František Josef Studnička

O kořenech binomické rovnice stupně sudo-sudého

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 1, 33--41

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122293

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O kořenech binomické rovnice stupně sudo-sudého.

Pro studující napsal

Dr. F. J. Studnička.

K rychlému popularisování pojmu čísla soujemného čili komplexního přispělo zajisté nejvíce grafické řešení tak zvaných rovnic *binomických,* jež představují zvláštní případ rovnic stupně n-tého tvaru

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = 0 ,$$

vyhovují-li součinitelé a_k podmínce

$$a_0 \neq 0 , \quad a_n \neq 0 ,\text{*)}$$

$$a_k = 0 , \quad (k = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots ,\, n-1).$$

Jestli pak ten neb onen aneb obojí nemizející koëfficient buď reální neb soujemný, lze rovnici binomickou uvésti na jednodušší tvar

$$x^n \pm 1 = 0 ,\text{**)}$$

kterýž možná tedy považovati za typický.

---

*) Symbol $\neq$ značí opak rovnosti a čte se „*nerovná se.*“

**) V prvním případě položí se přímo

$$\frac{a_0}{a_n} x^n = z^n ,$$

kdežto v druhém obdrží se napřed

$$\frac{a + bi}{\alpha + \beta i} x^n - 1 = 0 ,$$

což se uvede realisováním jmenovatele na tvar

$$(u + vi) x^n - 1 = 0 ,$$

Úkolem řešení jest tu stanoviti tolik kořenův, kolik jednotek obsahuje číslo n stupeň rovnice značící. A jelikož každý z těchto n kořenů představuje relativně vzatou *jednotku* soujemnou, jichž *místo* jest kružnice poloměru 1, v rovině osou čísel reálních a imaginárních dané, splývá úkol tento s kyklografickým úkolem rozděliti kružnici tuto na n stejných dílův, kterýžto úkol jest nejzajímavějším v případech jednoduchých, kde možná tuto dělbu provésti pomocí kružítka a pravítka.*)

Majíce zde zvláště na mysli vzájemnost kořenů rovnice binomické stupně *sudo-sudého*, tedy rovnice tvaru

$$x^{4n} \pm 1 = 0, \tag{1}$$

uvažme, že levou její stranu možná nahraditi součinem

$$(x^n - 1)(x^n + 1)(x^n - i)(x^n + i),$$

---

a užijeme-li tvaru kanonického pro tento koëfficient soujemný, kladouce tu

$$u + vi = re^{i\varrho},$$

obdržíme konečně pomocí substituce

$$z^n = x^n re^{i\varrho}$$

vytčený dříve tvar typický.

Ostatně možná i obráceně postupovati a napřed si zjednati

$$x^n - \frac{\alpha + \beta i}{a + bi} = 0,$$

z čehož se pak obdrží

$$x^n - (u_1 + v_1 i) = 0,$$

takže konečně se přijde k

$$x = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\frac{\varrho + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varrho + 2k\pi}{n}\right].$$

*) Jednoduchým stává se provedení toto, jestli n číslo *kmenné* tvaru $2^m + 1$, jakož ukázal *Gauss* svým rozdělením kružnice na 17 stejných dílů. Viz *Gauss* „Disquisitiones arithmeticae", kdež autor na svém výtisku poznamenal „Circulum in 17 partes divisibilem esse geometrice, deteximus 1796 Mart. 30.", anebo *Serret* „Handbuch der höheren Algebra" II. pag. 434 et seqq. Viz ještě *Abel,* Crellés Jour. Bd. IV., 2., 5., 131., kdež se jde dále.

takže kořeny její obdržíme řešením čtyř nižších rovnic binomických a to tvaru

$$x^n - 1 = 0, \tag{2}$$
$$x^n + 1 = 0, \tag{3}$$
$$x^n - i = 0, \tag{4}$$
$$x^n + i = 0, \tag{5}$$

kteréž možná provésti vesměs pomocí vzorce Moivre-ova

$$(\cos\varrho + i\sin\varrho)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\varrho + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varrho + 2k\pi}{n} = e^{i\frac{\varrho + 2k\pi}{n}},$$

kdež k značí libovolné číslo *celistvé* a tedy výraz tento poskytuje pouze n různých hodnot kořenových.

