

Josef Zahradníček

Kyvy spřažených netlumených kyvadel torsních

Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, Vol. 70 (1941), No. 3-4, 133--152

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/122291>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1941

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Kyvy spřažených netlumených kyvadel torsních.

Josef Zahradníček, Brno.

(Došlo dne 14. března 1941.)

Tato práce podává obecné řešení problému dvou spřažených netlumených kyvadel torsních a to spřažených výchylkou. Verifikace odvozených vztahů je podána na základě zachycených autogramů a to z počtu rázů ve dvou řadách měření o libovolných frekvencích vlastních a různě těsném spřažení při závěsu spodním i bez něho. V tomto směru je tato práce pokračováním a doplňkem práce Oberbeckovy, M. Wienovy, Bouassovy a Stockmannovy na straně jedné, i prací provedených ve fyzikálním ústavě brněnské university Košťálem, Koťovou a autorem na straně druhé.

V jednom dílu své „Fysiky“ řešil Bouasse¹⁾ tento speciální případ dvou spřažených netlumených kyvadel torsních: Dvě stejná kyvadla torsní (o stejných momentech setrvačnosti) jsou zavěšena na společném závěsu délek l_1, l_0, l_1 , při čemž i spodní konec závěsného drátu je pevný. Bouasse vyšetřil spřažené kmity této soustavy při počátečních podmínkách: $t = 0, \varphi = 0, \chi = 0, \varphi' > 0, \chi' = 0$.

Ve fyzikálním ústavě brněnské university řešil případy spřažených kyvadel torsních za různých podmínek jednak R. Košťál,²⁾ jednak R. Koťová,³⁾ jednak autor.⁴⁾ V následujícím podám obecné řešení Bouassova problému spřažených kyvadel torsních, zavěšených na společném vlákně, jehož spodní konec je rovněž pevný, a upozorním na experimentální obtíže, pro které je někdy nesnadno dosáhnouti žádoucího souhlasu mezi počtem a měřením.

¹⁾ H. Bouasse, Pendule, spiral, diapason, II., 394, Paris 1920.

²⁾ R. Košťál, Kmity spřažených netlumených kyvadel torsních, Rozpr. čs. akad., 44 (1935), 16.

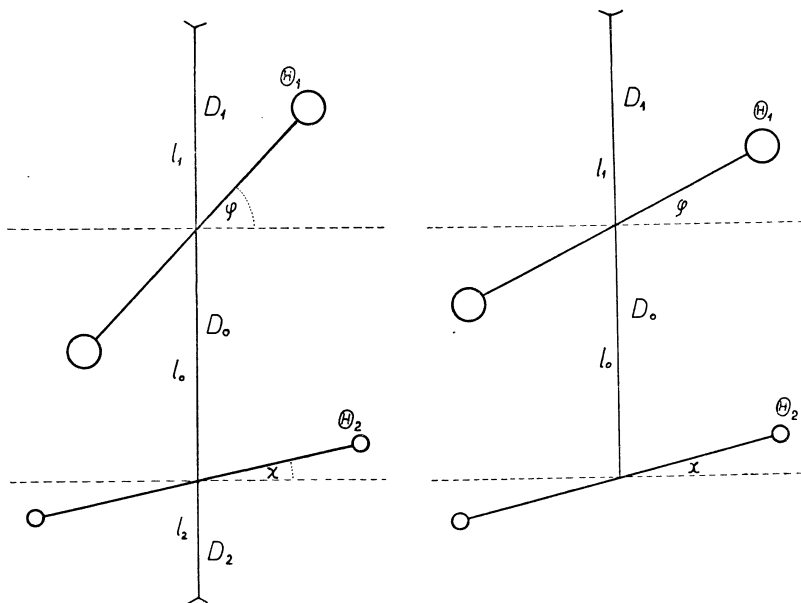
³⁾ R. Koťová, Měření koeficientu spřažení při kyvech torsních kyvadel spřažených výchylkou, Spisy přírod. fak. Masarykovy univ., č. 216, Brno 1935.

⁴⁾ J. Zahradníček, Kyvy spřažených kyvadel torsních, Čas. pro pěst. mat. a fys., 61 (1932), 268; Měření gravitační konstanty torsními vážkami, Spisy přírod. fak. Masarykovy univ., č. 153, 1932; Resonanzmethode für die Messung der Gravitationskonstante mittels der Drehwage, Phys. ZS., 34 (1933), 126.

Rovnice energie sprážených kyvadel torsních (bez útlumu) jest v předloženém případě (obr. 1a)

$$\frac{1}{2}\Theta_1\varphi'^2 + \frac{1}{2}\Theta_2\chi'^2 + \frac{1}{2}D_1\varphi^2 + \frac{1}{2}D_2\chi^2 + \frac{1}{2}D_0(\varphi - \chi)^2 = A^2, \quad (1)$$

kde Θ_1, Θ_2 jsou momenty setrvačnosti kyvadel, D_1, D_2, D_0 pružnosti závěsů délek l_1, l_2, l_0 ; A^2 je hodnota energie vložené do sou-



Obr. 1.

Schema dvou sprážených kyvadel torsních a to se spodním závěsem (a) a bez spodního závěsu (b).

stavy na počátku pohybu v čase $t = 0$, na př. $\varphi' = 0, \chi' = 0, \varphi = \Phi_0, \chi = X_0$, při čemž jest

$$\Phi_0 : X_0 = (l_0 + l_2) : l_2.$$

Pružnost D je funkcí konstant závěsného drátu (délky l , poloměru r a modulu pružnosti v torzi F), t. j.

$$D = \frac{\pi}{2} F \frac{r^4}{l}. \quad (2)$$

V předešlé rovnici (1) jsou patrné členy týkající se kinetické a elastické energie obou kyvadel a to každého zvlášť a elastické energie související s vazbou obou kyvadel $D_0\varphi\chi$. Elastická energie kyvadla jednoho resp. druhého, když druhé resp. první je za-

brzděno, jest

$$\frac{1}{2} (D_1 + D_0) \varphi^2 \text{ resp. } \frac{1}{2} (D_0 + D_2) \chi^2.$$

Momentové rovnice Lagrangeovy⁵⁾ pro obě kyvadla jsou:

$$\Theta_1 \varphi'' + D_1 \varphi + D_0 (\varphi - \chi) = 0, \quad \Theta_2 \chi'' + D_2 \chi + D_0 (\chi - \varphi) = 0. \quad (3)$$

