Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Ladislav Seifert

Poznámky o kubické involuci na elipse

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. 3-4, 104--118

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122292

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1941

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Poznámky o kubické involuci na elipse.

L. Seifert, Brno.

(Došlo dne 27. února 1941.)

Kubická involuce na elipse

$$x = a \cos \Theta, \; y = b \sin \Theta$$

je dána rovnicí

$$t^3 - \varphi_1 t^2 + \varphi_2 t - \varphi_3 = 0,$$

kde $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Theta$ je parametr bodu na elipse a φ_i $(i = 1, 2, 3)$ jsou lineární funkce parametru λ. Ve svém článku „Drobnosti z geometrie" uveřejněném v roč. 45 Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky ukazuje M. Lerch, že kružnice opsané trojinám involuce probíhají řadu druhého stupně, jejich středy vyplňují kuželosečku a kružnice obalují bicirkulární křivku čtvrtého stupně. Při tom zůstávají kolmé k téže kružnici či patří témuž trsu. Autor dává rád a s prospěchem přednost parametru komplexnímu $z = e^{i\Theta}$, který s parametrem t souvisí jednoduchou relací

$$t = i \frac{1 - z}{1 + z}.$$

Obráceně levou stranu rovnice bicirkulární křivky $F(x, y) = 0$ lze nekonečně mnoha způsoby psáti ve tvaru

$$F(x, y) \equiv \Phi^2(x, y) - G(x, y) \,.\, H(x, y),$$

kde Φ, G, H jsou výrazy druhého stupně. $G = 0$ je kuželosečka, která se křivky $F = 0$ dotýká ve čtyřech bodech na $\Phi = 0$. Křivka připouští obecně čtyři analagmacie a lze ji čtyřmi způsoby vytvořiti jako obálku kvadratické řady kružnic

$$K_0 + 2\lambda K_1 + \lambda_2 K_2 = 0.$$

Tyto kružnice vytínají na kuželosečce $G = 0$ čtveřiny bodové a jejich souhrn se rozpadá v kubickou involuci a projektivní s ní řadu bodovou, případně na dvě involuce kvadratické spolu promětné.[1]) Jako příklad uvádí M. Lerch v citovaném článku involuci

[1]) M. Lerch, Časopis **45**, str. 386.

tvořenou vrcholy Steinerových trojúhelníků (t. j. trojúhelníků maximálního obsahu vepsaných do elipsy) a involuci pat normál spuštěných z bodů na elipse. V pozůstalosti prof. M. Lercha nalezl jsem poznámku zřejmě se vztahující k citovanému článku, kde uvádí, že výsledky o kubických involucích mohou vésti k zajímavým důsledkům v případě, že bicirkulární křivka se rozpadá ve dvě kružnice, a ukazuje na případ, kde jedná se o kružnici opsanou elipse nad velkou osou a vepsanou nad malou osou. Tato poznámka mě pohnula k sepsání tohoto článku. Nejprve demonstruji obecnou úvahu na křivce bicirkulární dvakrát symetrické, pak uvádím případ, kdy se křivka rozpadá v kružnice nad osami a případ poněkud obecnější, kdy druhá kružnice je nahrazena obecnou kružnicí dvakrát se dotýkající elipsy. Ukazují se četné zajímavé konstruktivní detaily.

I.

Buď dána křivka

$$F(x, y) \equiv (x^2 + y^2 - m)^2 - 4\,(a_1{}^2x^2 + b_1{}^2y^2) = 0, \tag{1}$$

jež patří mezi t. zv. Perseovy spiriky a předpokládejme a_1, b_1, m reálné kladné, $a_1{}^2 > b_1{}^2$. Křivka má dvě osy symetrie Ox, Oy a dvě analogmacie a skládá se ze dvou oválů, vnějšího a vnitřního (obr. 1). Její vrcholy (průsečíky s osami) jsou

$$(\varepsilon a_1 \pm \sqrt{a_1{}^2 + m},\, 0),\ (0,\, \varepsilon b_1 \pm \sqrt{b_1{}^2 + m})\ (\varepsilon = \pm 1).$$

Jedna analagmacie má střed O, mocnost $-\,m$ a deferentu

$$\frac{p^2}{a_1{}^2} + \frac{q^2}{b_1{}^2} = 1, \tag{2a}$$

druhá analagmacie má rovněž střed O, mocnost $+\,m$ a deferentu

$$\frac{p^2}{a_1{}^2 + m} + \frac{q^2}{b_1{}^2 + m} = 1. \tag{2b}$$

Elipsa E s poloosami $a = a_1 + \sqrt{a_1{}^2 + m}$, $b = -\,b_1 + \sqrt{b_1{}^2 + m}$ (obr. 1) má s křivkou F dotyk ve čtyřech vrcholech a velmi snadno lze verifikovati rozklad

$$F(x, y) \equiv E \,.\, H - \Phi^2, \tag{3}$$

kde

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1,\ H \equiv a^2x^2 + b^2y^2 - m^2,\ \Phi \equiv \frac{a^2 - b^2}{ab}\,xy.$$