A tu bude v případě *prvém* pro $\varrho = 0$, zavedeme-li kratší označení

$$\alpha = \frac{i\pi}{n}, \quad \text{takže } e^{2n\alpha} = 1,$$

řešení rovnice (2) vyjádřeno vzorcem

$$(1)^{\frac{1}{n}} = \varepsilon_k = e^{2k\alpha}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

označíme-li jednotlivé kořeny symbolem ε_k. Představujíce geometrickou řadu, mají za součet, jakož známo i odjinud přímo,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k = \frac{e^{2n\alpha} - 1}{e^{2\alpha} - 1} = 0,$$

z čehož pak plyne, vrátíme-li se k původnímu výrazu pro α,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{2k\pi}{n} = 0, \quad \Sigma \sin\frac{2k\pi}{n} = 0. \tag{6}$$

A poněvadž tu platí současně

$$\varepsilon_k = e^{2k\alpha},$$
$$\varepsilon_{n-k} = e^{(2n-2k)\alpha} = e^{2n\alpha} . e^{-2k\alpha} = e^{-2k\alpha},$$

poznáváme, že tyto kořeny jsou rázu sdruženého neboli konjugovaného*), takže značí-li se symbolem

*) Viz *Studnička* „Algebra pro vyšší třídy škol středních“ pag. 62.

$$\mathrm{K}u = a - bi$$

číslo konjugované s číslem

$$u = a + bi,$$

o nich platí všeobecně, sudému a lichému n přiměřeně,

$$\varepsilon_{n-k} = \mathrm{K}\varepsilon_k. \qquad (7)$$

Podobně obdržíme v případě *druhém* pro $\varrho = \pi$ vzorec

$$(-1)^{\frac{1}{n}} = \varepsilon_k' = e^{(2k+1)\alpha}, \quad (k = 0\ 1, 2, \ldots, n-1),$$

takže i tu jest součet geometrické řady soustavou těchto kořenů dané

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k' = e^{\alpha}\frac{e^{2n\alpha}-1}{e^{2\alpha}-1} = 0,$$

což vede ku poznání, že i

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{2k+1}{n}\pi = 0, \quad \Sigma \sin\frac{2k+1}{n}\pi = 0. \qquad (8)$$

A poněvadž tu platí současně

$$\varepsilon_k' = e^{(2k+1)\alpha},$$
$$\varepsilon_{n-k-1}' = e^{(2n-2k-1)\alpha} = e^{-(2k+1)\alpha},$$

jeví se i zde vzájemná sdruženost, vyjádřená vzorcem

$$\varepsilon_{n-k-1}' = \mathrm{K}\varepsilon_k'. \qquad (9)$$

Abychom řešili rovnici (4), položme $\varrho = {}^1/_2\pi$, načež obdržíme

$$(i)^{\frac{1}{n}} = \varepsilon_k'' = e^{(4k+1)\alpha}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

zavedeme-li kratší označení

$$\alpha = \frac{i\pi}{2n}, \quad \text{takže } e^{4n\alpha} = 1.$$

Součet kořenů těchto, představujících řadu geometrickou, vyjadřuje vzorec

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k'' = e^{\alpha}\frac{e^{4n\alpha}-1}{e^{4\alpha}-1} = 0,$$

takže se zřetelem k významu veličiny α obdržíme taktéž

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{4k+1}{2n}\pi = 0, \quad \Sigma \sin\frac{4k+1}{2n}\pi = 0. \tag{10}$$

Avšak *sdruženost dříve vytčená se tu nevyskytuje.*

Podobně obdržíme pro $\varrho = {}^3/_2\pi$ co řešení rovnice (5) vzorec

$$(-i)^{\frac{1}{n}} = \varepsilon_k''' = e^{(4k+3)\alpha}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

kdež součet všech kořenů jest

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k''' = e^{3\alpha}\frac{e^{4n\alpha}-1}{e^{4\alpha}-1} = 0,$$

z čehož plyne

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{4k+3}{2n}\pi = 0, \quad \Sigma \sin\frac{4k+3}{2n}\pi = 0. \tag{11}$$

A protože tu současně platí

$$\varepsilon_{n-k-1}''' = e^{(4n-4k-1)\alpha} = e^{4n\alpha}.\, e^{-(4k+1)\alpha} = \mathrm{K}\varepsilon_k'', \tag{12}$$

$$\varepsilon_{n-k-1}'' = e^{(4n-4k-3)\alpha} = e^{4n\alpha}.\, e^{-(4k+3)\alpha} = \mathrm{K}\varepsilon_k''', \tag{13}$$

poznáváme, že kořeny rovnice (4) a (5) jsou *na vzájem* sdružené neboli konjugované.