Tyto rovnice mají řešení

$$\varphi = \alpha \sin \Omega t, \quad \chi = \beta \sin \Omega t. \quad (4)$$

Frekvence sprzęžených kmitů je vázána s konstantami kyvadel vztahem

$$(D_1 + D_0 - \Theta_1 \Omega^2) (D_2 + D_0 - \Theta_2 \Omega^2) = D_0^2. \quad (5)$$

Zavedeme-li sem vlastní frekvence obou kyvadel

$$\omega_1^2 = \frac{D_1 + D_0}{\Theta_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{D_2 + D_0}{\Theta_2}, \quad (6)$$

kterými každé z kyvadel kývá samo o sobě, když druhé je zabrzděno, pak předešlá rovnice pro frekvence sprzęžených kmitů jest

$$\Omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \Omega^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 - \frac{D_0^2}{\Theta_1 \Theta_2} = 0. \quad (7)$$

Jak už bylo naznačeno, řešil Bouasse případ $\Theta_1 = \Theta_2$, $D_1 = D_2$, t. j. $l_1 = l_2$ a tedy $\omega_1 = \omega_2$; pak jest

$$\Omega^2 = \frac{D}{\Theta}, \quad \frac{D + 2D_0}{\Theta}.$$

Zvláštní případ Bouassův byl $D_0 \doteq 0$, t. j. $l_0 \gg l$.

Z charakteristické rovnice pro frekvence sprzęžených kyvů (7) plyne v obecném případě

$$\Omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 + \frac{D_0^2}{\Theta_1 \Theta_2}}, \quad (8)$$

t. j. ve všech případech dvou sprzęžených soustav jsou dvě od sebe různé frekvence Ω_1, Ω_2 a to tím více od sebe rozdílné, čím větší je výraz pod odmocninou. V obecném případě jsou obsaženy dva mezní případy hodnoty pod odmocninou, kdy totiž je

$$\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 \ll \frac{D_0^2}{\Theta_1 \Theta_2} \quad \text{resp.} \quad \gg \frac{D_0^2}{\Theta_1 \Theta_2}. \quad (9)$$

V prvním případě krajním $\omega_1 = \omega_2$ jest

$$\Omega^2 = \omega^2 \pm \frac{D_0}{\sqrt{\Theta_1 \Theta_2}} \quad (10)$$

⁵⁾ Plynou z druhé formy rovnice energie $dE = 0$ v případě $\chi' = 0$ resp. $\varphi' = 0$.

s limitou $D_0 = 0$, t. j. $l_0 \gg l_1, l_2$; v druhém krajním případě je

$$\Omega_1^2 = \omega_1^2 + \frac{D_0^2}{\Theta_1 \Theta_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \quad \Omega_2^2 = \omega_2^2 - \frac{D_0^2}{\Theta_1 \Theta_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)}$$

s limitou $D_0 = 0$. (11)

Průběh pohybu sprzęžených kyvadel primárního a sekundárního je vystižen obecným integrálem Lagrangeových rovnic [(3), (4)]

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{01} \sin(\Omega_1 t + \varepsilon_1) + \varphi_{02} \sin(\Omega_2 t + \varepsilon_2), \\ \chi &= \chi_{01} \sin(\Omega_1 t + \varepsilon_1) + \chi_{02} \sin(\Omega_2 t + \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Při tom jsou amplitudy sekundárního kyvadla závislé na amplitudách primárního kmitu, t. j. na počáteční hodnotě energie do soustavy vložené a na konstantách obou kyvadel. Pro amplitudy obou parciálních kmitů vyplývají z Lagrangeových rovnic (3) vztahy

$$\frac{\chi_{01}}{\varphi_{01}} = \frac{\omega_1^2 - \Omega_1^2}{D_0/\Theta_1} = \frac{D_0/\Theta_2}{\omega_2^2 - \Omega_1^2}, \quad \frac{\chi_{02}}{\varphi_{02}} = \frac{\omega_1^2 - \Omega_2^2}{D_0/\Theta_1} = \frac{D_0/\Theta_2}{\omega_2^2 - \Omega_2^2},$$

z nich plyne dále pro kyvadlo sekundární⁶⁾ (13)

$$\frac{\chi_{01}}{\chi_{02}} = - \frac{\omega_1^2 - \Omega_1^2}{\omega_2^2 - \Omega_1^2} \cdot \frac{\varphi_{01}}{\varphi_{02}}, \quad \chi_{01} \chi_{02} = - \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \varphi_{01} \varphi_{02} \quad (13')$$

a odtud konečně

$$\chi_{01}^2 = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \frac{\Omega_1^2 - \omega_1^2}{\Omega_1^2 - \omega_2^2} \cdot \varphi_{01}^2, \quad \chi_{02}^2 = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \frac{\Omega_1^2 - \omega_2^2}{\Omega_1^2 - \omega_1^2} \cdot \varphi_{02}^2. \quad (13'')$$

Integrační konstanty v kmitu primárním a sekundárním určíme z počátečních podmínek. V čase $t = 0$ nechť jest

$$\varphi = 0, \quad \chi = 0, \quad \varphi' > 0, \quad \chi' > 0,$$

t. j. klidná soustava dostane na primárním kyvadle balistický náraz. Vazbou mezi oběma kyvadly jest část vložené energie přenesena i na kyvadlo sekundární. Bouassův případ: $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\varphi' > 0$, $\chi' = 0$ nedá se realizovat; právě tak se nedá realizovat počáteční případ: $\varphi' = 0$, $\chi' = 0$, $\varphi = \Phi_0$, $\chi = 0$. V obou těchto případech je na počátku pohybu rychlost resp. výchylka sekundárního kyvadla od nuly rozdílná a to tím více, čím těsnější je vazba mezi oběma kyvadly, t. j. $D_0 > 0$.⁷⁾

⁶⁾ Se zřetelem ke vztahu plynoucímu z (7)

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2.$$

⁷⁾ Počáteční podmínky bývají voleny co nejjednodušší; nutno při tom dobře vědět, jaká energie soustavy se na počátku uvolňuje. Tak na př. při $\varphi = \Phi_0$ je $\chi = X_0$ nebo $\chi = 0$ a podle toho je pak $\varphi' = 0$ a $\chi' = 0$ nebo $\chi' > 0$. Energie vložená do soustavy a uvolňující se je buď $\frac{1}{2} D_1 \Phi_0^2 + \frac{1}{2} D_2 X_0^2 + \frac{1}{2} D_0 (\Phi_0 - X_0)^2$, anebo $\frac{1}{2} D_1 \Phi_0^2 + \frac{1}{2} D_0 \Phi_0^2$ a obdobně v případě druhém. Podobně při $\varphi = 0$ a $\chi = 0$ je rychlost φ' maximální a rychlost χ' od nuly rozdílná — balistický náraz.