Napišme teď rovnici obecné kružnice, která má střed na deferentě D (2a) a má k bodu O mocnost $-\,m$. Střed její jest

$$S: \quad p = a_1 \cos \Theta,\ q = b_1 \sin \Theta,$$

anebo, zavedeme-li parametr $t = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Theta$,

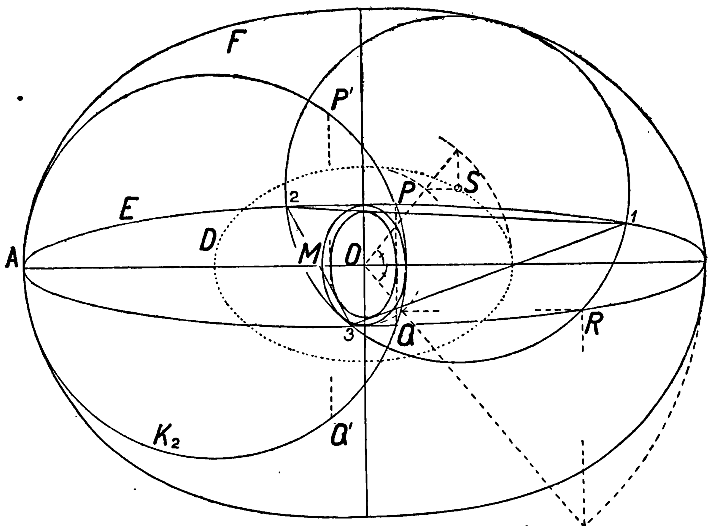
$$p = a_1 \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad q = b_1 \frac{2t}{1 + t^2};$$

vychází pak rovnice tvaru

$$K_0 + 2K_1 t + K_2 t^2 = 0, \tag{4}$$

kde

$$K_0 \equiv x^2 + y^2 - 2a_1 x - m, \; K_1 = - 2b_1 y, \; K_2 \equiv x^2 + y^2 + 2a_1 x - m.$$



Obr. 1

Obálka kružnic (4), jak snadno zjistíme, je identická s křivkou (1) a má teď tvar

$$K_0 \, . \, K_2 - K_1^2 = 0. \tag{5}$$

Pišme v rovnici (4) $t = \gamma + \mu$ a dostaneme pro tutéž řadu kružnic

$$\overline{K}_0 + 2\gamma \overline{K}_1 + \gamma^2 \overline{K}_2 = 0,$$

kde

$$\overline{K}_0 = K_0 + 2\mu K_1 + \mu^2 K_2, \; \overline{K}_1 = K_1 + \mu K_2, \; \overline{K}_2 = K_2;$$

opět jest

$$F(x, y) \equiv \overline{K}_0 \, . \, \overline{K}_2 - \overline{K}_1^2 = 0,$$

ale $\overline{K}_0$ je teď obecná kružnice řady (4). Z identity

$$\overline{K}_0 \overline{K}_2 - \overline{K}_1^2 \equiv EH - \Phi^2$$

jde, že průsečíky kružnice $\overline{K}_0 = 0$ s elipsou $E = 0$ splňují jednu nebo druhou z rovnic

$$\overline{K_1} \pm \Phi = 0,$$

t. j.

$$K_1 + \Phi + \mu K_2 = 0 \text{ nebo } K_1 - \Phi + \mu K_2 = 0,$$

neb rozepíšeme-li a píšeme-li λ místo μ

$$\begin{aligned} y\left(2b_1 - \frac{a^2 - b^2}{ab}\,x\right) + \lambda\,(x^2 + y^2 + 2a_1x - m) &= 0, \\ y\left(2b_1 + \frac{a^2 - b^2}{ab}\,x\right) + \lambda\,(x^2 + y^2 + 2a_1x - m) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Oba svazky mají dva základní body společné, t. j. $y = 0$, $K_2 = 0$ čili $A\,(-a, 0)$, $M\,(a_1 - \sqrt{a_1^2 + m}, 0)$. První leží na elipse E. Další dva základní body prvního svazku P, Q jsou průsečíky přímky

$$2b_1 - \frac{a^2 - b^2}{ab}\,x = 0 \text{ s kružnicí } K_2 \equiv x^2 + y^2 + 2a_1x - m = 0$$

a lze snadno zjistiti, že jsou opět na elipse E. Druhý svazek má pouze jeden základní bod A na E, další dva P', Q' mimo E a vytíná tedy na E trojiny kubické involuce, kdežto prvý svazek vytíná jednoduchou řadu bodovou.