Abychom tyto výsledky krátce přehlédli, zaveďme pro α stejný význam, kladouce

$$\alpha = \frac{\pi}{n} i,$$

načež budou kořenové soustavy rovnic našich vyjádřeny vzorci

$$e^{2k\alpha}, \quad e^{(2k+1)\alpha}, \quad e^{1/_2(4k+1)\alpha}, \quad e^{1/_2(4k+3)\alpha}, \tag{14}$$

budou však po sobě následovati v řadě

$$\varepsilon_k, \quad \varepsilon_k'', \quad \varepsilon_k', \quad \varepsilon_k''',$$

takže body na kružnici poloměru 1 svou polohou je znázorňující rozestaveny budou v tomto pořádku, počínajíc bodem ε_0, ležícím na ose čísel reálních.

Zároveň tu patrno z výrazův (14), že při dělení kružnice na n stejných dílů směrem běhu ručičky hodinkové protivným od tohoto bodu ε_0 počínajíc poskytne n bodů pro soustavu kořenů rovnice (2), takže otočením této soustavy bodův o úhel

$$\frac{\pi}{n}, \quad \frac{\pi}{2n}, \quad \frac{\pi}{3n}$$

rovnice (4), (3), (5)

dojde svého grafického řešení.

Soustava bodův, řešících svou polohou rovnice (2) a (3), poskytovati bude dvojice bodů položených symmetricky k ose čísel reálních, sdružené neboli konjugované hodnoty kořenové takto představujíc; soustava pak bodů svou polohou rovnici (4) a (5) řešících obsahovati bude podobné dvojice na vzájem, avšak i dvojice bodů položených symmetricky k ose čísel imaginárních, jež bychom nazvati mohli, chtíce zjev tento zvláště vytknouti symbolem, poddružené neboli subjugované. Značí-li totiž

$$u = bi + a,$$

učiňme

$$\mathrm{S}u = bi - a = -\mathrm{K}u, \text{*)}$$

kdež symbol S jest tedy obdobou dříve zde uvedeného K, takže tu bude, znásobíme-li,

$$u\mathrm{S}u = -(a^2 + b^2) = -\mathrm{N}u,$$

značí-li symbol N normu čísla soujemného u.**) Podlé toho by o našich kořenech subjugovaných platilo

$$\mathrm{S}e^{m\alpha} = e^{(\pi - m\alpha)} = -e^{-m\alpha},$$

čemuž soustava ε''_k i ε'''_k pro zvláštní hodnoty přípony k vyhovuje. Při tom vyskytuje se, jestli

*) Pro tuto jednoduchost nebyl ustálen žádný nový symbol, takže tuto jen co příklad se uvádí.

**) Viz *Studnička* „Algebra pro vyšší třídy škol středních" pag. 62.

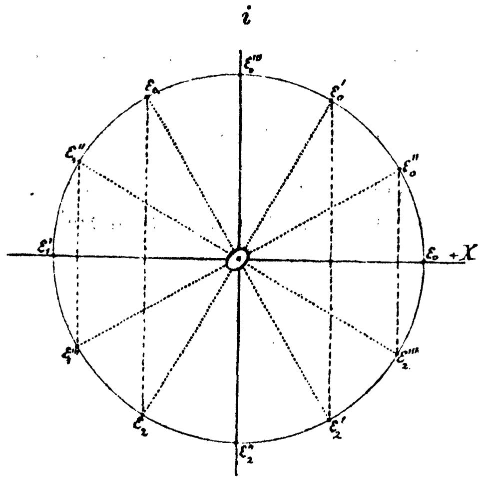
$$n = 4k + 1, \quad \text{kořen } \varepsilon'' = i, \quad \varepsilon''' = -i,$$
$$n = 4k + 3, \quad \text{„} \quad \varepsilon'' = -i, \quad \varepsilon''' = i,$$

jakož se z příslušných vzorců snadno pozná.

Abychom jednotlivosti tyto blíže ještě objasnili, zvolme pro n určitou hodnotu a to číslo liché 3 a sudé 4, čímž ukládáme si řešiti rovnice

$$x^{12} - 1 = 0 \quad \text{a} \quad x^{16} - 1 = 0.$$

Značí-li pak na vedlejších obrazcích OX osu čísel reálních, takže Oi jest příslušnou osou čísel imaginárních, rozdělme



bodem ε_0 počínajíc celou kružnici na 12 (16) stejných dílův; a tu bude polohou svou značiti hodnotu kořene příslušné rovnice

(2)	bod	ε_0,	ε_1,	ε_2	ε_3 *)
(4)	„	ε_0',	ε_1',	ε_2'	ε_3'
(3)	„	ε_0'',	ε_1'',	ε_2''	ε_3''
(5)	„	ε_0''',	ε_1''',	ε_2'''	ε_3'''.