Z rovnic (13) je patrné, že amplitudy φ_{02} a χ_{02} mají různá znaménka, takže je vhodné výchylky sprážených kyvů psát ve formě

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_{01} \sin(\Omega_1 t + \varepsilon_1) + \varphi_{02} \sin(\Omega_2 t + \varepsilon_2), \\ \chi &= \chi_{01} \sin(\Omega_1 t + \varepsilon_1) - \chi_{02} \sin(\Omega_2 t + \varepsilon_2).\end{aligned}\quad (14)$$

V čase $t = 0$ je $\varphi = 0$, $\chi = 0$, t. j.

$$\varphi_{01} \sin \varepsilon_1 + \varphi_{02} \sin \varepsilon_2 = 0, \quad \chi_{01} \sin \varepsilon_1 - \chi_{02} \sin \varepsilon_2 = 0. \quad (15)$$

Odtud plyne buď

$$\frac{\varphi_{01}}{\varphi_{02}} = -\frac{\chi_{01}}{\chi_{02}} = a \quad (16)$$

[tento vztah není však podle (13') obecně splněn], anebo

$$\sin \varepsilon_1 = 0, \quad \sin \varepsilon_2 = 0, \quad \text{t. j. } \varepsilon_1 = k_1 \pi, \quad \varepsilon_2 = k_2 \pi. \quad (16')$$

Pro další rozbor pohybu sprážených kyvadel píšeme pro kyvadlo primární

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_{00} \sin\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \varepsilon_0\right), \\ \varphi_{00}^2 &= \varphi_{01}^2 + \varphi_{02}^2 + 2\varphi_{01}\varphi_{02} \cos[(\Omega_1 - \Omega_2)t + \varepsilon_1 - \varepsilon_2], \\ \operatorname{tg} \varepsilon_0 &= \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{\varphi_{01} + \varphi_{02}} \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)\end{aligned}\quad (17)$$

a obdobně pro kyvadlo sekundární

$$\begin{aligned}\chi &= \chi_{00} \sin\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \eta_0\right), \\ \chi_{00}^2 &= \chi_{01}^2 + \chi_{02}^2 - 2\chi_{01}\chi_{02} \cos[(\Omega_1 - \Omega_2)t + \varepsilon_1 - \varepsilon_2], \\ \operatorname{tg} \eta_0 &= \frac{\chi_{01} + \chi_{02}}{\chi_{01} - \chi_{02}} \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right).\end{aligned}\quad (18)$$

Rovnice tyto vyznačují, že výchylka i amplituda výchylky jsou periodické funkce času.

Počáteční podmínky pro výchylku a rychlost obou kyvadel dávají celkem čtyři rovnice pro parciální amplitudy a fáze obou kmitů. K nim přistupují ještě rovnice plynoucí z Lagrangeových (13). Velké zjednodušení těchto vztahů nastává v případě resonance $\omega_1 = \omega_2$. Tehdy a jen tehdy jest $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = k\pi$ a současně konstanta v rovnici (16) $a = 1$, t. j. pro hodnoty amplitud a fázových posunů platí⁸⁾

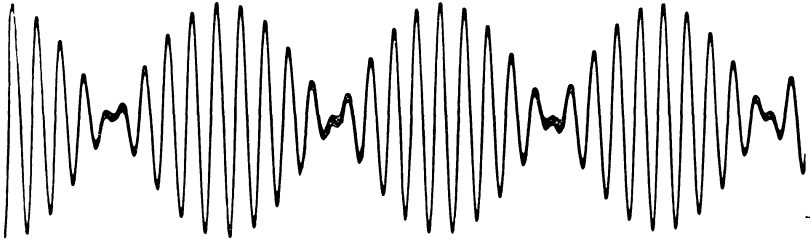
⁸⁾ Je-li ještě splněno $\Theta_1 = \Theta_2$, jest $\varphi_{00} = \chi_{00}$. Není-li $\omega_1 = \omega_2$, pak nejsou splněny rovnice (16) a (19). Amplituda výchylek mění se v mezích $\varphi_{01} \pm \varphi_{02}$ resp. $\chi_{01} \pm \chi_{02}$, nikdy však nedosahuje nuly, jak patrné z autogramů 4 a 5. Nulového minima nedosahuje křivka amplitud také tehdy, jsou-li v čase $t = 0$ výchylky obou kyvadel od nuly rozdílné a to ať ve fázi stejné nebo opačné — ani v případě resonance (obr. 3b, c).

$$\varphi_{01} = \varphi_{02} = \frac{\varphi_{00}}{2}, \quad \chi_{01} = \chi_{02} = \frac{\chi_{00}}{2}, \quad \varepsilon_0 = 0, \quad \eta_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

Výchytky spřažených kmitů jsou v tomto případě

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{00} \cos \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t \sin \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t, \\ \chi &= \chi_{00} \sin \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t \cos \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t. \end{aligned} \quad (20)$$

Je-li $\Omega_1 - \Omega_2$ malé proti $\Omega_1 + \Omega_2$, mění se amplituda výchylek pomalu od minima (nuly) k maximum φ_{00} resp. χ_{00} (viz na př. první z autogramů 4. a 6.) Těžko je však splnit současně podmínky



Obr. 2.

Proměnná minima amplitud spřažených kmitů.

$$\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t = k_1 \pi, \quad \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t = (2k_2 - 1) \frac{\pi}{2}$$

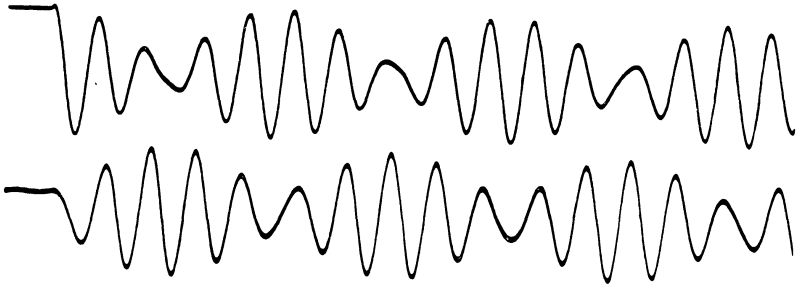
(k_1, k_2 celá čísla), jak patrně na nulových minimech autogramu na př. obr. 2.