Abychom došli k parametrickému vyjádření involuce, pišme $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ a položme $\cos\vartheta = \dfrac{2bb_1}{a^2 - b^2}$, takže body P, Q mají souřadnice $x = a\cos\vartheta$, $y = \pm\, b\sin\vartheta$. Výraz

$$K_2 \equiv x^2 + y^2 + 2a_1x - m = (a^2 - b^2)\cos^2\varphi + 2aa_1\cos\varphi + b^2 - m$$

vymizí pro $\varphi = \vartheta$ a lze jej tedy psáti, klademe-li $a^2 - b^2 = c^2$,

$$(\cos\varphi - \cos\vartheta)\,[c^2\,(\cos\varphi + \cos\vartheta) + 2a_1a].$$

Tento výraz vymizí i pro bod $A\,(-a, 0)$, t. j. $\varphi = \pi$, jinak $c^2\,(-1 + \cos\vartheta) + 2aa_1 = 0$ a lze jej tedy napsati:

$$K_2 \equiv c^2\,(\cos\varphi - \cos\vartheta)\,(1 + \cos\varphi). \tag{7}$$

Parametry proměnlivých průsečíků svazků (6) s elipsou E hoví relacím

$$(\cos\vartheta \mp \cos\varphi)\sin\varphi + \lambda\,(\cos\varphi - \cos\vartheta)\,(1 + \cos\varphi) = 0,$$

čili po rozdělení a redukci

$$\lambda = \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \lambda\operatorname{tg}\frac{\varphi + \vartheta}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi - \vartheta}{2} = 0; \tag{8}$$

φ_0 je anomalie bodu R jednoduché řady, φ je anomalie bodu kubické involuce. Pišme pro krátkost $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = t$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta = k$; rovnice kubické involuce je pak

$$k^2t^3 - t + \lambda (t^2 - k^2) = 0. \tag{8a}$$

Jsou-li f_1, f_2, f_3 základní symetrické funkce kořenů t_1, t_2, t_3, jest

$$k^2f_1 = -\lambda, \; k^2f_2 = -1, \; f_3 = \lambda; \tag{9}$$

vyloučením λ dostaneme charakteristické rovnice naší kubické involuce

$$k^2f_1 + f_3 = 0, \; f_2 = -\frac{1}{k_3}, \tag{10}$$

z čeho

$$f_1 = f_2 \cdot f_3.$$

Geometrický význam této relace jest, že normály elipsy E sestrojené v bodech jedné trojiny involuce procházejí týmž bodem.[2])

Trojina bodů uvažované kubické involuce stanoví trojúhelník a jeho strany se opět dotýkají kuželosečky s osami Ox, Oy a konstruktivně se snadno určí z trojúhelníků, jejichž jeden vrchol padne do vrcholu elipsy. Její rovnici dostaneme, uvážíme-li, že plückerovské souřadnice spojnice (t_1, t_2) jsou

$$u = \frac{t_1t_2 - 1}{a\,(t_1t_2 + 1)}, \quad v = -\frac{t_1 + t_2}{b\,(t_1t_2 + 1)},$$

její rovnice

$$\frac{x}{a}(t_1t_2 - 1) - \frac{y}{b}(t_1 + t_2) + t_1t_2 + 1 = 0. \tag{11}$$

Vyloučíme-li z rovnic (10) a (11) veličiny $t_1 + t_2$, t_1t_2, t_3, dostaneme rovnici obálky ve tvaru

$$\left(\frac{1 + k^2}{1 - k^2}\right)^2 \frac{x^2}{a^2} + \frac{1 + k^2}{4k^2\,(1 - k^2)} \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{12}$$

Použijeme-li vzorců uvedených v Lerchově práci pro střed kružnice opsané trojině bodů na elipse,[3]) dostaneme snadno

$$S : x_s = a_1 \cos \varphi_0, \; y_s = -b_1 \sin \varphi_0;$$

středu S kružnice na deferentě D patří tedy anomalie $\Theta = -\varphi_0$, znaménkem různá od anomalie bodu R jednoduché řady na elipse E (který doplňuje trojinu kubické involuce).

Bod $R(\varphi_0)$ koncyklický s trojinou involuce má za diametrálně protilehlý bod $\pi + \varphi_0$ a dle známé věty Joachimsthalovy normála jeho jde průsečíkem normál sestrojených v trojině involuce.

Zaveďme do charakteristických rovnic (9) veličiny ϑ a φ_0 dle

---

[2]) Lerch, l. c. str. 160.
[3]) Lerch, l. c. str. 385.

rovnic $\lambda = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi_0$, $k^2 = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\vartheta$ a dostaneme

$$f_1 = -\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{\vartheta}{2},\ f_2 = -\operatorname{cotg}^2\frac{\vartheta}{2},\ f_3 = \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}.$$

Připojme k bodům t_1, t_2, t_3 ještě bod $t_0 = -\frac{1}{\lambda} = -\operatorname{cotg}\frac{\varphi_0}{2}$, takže normály všech čtyř bodů jdou týmž bodem. Označme dále symetrické funkce parametrů t_1, t_2, t_3, t_0 písmeny g_1, g_2, g_3, g_4; po snadném výpočtu máme

$$g_1 + g_3 = 2\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}\cdot\frac{\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0},\ g_1 - g_3 = -\frac{2}{\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\sin\varphi_0}.$$

Dle formulek pro průsečík normál[4])

$$x = \frac{c^2}{a}\cdot\frac{g_1+g_3}{g_1-g_3},\ y = -\frac{4c^2}{b}\cdot\frac{1}{g_1-g_3}$$

vychází v našem případě

$$x = -\frac{c^2}{a}\cos\vartheta\cos\varphi_0,\quad y = \frac{2c^2}{b}\sin^2\frac{\vartheta}{2}\sin\varphi_0. \tag{13}$$

Průsečík normál v trojinách involuce opisuje tedy opět elipsu s osami Ox, Oy.