Zároveň tu poznáváme, že u rovnice prvé platí

*) Soustava bodů ε_k přijde v soustavu ε_k'', ε_k', ε_k''', převedeme-li osu OX přiměřeným otočením do polohy OX'', OX', OX''', jakož na obraze druhém i naznačeno.

$$\varepsilon_0'' = S\varepsilon_1'', \quad \varepsilon_2'' = -i$$
$$\varepsilon_1''' = S\varepsilon_2''', \quad \varepsilon_0''' = i.$$

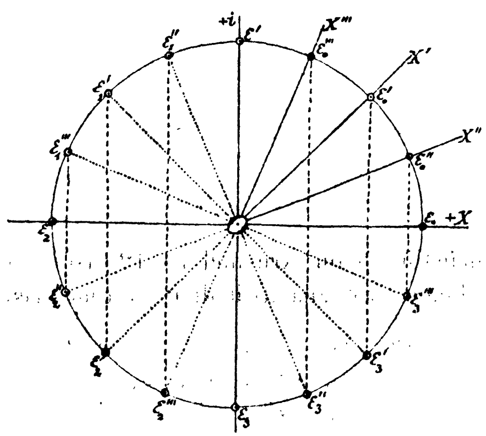
kdežto u rovnice druhé jest

$$\varepsilon_0'' = S\varepsilon_1''' = K\varepsilon_3'''$$
$$\varepsilon_0''' = S\varepsilon_1'' = K\varepsilon_3'' \text{ a t. d.}$$

Konečně budiž ještě poznamenáno, že v soustavě kořenů našich rovnic binomických rozeznávati možná dvojice, znázorněné body, položenými symmetricky k oběma osám, vyjádřené tedy hodnotami stejně velkými, ale opačně označenými, takže symbol KS současně tu platný mění se v pouhé znamení — a jest význačným pro body *protilehlé*. I jest na př.

v případě prvém $\varepsilon_0'' = -\varepsilon_1'''$, $\quad \varepsilon_1'' = -\varepsilon_2'''$,
v případě druhém $\varepsilon_0'' = -\varepsilon_2''$, $\quad \varepsilon_0''' = -\varepsilon_2'''$.

Abychom se zmínili též o číselném řešení takovýchto rovnic, uvádíme na mysl tabulky, obsahující poměrné délky sinusův a



kosinusův*); z nich možná přímo vyhledati ty veličiny, jimiž kořeny dříve uvedené jsou vyjádřeny, načež sestavení jich

*) Viz *Studnička* „Kapesní tabulky logarithmické“ VI. vyd. pag. 40 et seqq.

v čísla soujemná složení vzorcem daného nečiní žádných obtíží. Všech 12 kořenů naší rovnice vyjádřilo by se takto:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= 1,\\
\varepsilon_0'' &= \cos 30^0 + i \sin 30^0,\\
\varepsilon_0' &= \cos 60 + i \sin 60 = \sin 30 + i \cos 30,\\
\varepsilon_0''' &= i,\\
\varepsilon_1 &= -\cos 60 + i \sin 60 = S\varepsilon_0',\\
\varepsilon_1'' &= -\cos 30 + i \sin 30 = S\varepsilon_0'',\\
\varepsilon_1' &= -1 = S\varepsilon_0,\\
\varepsilon_1''' &= -\cos 30 - i \sin 30 = -\varepsilon_0'';\\
\varepsilon_2 &= -\cos 60 - i \sin 60 = -\varepsilon_0',\\
\varepsilon_2'' &= -i = K\varepsilon_0''',\\
\varepsilon_2' &= \cos 60 - i \sin 60 = K\varepsilon_0',\\
\varepsilon_2''' &= \cos 30 - i \sin 30 = K\varepsilon_0'',
\end{aligned}
$$

z čehož patrno, že třeba znáti pouze

$$\sin 30 = {}^1/_2, \qquad \cos 30 = {}^1/_2 \sqrt{3} = 0{\cdot}8660254\ldots,$$

aby se číselně sestavily všechny kořeny této rovnice, jichž součet rovná se nulle, takže přesvědčivše se o tom, seznali jsme i správnost výrazů těchto.

Ze všeho, co tuto bylo vyloženo o vyjádření kořenů rovnic binomických, jde zároveň zřejmě na jevo, že zavedením čísel soujemných, skládajících se z části realní a z části imaginární*), poskytnut algebře velmi vítaný a důležitý prostředek, rozeznávati a vyjadřovati kořeny nejen positivní (verae) a negativní (falsae), nýbrž i nemožné (impossibiles), smyšlené, ba nesmyslné (imaginariae), takže již *Descartes* směl tvrditi „caeterum radices tum verae quam falsae non semper sunt *reales*, sed aliquando tantum *imaginariae*“, čímž tato protiva do algebry zavedena a během času k nynějšímu významu přivedena.

---

*) Ibid. pag. 15.