Zcela obdobně, jak jest naznačeno v předešlém, je možno probrat případ s počátečními podmínkami $\varphi' = 0, \chi' = 0, \varphi = \Phi_0, \chi = X_0$, při čemž je

$$\Phi_0 : X_0 = (l_1 + l_0) : l_1,$$

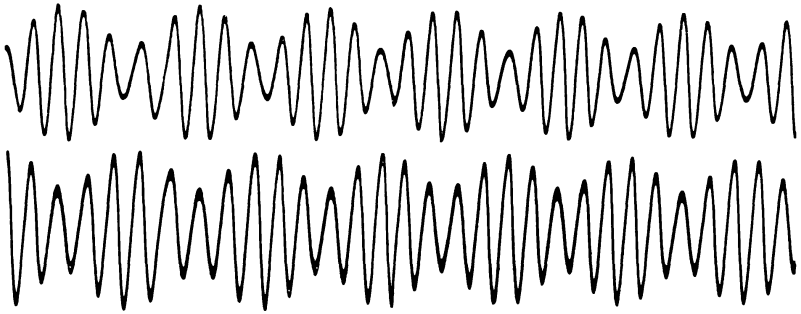
jsou-li počáteční výchytky stejnosměrné. Není však možno u těchto spřažených kyvadel splnit počáteční podmínky: $\varphi = \Phi_0, \chi = 0, \varphi' = 0, \chi' = 0$, anebo $\varphi = 0, \chi = 0, \varphi' = \Phi'_0, \chi' = 0$, jak se snadno přesvědčíme pokusem, zachycující oba autogramy jak primárního tak sekundárního kyvadla současně na týž fotografický papír (obr. 3a). Tyto podmínky jsou tím méně splnitelné, čím těsnější je vazba, t. j. drát l_0 krátký nebo velkého průměru.

Verifikaci početních vztahů, pokud se týká frekvencí a výchylek spřažených kyvadel torsních, ať jsou hodnoty konstant $\Theta_1, \Theta_2, D_1, D_0, D_2$ jakékoliv, je možno provést na soustavě libo-



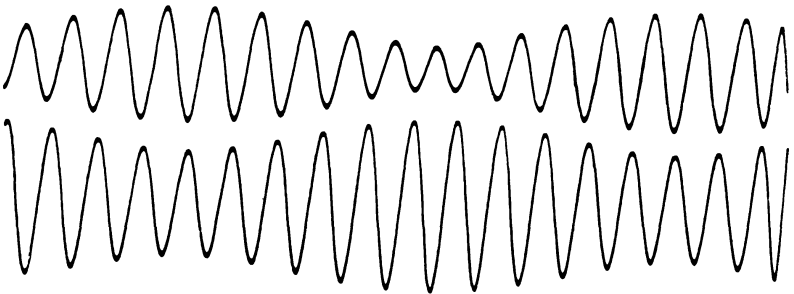
Obr. 3a.

Autogramy primárního a sekundárního kyvadla současně zachycené na týž fotografický papír s počáteční výchylkou statickou.



Obr. 3b.

Autogramy primárního a sekundárního kyvadla současně zachycené s počátečními výchylkami ve fázích stejných.



Obr. 3c.

Autogramy primárního a sekundárního kyvadla současně zachycené s počátečními výchylkami ve fázích opačných.

volné. Uvedeme zde dva případy, a to se sprážením těsným, t. j. $D_0 \gg 0$ a se sprážením volným, t. j. $D_0 \doteq 0$, kdy délka středního závěsu je malá resp. velká. Spodní závěs l_2 je zaveden k vůli zvýšení stability celé soustavy (pokud se týká stálosti rovnovážné polohy) a k vůli souměrnosti v početních vztazích.

Člen pocházející ze sprážení $D_0/\sqrt{\Theta_1\Theta_2}$ může nabýti hodnot v mezích 0 až $\omega_1\omega_2$ resp. ω^2 podle toho, je-li vazba volná nebo těsná. První případ nastává tehdy, je-li $D_1 \gg D_0$, $D_2 \gg D_0$. Realizovat se dá tento případ malým l_1, l_2 proti l_0 na př. 5 cm a 100 cm [resp. velkým r_1, r_2 proti r_0]. V případě $\omega_1 = \omega_2$ je v tomto krajním případě (10)]

$$\Omega = \omega \left(1 \pm \frac{D_0}{2\omega^2 \sqrt{\Theta_1\Theta_2}} \right). \quad (21)$$

Druhý krajní případ, kdy člen pocházející od sprážení blíží se hodnotě ω^2 , nastává tehdy, jsou-li hodnoty pružnosti D_1, D_2 zanedbatelně malé proti D_0 , t. j. délky závěsů l_1, l_2 velké proti l_0 resp. průměry krajních drátů malé proti průměru závěsu středního. V tomto případě je vlastně jen jediná frekvence $\Omega = \omega\sqrt{2}$, druhá je nulová.

Ladění kyvadel na určitý poměr frekvencí sprážených kmitů dá se nejhodněji provésti nastavením závěsných drátů l_1, l_0, l_2 . Při tom ponecháváme momenty setrvačnosti stejné⁹⁾ a podobně délky l_1, l_2 . V tom případě je snadno splnitelné $\omega_1 = \omega_2$ a platí tedy

$$\Omega^2 = \omega^2 \pm \frac{D_0}{\Theta}, \quad \omega^2 = \frac{D + D_0}{\Theta}. \quad (22)$$

Má-li býti poměr výsledných frekvencí

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{m}{n},$$

pak jest

$$\frac{D}{D_0} = \frac{2n^2}{m^2 - n^2} = \frac{l_0}{l}.$$

Čísla m, n jsou vázána vztahy

$$m > 1, \quad n < 1, \quad m^2 + n^2 = 2.$$

Tak na př. pro $m = 1,1$, $n = 0,89$ jest $l_0/l = 3$ a $\Omega_1/\Omega_2 = 1,2$. Poměr $\Omega_1/\Omega_2 = 1$ nedá se nastavit, leda v limitě pro $l_0 = \infty$.