II.

Je-li v rovnici (1) $a_1 = b_1$ zvrhne se bikvadratická křivka (1) ve dvě kružnice s poloměry a, b se středem O, tedy v kružnice nad osami elipsy E (obr. 2). Pak je zřejmě $m = ab$ $(a = a_1 + \sqrt{a_1^2 + m},\ b = -a_1 + \sqrt{a_1^2 + m})$. Kružnice obalující tuto zvrhlou křivku, jež mají ke středu O mocnost $-m$, mají své středy na kružnici k o středu O a poloměru $\frac{1}{2}(a - b)$. Dotýkají se kružnic (a), (b) a vytínají na elipse E kubickou involuci a řadu bodovou. Strany trojúhelníků tvořených trojinami kubické involuce obalují opět kružnici l o poloměru $\frac{ab}{a+b}$ a středu O. Průsečík normál sestrojených v trojinách involuce vyplní elipsu

$$x = -\frac{(a-b)\,b}{a}\cos\varphi_0,\ y = \frac{(a-b)\,a}{b}\sin\varphi_0.$$

Tuto kubickou involuci lze nazvati **kinematickou**, neboť k ní přijdeme, vytvoříme-li elipsu jako hypocykloidu prodlouženou nebo zkrácenou. Nechť kružnice o poloměru r se kotálí po vnitřní straně kružnice o poloměru R a v rovině hybné kružnice ať je bod M ve vzdálenosti g od jejího středu. Rovnici křivky, již probíhá bod M

[4]) Lerch, str. 160.

lze psáti

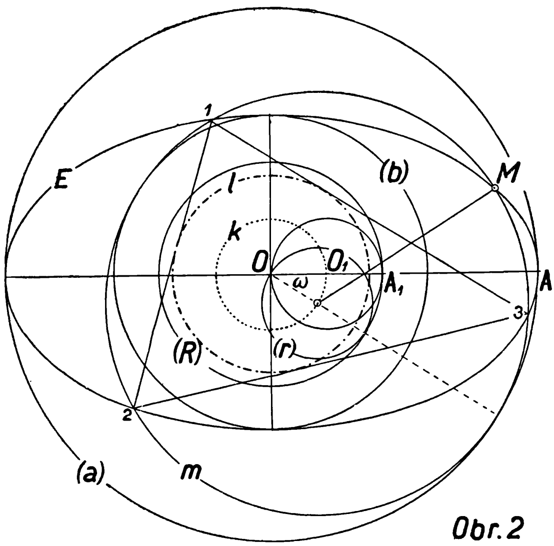
$$x + iy = (R - r + ge^{-i\beta})\, e^{i\alpha}, \; R\alpha = r\beta,$$

kde α, β jsou středové úhly odpovídající obloukům proběhnutým na kruhu pevném a hybném. Pro elipsu jest

$$x = a \cos \varphi = \frac{a}{2}\,(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \; y = b \sin \varphi = \frac{a}{2i}\,(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

či

$$x + iy = \frac{a+b}{2}\, e^{i\varphi} + \frac{a-b}{2}\, e^{-i\varphi}.$$



Obr. 2

Srovnáním s hořejší rovnicí vidíme, že elipsu lze považovati buď za hypocykloidu zkrácenou, kde

$$R = 2r = a + b, \; g = \frac{a-b}{2} \;\; (\alpha = \varphi),$$

anebo za hypocykloidu prodlouženou, kde

$$R = 2r = a - b, \quad g = \frac{a+b}{2} \; (\alpha = -\varphi).$$

Všimněme si druhého případu. V obr. 2 jsou (a), (b) kružnice nad velkou a malou osou elipsy E. Střed hybné kružnice (r) v počáteční poloze buď O_1 a bod M ať splyne s vrcholem A. Všimněme si kružnice m o středu O_1 a poloměru g. Při uvažovaném pohybu kružnice m se dotýká kružnic (a), (b), střed její opisuje kružnici k

o středu O a poloměru $\frac{1}{2}(a - b)$. Bod M (v počáteční poloze A) opisuje elipsu E. Mimo to kružnice m seče elipsu E ve třech bodech *1, 2, 3,* jež tvoří kubickou involuci. V obecné poloze jest rovnice kružnice m

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - g^2 = 0,$$

kde

$$p = \frac{a-b}{2} \cos \omega, \quad q = -\frac{a-b}{2} \sin \omega, \quad g = \frac{a+b}{2},$$

nebo po úpravě

$$m \equiv x^2 + y^2 - (a - b)\, x \cos \omega + (a - b)\, y \sin \omega - ab = 0. \quad (14)$$

