0,$$

aneb

$$\left(-D^2+\frac{E^2}{2}-2A+2C\right)\sin 2\Omega+(4B+DE)\cos 2\Omega=0.$$

Této rovnici vyhovíme, položíme-li

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} -D^2+\frac{E^2}{2}2A+2C &= \frac{\operatorname{tg}^2 J}{\pi^2}\cos 2\Omega \\ 4B+DE &= \frac{\operatorname{tg}^2 J}{\pi^2}\sin 2\Omega. \end{aligned}$$

Rovnice α) dají bezprostředně z daných hodnot A, B, C, D, E hodnotu Ω a $\frac{\operatorname{tg}^2 J}{p^2}$, kdež $\pi = a(1-\varepsilon^2)$.

Kdybychom znali J a π, obdrželi bychom z posledních dvou rovnic soustavy (4) ihned hodnoty ε a ω z rovnic:

$$(\beta)\qquad \begin{aligned} \varepsilon\sin\omega &= -\frac{\pi}{2}(E\cos\Omega - D\sin\Omega)\cos J \\ \varepsilon\cos\omega &= \frac{\pi}{2}(E\sin\Omega + D\cos\Omega). \end{aligned}$$

Hodnotu π obdržíme z rovnice:

$$(\gamma)\qquad \frac{2}{\pi^2}+\frac{\operatorname{tg}^2 J}{\pi^2}=A+C+\frac{1}{4}(D^2+E^2),$$

neboť $\frac{\operatorname{tg}^2 J}{\pi^2}$ jest již z rovnic (α) známo.

Rovnice (γ) plyne ze vztahu:

$$\left(a+\frac{d^2}{4}\right)\cos^2 J+c+\frac{e^2}{4}=(A+C)\cos^2 J+\frac{1}{4}(D^2+E^2)\cos^2 J.$$

Rovnice (α), (β), (γ), jež řeší předloženou úlohu, odvodil nejprve M. *Kovalskij* v Kazani. Vzorce ty sdělil bez důkazu v „Astronomische Nachrichten" č. 2602 svazek 109. p. 157. a 158. professor D. *Dubjago.*

Pro úhel J obdržíme dvojí znamení $\pm$, což dosvědčuje, že jest dvé rovin, jež dané úloze vyhovují; úhel J můžeme tudíž libovolně buď kladně neb záporně voliti. Úhly Ω a ω jsou *jednoznačně* určeny.

Ze soustav rovnic (4) a (8) vyplývá rovněž řešení úlohy *opačné*: z daných elementů geometrických pravé dráhy hvězd podvojných stanoviti zdánlivou dráhu (promítnutou na kouli nebeskou). Řešení úlohy té ponecháváme čtenáři.

O tvaru a hutnosti země.

Píše

dr. V. Láska,

docent v Praze.

V této úvaze pojednáme o tvaru a hutnosti země. Tvar zemský jeví se nám jednak jako těleso geometrické, jednak jako těleso fysikální, jehož tvůrcem a udržovatelem jest síla gravitační. Podoba země podmíněna jest úplně zákonem této síly a lze ji také jediné na základě této síly stanoviti. Pomocí kyvadla a jiných nástrojův, majících za základ zákon Newtonův, lze určiti intensitu a směr síly gravitační v kterémkoliv bodě povrchu zemského a tím i plochu hladinovou.

Vzhledem k zjednodušení úvah jest nezbytná vhodná volba soustavy souřadnic. Nejlépe doporučuje se ona soustava, při kteréž axiálné momenty prvého a druhého stupně mizejí, t. j. kdy učiněno zadost podmínkám:

$$\int x\,dm = 0, \qquad \int y\,dm = 0, \qquad \int z\,dm = 0, \tag{1}$$

$$\int xy\,dm = 0, \qquad \int yz\,dm = 0, \qquad \int zx\,dm = 0. \tag{2}$$

Bod začáteční soustavy souřadnic bude tudíž ležeti v těžišti a osy budou míti polohu hlavních os setrvačnosti.

Značí-li dm element hmoty, bude

$$dm = \Theta dx dy dz, \tag{3}$$

kdež hutnost Θ jest funkcí souřadnic x, y, z.

To předpokládajíce, můžeme psáti potentiál síly gravitační v zevnějším bodu ξ, η, ζ, který ve vzdálenosti e od bodu x, y, z leží,

$$V = k^2 \int \frac{dm}{e} + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)\,\omega^2, \tag{4}$$