⁹⁾ Nejsou-li momenty setrvačnosti stejné, platí v případě $\omega_1 = \omega_2$ vztah

$$\frac{D_1 + D_0}{D_2 + D_0} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}.$$

Je-li poměr frekvencí spřažených kmitů dán poměrem malých čísel celých, je perioda celého zjevu malá, maxima podřezují svou význačnou formu (velikost a polohu), jinak se význačné útvary na autogramu výchylek posunují. Z průběhu autogramu možno potvrdit správnost horních vztahů pro Ω_1, Ω_2 .

Jako mezní hodnoty poměru obou členů ve výsledné frekvenci

$$\omega^2 : \frac{D_0}{\sqrt{\Theta_1 \Theta_2}}$$

volme 1 a 1/100. Jsou-li závěsné dráty z téhož materiálu a o též průměru, je tento poměr

$$\frac{l_1}{l_1 + l_0} \sqrt{\frac{\Theta_1}{\Theta_2}}$$

V případě $\Theta_1 = \Theta_2$ jsou tedy mezní případy pro $l_0 \doteq 0$ a $l_0 \doteq 100l_1$.

Frekvence amplitud $(\Omega_1 - \Omega_2)/2$ je tím menší proti frekvenci výchylek $(\Omega_1 + \Omega_2)/2$ a tedy perioda amplitud tím větší proti periodě výchylek, čím jsou hodnoty frekvencí spřažených kmitů Ω_1, Ω_2 větší a sobě bližší.

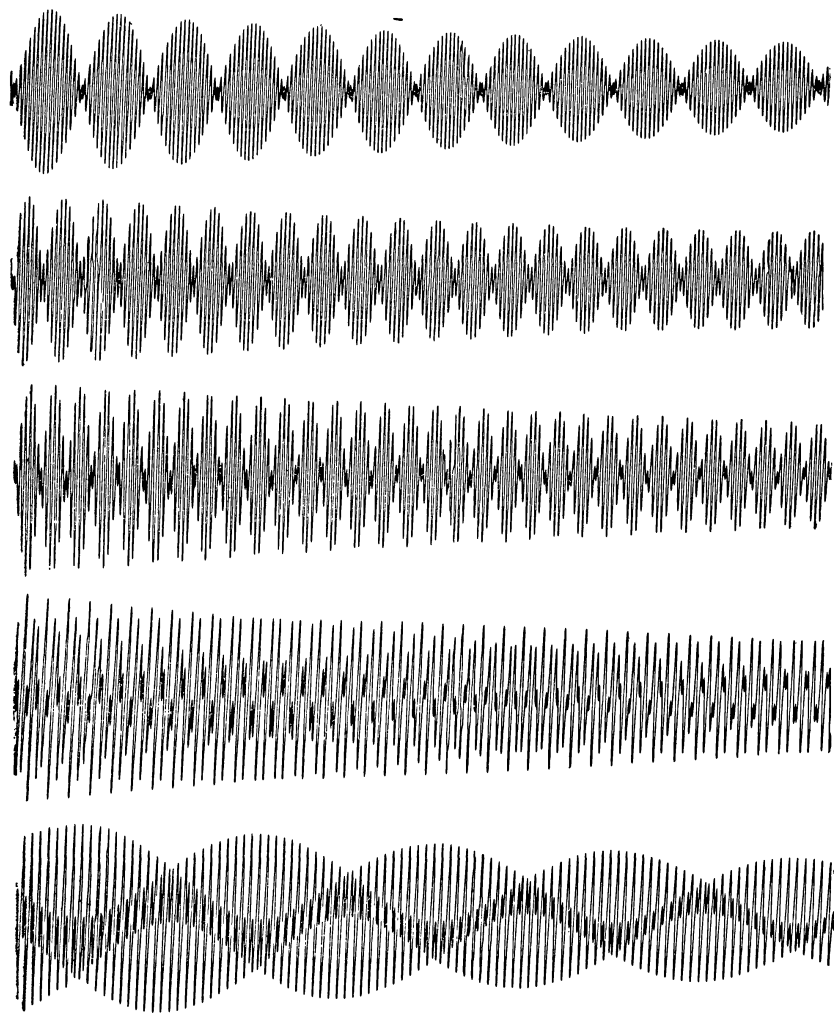
Člen $D_0^2/\Theta_1\Theta_2$ je možno se zřetelem k (6) psáti ve tvaru

$$\frac{D_0^2 \omega_1^2 \omega_2^2}{(D_1 + D_0)(D_2 + D_0)} = C \omega_1^2 \omega_2^2. \quad (23)$$

Jsou-li závěsné dráty stejné hmoty (ocel) a stejného průřezu, je možno místo pružností D_1, D_0, D_2 zavést převratné hodnoty délek, předešlým konstantám úměrných (2); pak jest

$$C = \frac{l_1 l_2}{(l_1 + l_0)(l_2 + l_0)}. \quad (23')$$

Tato forma má tu výhodu, že k určení frekvencí spřažených kmitů Ω_1, Ω_2 stačí znáti frekvence vlastní ω_1, ω_2 a délky závěsů spřažených soustav. V jednom případě byla spřažena kyvadla torsní zavěšena na ocelových drátech průměru 0,3 mm a délek $l_1 = 7,90$ cm, $l_0 = 123,1$ cm, $l_2 = 8,20$ cm. Konstanta C této soustavy byla $C = 3,766 \cdot 10^{-3}$. Spřažená kyvadla tvořily dvě tyčinky mosazné délky 24,16 cm, průměru 0,6 cm se dvěma páry posuvných válečků mosazných délky 1,50 cm, průměru 1,95 cm a hmoty $m = 36,1$ g. V následujících autogramech (obr. 4) je zachyceno pět případů spřažených kmitů, které byly napsány cestou fotografickou na autografickém válci (Richard, Paris) s dobou otočky 12 minut. Dolní kyvadlo bylo stálé s periodou $T_2 = 3,685$ sec, u horního kyvadla byl měněn posuvnými válečky moment setrvačnosti a tím i perioda v mezích $T_1 = 3,630$ sec až 7,255 sec. Frekvence spřažených kyvů byla vypočtena podle



Obr. 4.