Hledejme komplexní parametry $z = e^{i\varphi}$ průsečíků kružnice m s elipsou E. Dosadíme-li do rovnice (14) hodnoty $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, dostaneme nejprve

$$c^2 \cos 2\varphi - (a - b)\,(a \cos \omega \cos \varphi - b \sin \omega \sin \varphi) + \frac{(a-b)^2}{2} = 0,$$

nebo, zavedeme-li komplexní hodnoty $z = e^{i\varphi}$, $z_0 = e^{i\omega}$

$$z^4 - \frac{2}{a+b}\,(a \cos \omega + ib \sin \omega)\, z^3 + 2\,\frac{a-b}{a+b}\, z^2 -$$
$$- \frac{2}{a-b}\,(a \cos \omega - ib \sin \omega)\, z + 1 = 0;$$

píšeme-li ještě $h = \dfrac{a-b}{a+b}$, dostaneme po úpravě

$$z^4 - \left(z_0 + \frac{h}{z_0}\right) z^3 + 2hz^2 - \left(hz_0 - \frac{1}{z_0}\right) z + 1 = 0. \quad (15)$$

Této rovnici hoví zřejmě hodnota z_0, jež přísluší bodu M, jenž opisuje elipsu E při uvažovaném pohybu. Dělíme-li rovnici (15) činitelem $z - z_0$, dostaneme pro další tři průsečíky kružnice m s elipsou rovnici

$$z^3 - f_1 z^2 + f_2 z - f_3 = 0, \quad (16)$$

kde

$$f_1 = \frac{h}{z_0}, \quad f_2 = h, \quad f_3 = \frac{1}{z_0}; \quad (17)$$

tato rovnice definuje kubickou involuci na elipse.

Spojnice bodů z_1, z_2 na elipsu má plückerovské souřadnice

$$u = -\frac{1}{a}\,\frac{1 + z_1 z_2}{z_1 + z_2}, \quad v = -\frac{i}{b}\,\frac{1 - z_1 z_2}{z_1 + z_2}$$

a vzdálenost od počátku

$$w = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{ab\,(z_1 + z_2)}{\sqrt{2d^2 z_1 z_2 - c^2\,(1 + z_1^2 z_2^2)}} \quad (d^2 = a^2 + b^2). \quad (18)$$

Vyloučíme-li z rovnic (17)-z_0, z_3, dostaneme

$$z_1 z_2 (h^2 + 1) - h(z_1^2 z_2^2 + 1) - (z_1 + z_2)^2 = 0,$$

nebo dáme-li za h opět původní hodnotu

$$2 z_1 z_2 d^2 - c^2 (z_1^2 z^2 + 1) = (a + b)^2 (z_1 + z_2)^2.$$

Dosazením do rovnice (18) dostaneme

$$w = \frac{ab}{a + b}.$$

Strany kinematických trojúhelníků obalují tedy kružnici.

Elipsa E a kružnice l středu O o poloměru $\frac{ab}{a + b}$ jsou tedy dvě kuželosečky v Ponceletově poloze; jest nekonečně mnoho trojúhelníků elipse vepsaných a kružnici opsaných.

III.

Mějme dvě nesoustředné kružnice

$$A \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad B \equiv x^2 + y^2 - 2lx + l^2 - \varrho^2 = 0. \qquad (19)$$

Střed prvé je $O(0, 0)$, střed druhé $L(l, 0)$. Geom. místo středů kružnic, které se dotýkají současně kružnic A i B, jsou dvě kuželosečky (deferenty) o společných ohniskách O, L. Kruhy jedné nebo druhé řady jsou kolmé k téže kružnici či patří témuž trsu. Tato kružnice má střed v jednom neb druhém středu podobnosti kružnic A, B a jde jejich společnými body (Steinerova kružnice svazku $A \,.\, B$).

Předpokládejme, že kružnice B je uvnitř kružnice A čili $a - \varrho > l$. Vnější střed podobnosti má souřadnice $x_0 = \frac{al}{a - \varrho}$, $y_0 = 0$. Příslušná deferenta má střed $\omega(\frac{1}{2}l, 0)$. Vrcholy její na ose Ox jsou středy kružnic nad průměry $(a, l - \varrho)$, $(-a, l + \varrho)$, t. j. $x_1 = \frac{a + l - \varrho}{2}$, $x_2 = \frac{-a + l + \varrho}{2}$; poloosy její jsou

$$a' = x_1 - \frac{l}{2} = \frac{a - \varrho}{2}, \qquad b' = \sqrt{a'^2 - O\omega^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a - \varrho)^2 - l^2}.$$