Autogramy dvou spřažených kyvadel torsních (typ Ia) postupně rozladovaných změnou momentu setrvačnosti u primárního kyvadla (tab. I).

vztahu dříve uvedeného (8), (23)

$$\Omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 + C\omega_1^2\omega_2^2}, \quad (24)$$

$$C = \frac{l_1 l_2}{(l_1 + l_0)(l_2 - l_0)}.$$

Správnost tohoto vztahu možno prokázatí proměřením autogramů, a to z počtu rázů Δn , t. j. $\Omega_1 - \Omega_2 = 2\pi\Delta n$. Na délku celého autogramu, t. j. na dobu 12 minut připadá počet rázů $\Delta N = 12 \cdot 60 \cdot \Delta n$. V tabulce I. jsou uvedeny vlastní periody T_1 a vlastní frekvence ω_1 jednoho ze sprážených kyvadel (druhé z nich zůstávalo nezměněno). V dalších sloupcích tabulky jsou uvedeny frekvence kmitů sprážených Ω_1, Ω_2 a jejich rozdíl, jakož i počet rázů ΔN na celém autogramu. Příslušná hodnota odečtená na autogramech souhlasí zcela uspokojivě s hodnotami vypočtenými.

Tabulka I.

Frekvence sprážených kmitů torsních kyvadel a počet rázů připadajících na dobu 12 minut.

$$T_2 = 3,685 \text{ sec}, \omega_2^2 = 2,9072 \text{ sec}^{-2}.$$

T_1 sec	$\omega_1^2 \text{ sec}^{-2}$	$\Omega_1 \text{ sec}^{-1}$	$\Omega_2 \text{ sec}^{-1}$	$\Delta\Omega \text{ sec}^{-1}$	$\Delta N/12 \text{ min}$
3,630	2,996	1,770	1,664	0,106	12,2
4,065	2,389	1,721	1,528	0,192	22,0
4,354	2,083	1,713	1,434	0,279	32,0
6,210	1,024	1,707	1,009	0,698	80,0
7,255	0,750	1,704	0,8639	0,840	96,3

Počet nulových bodů na autogramu v případě $\omega_1 = \omega_2$ dostaneme obdobnou cestou ze vztahu

$$\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

na jednu sekundu připadá počet nulových bodů $n_1 + n_2$ a počet rázů $n_1 - n_2$. Na jeden ráz připadá tedy nulových bodů $(n_1 + n_2) : (n_1 - n_2)$ a na celý autogram s počtem rázů ΔN připadá nulových bodů $(n_1 + n_2) \Delta N : (n_1 - n_2)$; při tom je

$$(n_1 + n_2) : (n_1 - n_2) = (\Omega_1 + \Omega_2) : (\Omega_1 - \Omega_2).$$

Jest ovšem nutno bráti zřetel i na nulové body související s proměnnou amplitudou; těch je na celém autogramu ΔN . Tyto nulové body splývají s předešlými tehdy, je-li poměr $(\Omega_1 + \Omega_2) : (\Omega_1 - \Omega_2)$ vyjádřen poměrem celých čísel. Ze stálosti nebo nestálosti nulových bodů amplitudy jest ihned patrné, jak oné podmínce je vyhověno. Pro srovnání početních výsledků s pokusem uvádíme zde ještě doplněk k tabulce I.

Tabülka I'.

Součet a rozdíl sprážených frekvencí a počet nulových bodů mezi dvěma minimy amplitudy.

$(\Omega_1 + \Omega_2) \text{ sec}^{-1}$	$(\Omega_1 - \Omega_2) \text{ sec}^{-1}$	$(\Omega_1 + \Omega_2) : (\Omega_1 - \Omega_2)$
3,434	0,106	32,4
3,249	0,192	16,9
3,147	0,279	11,3
2,716	0,698	3,89
2,568	0,840	3,06

Speciální případ sprážených kyvadel torsních, při němž bylo $D_2 = 0$, t. j. $l_2 = \infty$, řešili, jak svrchu naznačeno, Košťál a Koťová. Oba autorové se omezili při tom na případy $l_1 \doteq l_0$, tedy při témž drátu $D_1 \doteq D_0$; proměnné bylo Θ_1 . I při velkých změnách vlastních frekvencí měnil se v těchto případech rozdíl frekvencí sprážených kmitů celkem málo a následkem toho byly autogramy sprážených kmitů poměrně málo od sebe odlišné, jak plyne ze srovnání *obr. 4 a 5* a tabulek I. a II. V důsledku volného spodního konce a dosti těsné vazby obou kyvadel dají se na této soustavě těžko zachytit případy s určitými počátečními podmínkami.

Verifikaci horních vztahů podáme i v tomto případě sprážených kyvadel torsních bez spodního závěsu (*obr. 1b*). Použijeme při tom měření z práce Koťové,¹⁰⁾ při čemž zavedeme naše označení. V citované práci byly měřeny vlastní frekvence kyvadel nespřážených

$$\bar{\omega}_1^2 = \frac{D_1}{\Theta_1}, \quad \bar{\omega}_2^2 = \frac{D_0}{\Theta_2},$$