Pišme její rovnice

$$p = \tfrac{1}{2}l + a' \cos \Theta, \quad q = b' \sin \Theta;$$

příslušné kružnice trsu mají tvar

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + u = 0.$$

Jejich společná mocnost k bodu $(x_0, 0)$ jest

$$M = (x_0 - a)(x_0 - l + \varrho)$$

a máme pro n rovnici

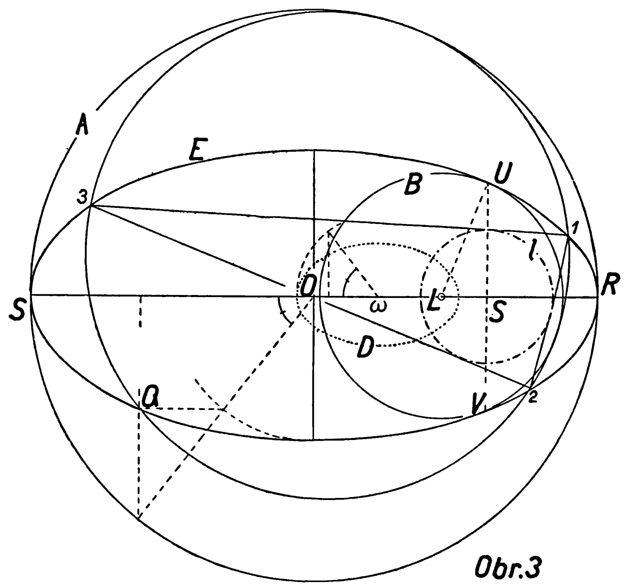
$$x_0^2 - 2px_0 + n = (x_0 - a)(x_0 - l + \varrho),$$

z čeho

$$n = al \cos \Theta - a\varrho.$$

Je tedy rovnice obecné kružnice řady

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + al \cos \Theta - a\varrho = 0. \tag{20}$$



Obr.3

Buď dána elipsa E s poloosami a, b (obr. 3), nejmenší opsaný kruh o středu O a poloměru a a jiný kruh B, který má střed L na hlavní ose Ox a dotýká se elipsy ve dvou bodech U, V. Pišme $OL = l$, poloměr kružnice B označme ϱ a souřadnici bodů U, V označme ξ. Pak jest

$$l = \frac{c^2}{a^2}\xi, \qquad \varrho^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^4}\xi^2\right)$$

a rovnice kružnice B

$$x^2 + y^2 - \frac{2c^2}{a^2}\xi x - b^2 + \frac{c^2}{a^2}\xi = 0. \tag{21}$$

Mějme zase na mysli kružnice, které se dotýkají kružnic A, B způsobem výše uvedeným. Pro poloosy deferenty D nalezneme zde

$$a' = \frac{a - \varrho}{2}, \quad b' = \frac{a\varrho - b^2}{2b};$$

rovnice proměnlivé kružnice jest opět (20).

Kružnice řady (20) vytínají na elipse E kubickou involuci a projektivní svazek. Trojúhelníky určené trojinami kubické involuce obalují kuželosečku, jež má Ox za osu symetrie. Délku této osy a střed kuželosečky nalezneme takto: Kružnice řady (20), jež odpovídá hodnotě $\Theta = 0$, dotýká se elipsy v bodě $(a, 0)$ a seče ji ve dvou bodech na spojnici $x_1 = \frac{a}{c^2}(al - a\varrho + b^2)$, kružnice, jež odpovídá hodnotě $\Theta = \pi$ dotýká se elipsy v bodě $(-a, 0)$ a seče ji ve dvou bodech na přímce $x_2 = \frac{a}{c^2}(al + a\varrho - b^2)$. Tyto přímky jsou tečnami obalené kuželosečky. Půlící bod jejich vzdálenosti jest $x = \frac{a^2 l}{c^2} = \xi$, tedy pata sečny dotyku kružnice B s elipsou E. Hledejme ohnisko této kuželosečky. Mezi kružnicemi řady (20) jsou dvě s poloměrem nula. Jejich středy jsou průsečíky kružnic A, B a za daných podmínek jsou imaginární. Ale kruh s poloměrem nulovým jsou dvě isotropické přímky a jedna z nich spojuje dva body jedné trojiny, jest tedy tečnou uvažované kuželosečky a seče osu Ox v reálném ohnisku. Pro chordálu kružnic A, B dostaneme však snadno, vyjádříme-li l a ϱ veličinou ξ

$$x_0 = \frac{a^2 + l^2 - \varrho^2}{2l} = \frac{a^2}{2\xi} + \frac{\xi}{2},$$

pro pořadnici průsečíku jde

$$y_0{}^2 = a^2 - x_0{}^2 = -\frac{a^4}{4\xi^2}\left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right)^2,$$

tedy

$$y_0 = \pm \frac{ia^2}{2\xi}\left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right).$$

Průsečíky isotropických přímek jdoucích bodem $(x_0, \pm y_0)$ s osou Ox jsou $x_0 \pm iy_0$. V našem případě dostaneme pro jednu hodnotu ξ. Máme tedy kuželosečku, jejíž jedno ohnisko splývá se středem, jest to tedy kružnice. Došli jsme tedy k výsledku jistě zajímavému:

Kružnice, které se současně dotýkají kružnice A opsané nad hlavní osou elipsy a jiné kružnice B, jež má střed na hlavní ose a má s elipsou dvojnásobný dotyk, a které patří trsu s mocností zápornou, dávají na elipse čtveřiny bodové, jež se skládají z jednoduché řady a z kubické involuce tvořené Ponceletovými trojúhelníky opsanými kružnici, jejíž střed je na sečně dotyku kružnice B s elipsou E.

Napišme rovnici uvažované kubické involuce. Je určena dvěma trojinami, jež lze snadno sestrojiti. Jednu vytíná kružnice nad průměrem $(a, l - \varrho)$, která se dotýká elipsy ve vrcholu R, v němž splývá jeden bod trojiny s bodem jednoduché řady. Parametry bodů této trojiny jsou $z = 1$ $(\varphi = 0)$, $e^{i\alpha}$, $e^{-i\alpha}$, kde $a \cos \alpha = x_1$, tedy

$$\cos \alpha = \frac{al - a\varrho + b^2}{c^2}. \tag{22a}$$

Podobně kružnice nad průměrem $(-a, l + \varrho)$ dává druhou trojinu s parametry $z = -1$ $(\varphi = \pi)$, $e^{i\beta}$, $e^{-i\beta}$, při čem $a \cos \beta = x_2$,

$$\cos \beta = \frac{al + a\varrho - b^2}{c^2}. \tag{22b}$$

Máme tedy dvě trojiny involuce

$$(z - 1)(z^2 - 2z \cos \alpha + 1) = 0, \quad (z + 1)(z^2 - 2z \cos \beta + 1) = 0$$

čili

$$z^3 - (1 + 2 \cos \alpha) z^2 + (1 + 2 \cos \alpha) z - 1 = 0,$$
$$z^3 + z^2 (1 - 2 \cos \beta) + (1 - 2 \cos \beta) z + 1 = 0.$$

Rovnici involuce možno napsati

$$z^3 - (1 + 2 \cos \alpha) z^2 + (1 + 2 \cos \alpha) z - 1 -$$
$$- \lambda [(1 + \cos \alpha - \cos \beta) z^2 - (\cos \alpha + \cos \beta) z + 1] = 0. \tag{23}$$

Utvořme základní symetrické funkce kořenů f_1, f_2, f_3 a eliminujme λ; dostaneme

$$f_1 = f_3 (1 + \cos \alpha - \cos \beta) + (\cos \alpha + \cos \beta),$$
$$f_2 = f_3 (\cos \alpha + \cos \beta) + (1 + \cos \alpha - \cos \beta). \tag{23a}$$

Hledejme souřadnice středu kružnice opsané jedné trojině. Použijeme vzorců z uvedeného článku Lerchova[5])

$$p = \frac{c^2}{8a}\left(f_1 + \frac{1}{f_3} + f_3 + \frac{f_2}{f_3}\right), \quad q = \frac{c^2 i}{8b}\left(f_1 + \frac{1}{f_3} - f_3 - \frac{f_2}{f_3}\right).$$

Dosazením dostaneme po krátkém výpočtu

$$\frac{8ap}{c^2} = (2 + \cos \alpha - \cos \beta)\left(f_3 + \frac{1}{f_3}\right) + 2(\cos \alpha + \cos \beta),$$
$$\frac{8bq}{c^2 i} = (\cos \alpha - \cos \beta)\left(f_3 - \frac{1}{f_3}\right). \tag{24}$$

---

[5]) str. 390.

V našem případě však jest

$$p = \tfrac{1}{2}l + a' \cos \Theta, \quad q = b' \sin \Theta$$

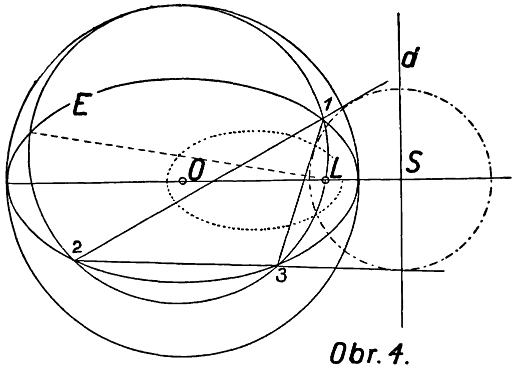
dále dle (22a, b)

$$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{2al}{c^2}, \quad \cos \alpha - \cos \beta = 2\frac{b^2 - a\varrho}{c^2} = -\frac{4b}{c^2} b',$$

z čeho

$$2 + \cos \alpha - \cos \beta = 2\frac{a^2 - a\varrho}{c^2} = \frac{4a}{c^2} a'.$$

Dosaďme do rovnic (23a) a vyjde



Obr. 4.

$$f_3 - \frac{1}{f_3} = 2i \sin \Theta, \quad f_3 + \frac{1}{f_3} = 2 \cos \Theta, \tag{25}$$

tedy $f_3 = e^{i\Theta}$. Θ je anomalie středu kružnice, čtvrtý bod koncyklický s trojinou involuce má parametr $\frac{1}{f_3} = e^{-i\Theta}$ a odpovídá tedy anomalii $-\Theta$.