které jsou s vlastními frekvencemi v naší práci užívanými

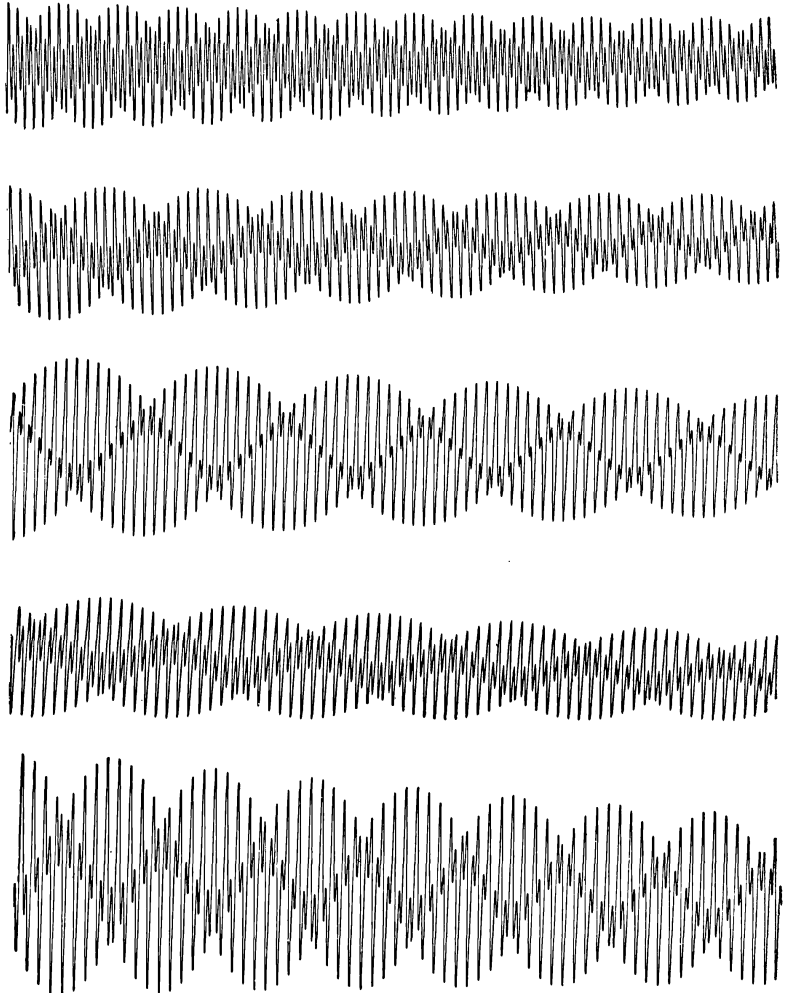
$$\omega_1^2 = \frac{D_1 + D_0}{\Theta_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{D_2 + D_0}{\Theta_2}$$

ve vztahu

$$\omega_1^2 = \bar{\omega}_1^2 + \omega_{1,0}^2, \quad \omega_2^2 = \bar{\omega}_2^2, \quad \omega_{1,0}^2 = D_0/\Theta_1 = \omega_2^2 \cdot \frac{\Theta_2}{\Theta_1}.$$

Dále bylo v onom případě trvale $D_2 = 0$ (soustava bez spodního závěsu). Z konstant sprážených soustav uvádíme délky závěsného drátu ocelového 0,5 mm průměru a to v našem označení $l_1 = 21,6$ cm, $l_0 = 35,0$ cm; je tedy konstanta soustavy $C = l_1 : (l_1 + l_0)$. Poukazující v ostatním na uvedenou práci, podáváme

¹⁰⁾ L. c.



Obr. 5.

Autogramy dvou spřažených kyvadel torsních (typ 1b); měněn moment setrvačnosti jednoho kyvadla (tab. II).

tabulku II. s přepočtenými hodnotami pro frekvenci vlastních a spřažených kmitů a počet rázů ΔN připadající na celou délku autogramu, která v tomto případě byla 100 minut. Hodnota ΔN jest opět v dobrém souhlasu s hodnotou odečtenou na autogramech,

z nichž zde z citované práce uvádíme jenom část (obr. 5), pokud je třeba na srovnání pokusu s výpočty.¹¹⁾

Tabulka II.

Frekvence sprzęžených kmitů torsních kyvadel bez spodního závěsu a počet rázů připadajících na 100 minut.¹²⁾

$$T_2 = 25,98 \text{ sec}, \omega_2^2 = 1,4617 \cdot 10^{-2} \text{ sec}^{-2},$$

$$\Theta_2 = 1,008 \cdot 10^6 \text{ abs. j.}$$

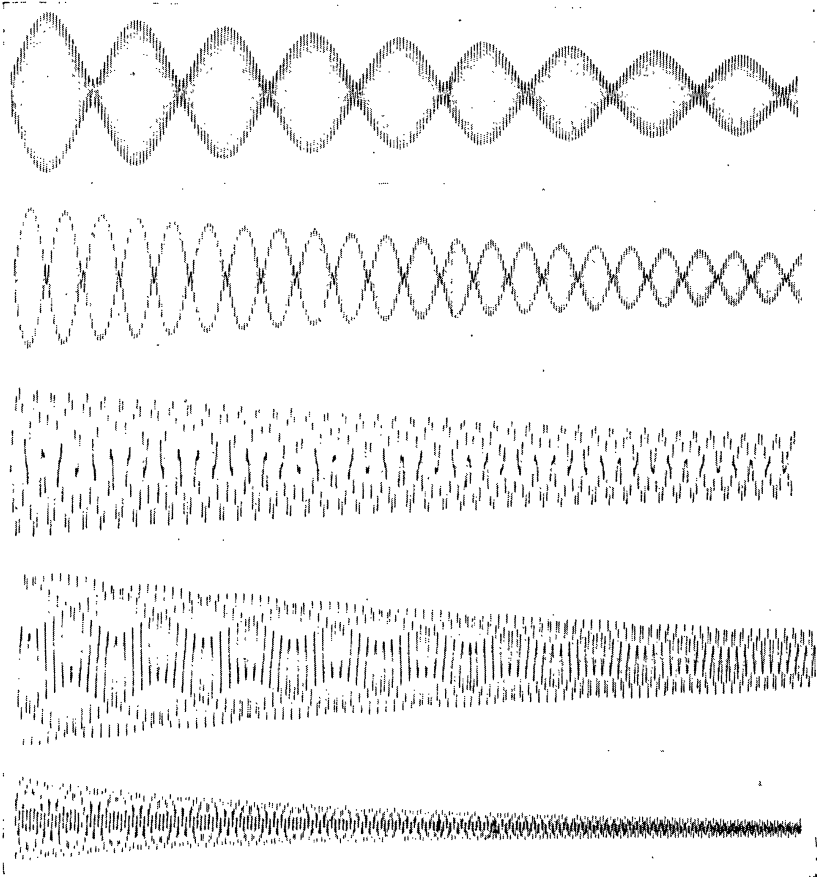
$\Theta_1 \cdot 10^{-6}$ abs. j.	\bar{T}_1 sec	$\omega_1^2 \cdot 10^{-2}$ sec ⁻²	$\Omega_1 \cdot 10^2$ sec ⁻¹	$\Omega_2 \cdot 10^2$ sec ⁻¹	$\Delta\Omega \cdot 10^2$ sec ⁻¹	$\frac{\Delta N}{100 \text{ min.}}$
1,601	25,97	2,384	17,78	8,260	9,52	90,7
2,052	29,23	1,873	16,46	7,903	8,56	81,5
2,521	32,48	1,520	15,53	7,548	7,98	76,1
2,899	34,63	1,331	15,03	7,296	7,73	73,7
3,772	38,97	1,041	14,29	6,788	7,50	71,5

V obou předešlých soustavách sprzęžených kyvadel torsních zůstávají délky l_1, l_0, l_2 a tím i pružnosti závěsů stálé, měněn byl jen moment¹³⁾ setrvačnosti Θ_1 při stálém momentu Θ_2 a z hodnot vlastních frekvencí ω_1, ω_2 a z hodnoty konstanty C související s vazbou byly počítány frekvence kmitů sprzęžených Ω_1, Ω_2 , jejich rozdíl $\Delta\Omega$ a počet rázů ΔN , připadající na celou délku autogramu.