Poloměr kružnice l vepsané všem trojúhelníkům kubické involuce jest $\frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{a}{c^2}(a\varrho - b^2)$.

Všimněme si ještě zvláštního případu, kdy bod L padne do ohniska elipsy E (obr. 4); poloměr ϱ pak se rovná nule a sečna dotyku je řídící přímka d. Vepsaná kružnice má poloměr $\frac{ab^2}{c^2}$ $\left(= \frac{x_2 - x_1}{2}\right)$. Deferenta je geom. místo středu kružnice, která jde bodem L a dotýká se kružnice o středu O a poloměru a, tedy elipsa s ohnisky O, L a hlavní osou a, zkrátka podobná a podobně položená s elipsou E, při čem poměr podobnosti je 1 : 2. Možno tedy vysloviti větu:

Kružnice opsaná nad ohniskovým průvodičem elipsy dotýká se kružnice opsané nad hlavní osou elipsy a seče ji ještě ve třech bodech. Trojúhelníky těchto tří bodů jsou opsány téže kružnici, jejíž střed je v průsečíku řídící přímky s osou a poloměr $\frac{ab^2}{c^2}$.

Obrázky L. Seifert. Archiv JČMF.

*

Einige Bemerkungen über die kubische Involution auf einer Ellipse.

(Auszug aus dem vorstehenden Artikel.)

In einer in dem Jahrg. 45 dieser Zeitschrift veröffentlichten Arbeit zeigte M. Lerch, daß die Kreise, die den Dreiecken einer kubischen Involution auf einer Ellipse umbeschrieben sind, eine bizirkulare Kurve umhüllen. Dieselben schneiden also rechtwinklig einen Kreis und ihre Mittelpunkte erfüllen einen Kegelschnitt (Deferente). Jede bizirkulare Kurve kann bekanntlich auf vierfache Weise als Umhüllungskurve einer quadratischen Kreisreihe aufgefaßt werden. Es gilt auch die folgende Umkehrung. Es sei E ein Kegelschnitt, der diese Kurve in vier Punkten berührt. Die Mannigfaltigkeit der Punktquadrupeln, in denen E von der Kreisreihe geschnitten wird, zerfällt in eine kubische Involution und eine projektive Punktreihe oder in zwei quadratische Involutionen.

Der Verfasser betrachtet den Fall einer symmetrischen bizirkularen Kurve F (Gl. (1)) und einer Ellipse E (a, b), die diese Kurve in den vier Punkten auf den Symmetrieachsen berührt, wobei die erwähnte Mannigfaltigkeit der Punktquadrupeln in eine kubische Involution und eine projektive Punktreihe zerfällt. Die Gleichung der Involution ist (8, 8a). Die zugehörigen Dreiecke umhüllen ebenfalls einen Kegelschnitt (12) und die Ellipsennormalen in den Eckpunkten schneiden sich in einem Punkte, der sich wiederum auf einem Kegelschnitte (13) bewegt (Fig. 1).

Wenn die Kurve F in zwei Kreise (a), (b) über den Achsen der Ellipse E (a, b) zerfällt, so schneidet der diese zwei Kreise berührende Kreis m (Fig. 2) die Ellipse E in einer Reihe und einer kubischen Involution. Diese letztere wird als kinematisch bezeichnet, da die Ellipse als eine verlängerte Hypocykloide aufgefaßt werden kann. Die Involution ist durch die Gleichungen (16), (17) gegeben, wobei $z = e^{i\varphi}$ den Parameter bedeutet. Die Dreiecke umhüllen einen Kreis, dessen Mittelpunkt O und dessen Halbmesser $\frac{ab}{a+b}$ ist. Dieser Kreis und die Ellipse E sind demnach zwei Kegelschnitte in Ponceletscher Lage.

Wenn die Ellipse $E(a, b)$, der Kreis $A(0, a)$, der doppelt berührende Kreis B und die Kreisreihe (20), die die beiden Kreise berührt, gegeben sind, so kommt man zur Involution (23). Die Dreiecke umhüllen dann einen Kreis, dessen Mittelpunkt sich auf der Berührungssehne des Kreises B mit der Ellipse E befindet (Fig. 3).

Ein besonderer Fall entsteht, wenn B in einen Brennpunkt L und die Berührungssehne in die Direktrix d übergeht (Fig. 4). In diesem Falle kommt man zu dem folgenden Satze: Die auf den Brennpunktvektoren stehenden Kreise berühren den Kreis $(0, a)$, und schneiden die Ellipse in drei weiteren Punkten. Die Dreiecke dieser drei Punkte umhüllen wiederum einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt der Direktrix mit der Achse und dessen Radius $\frac{ab^2}{c^2}$ ist $(c^2 = a^2 - b^2)$.