¹¹⁾ Forma rovnic Lagrangeových (3) poukazuje k tomu, že je vhodné čítat a měřit vlastní frekvence resp. periody obou sprzęžených soustav tak, že jedno z kyvadel kývá a druhé je současně zabrzděno (6). Koeficienty E_{11}, E_{12}, E_{22} zavedené v práci Koťové mají pak význam pružnosti v torsi a to $E_{11} = D_1 + D_0$, jak správně uvedl ve své práci Košťál (a nikoli jen D_1); dále jest $E_{22} = D_0 + D_2, E_{12} = E_{21} = -D_0$. Na nutnou platnost vztahu $E_{12} = E_{21}$ poukázal při jedné diskusi Košťál. Jestli měření Koťové nevedla k tomuto výsledku, možno to vysvětliti tím, že u sprzęžených kyvadel torsních bez spodního závěsu není možno ani při největší pozornosti vykonati dostatečně přesná měření jak kyvů vlastních tak sprzęžených. Vedle kyvů elastických vystupují zde rušivé i kyvy gravitační, hlavně na počátku pohybu, čímž jednoduché výsledky jsou pozměněny. K uspokojivým výsledkům při soustavě bez spodního závěsu možno dospěti tak, že z naměřených period obou ještě nesprážených, t. j. vzájemně ještě oddělených kyvadel vypočteme vlastní periody obou kyvadel sprzęžených, jak to bylo provedeno při zpracování tabulky II.

¹²⁾ V této tabulce značí \bar{T}_1, T_2 půlperiody.

¹³⁾ Podobným případem $\Theta_1 = \Theta_2$ zabýval se Gans a po jeho příkladu Kučera u sprzęžených kyvadel Oberbeckových (R. H. Weber u. R. Gans, Repertorium der Physik I., 184, Leipzig 1915; B. Kučera, Mechanika tuhých hmot, 277, Praha 1921).



Obr. 6.

Autogramy dvou spřažených kyvadel torsních (typ 1a) o stejných momentech setrvačnosti a stejných pružnostech krajních závěsů; měněna byla pružnost závěsu středního — spřažení.

Jde v celku o vztahy v rovnici (24), z nichž vyplývá

$$\left(\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} \right)^2 = \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4C\omega_1^2\omega_2^2}. \quad (25)$$

Zavedeme-li sem poměr frekvencí vlastních V a spřažených S , dostáváme z předešlého

$$1 - C = \frac{(V^2 + 1)^2 S^2}{(S^2 + 1)^2 V^2}. \quad (25')$$

Tato rovnice dovoluje při daném C a V určit S , případně k danému C a S určit V , anebo konečně k daným V a S určit C . Pro frekvence V a S jsou vztahy kvadratické, pro konstantu C lineární. Hodnota C může se pohybovat v mezích 0 až 1 podle hodnot l_1, l_0, l_2 . Budiž ještě uvedeno, že koeficient C , souvisící se sprážením mezi oběma kyvadly, možno určit z rozdílu sprážených frekvencí $\Omega_1 - \Omega_2$ (počet rázů). Z rovnic (8), (24) plyne totiž

$$(\Omega_1 - \Omega_2)^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2\sqrt{1 - C}.$$

Zcela obdobné poměry, jaké jsou vyznačeny na obr. 4 a v tabulce I, vyskytují se i v případě, kdy měníme sprážení změnou D_0 , t. j. délky l_0 . Autogramy na obr. 6 byly zachyceny na soustavách kyvadel torsních, jejichž momenty setrvačnosti zůstávaly stejné, rovněž i pružnosti krajních závěsů ($l_1 = 5$ cm, $l_2 = 5$ cm) a měněna byla jen délka středního závěsu l_0 a to postupně v hodnotách: 150 cm, 75 cm, 35 cm, 15 cm, 5 cm.

Podobnou úlohu sprážených kmitů hmot vázaných třemi spirálami, napjatými ve směru vodorovném, řešil Stockmann.¹⁴⁾ Jak teoreticky tak i prakticky je problém sprážených kyvadel torsních jednodušší a při tom vede k lepší shodě pokusných výsledků s počtem, než v případě sprážených kmitů hmot vázaných spirálami, anebo sprážených kyvadel gravitačních, jak jich použil Oberbeck.¹⁵⁾ Obzvláštní výhoda kyvadel torsních proti kyvadlům gravitačním resp. elastickým (s kmity podélnými) záleží v tom, že doba kmitu nezávisí na amplitudě a že tedy není třeba omezit se na kmit s malou amplitudou. Podáváme v té věci autogram kmitů sprážených kyvadel torsních s amplitudou malou a velkou (obr. 7); z polohy nulových minim je patrné, že frekvence zůstaly na amplitudě nezávislé.

Složitější případy sprážených kmitů nastávají, jde-li o tři nebo více sprážených okruhů. Tak na př. při třech sprážených kyvadlech torsních nad sebou na jednom drátě zavěšených o momentech setrvačnosti $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ a o pružnosti závěsů D_1, D_{12}, D_{23}, D_3 o délkách l_1, l_{12}, l_{23}, l_3 (konec spodního závěsu je rovněž pevný) jde o řešení momentových rovnic¹⁶⁾ Lagrangeových

$$\begin{aligned} \Theta_1 \varphi''_1 &= -D_1 \varphi_1 + D_{12} (\varphi_2 - \varphi_1), \\ \Theta_2 \varphi''_2 &= D_{12} (\varphi_1 - \varphi_2) + D_{23} (\varphi_3 - \varphi_2), \\ \Theta_3 \varphi''_3 &= -D_3 \varphi_3 + D_{23} (\varphi_2 - \varphi_3). \end{aligned} \quad (26)$$

¹⁴⁾ W. Stockmann, Phys. ZS., **31** (1930), 939.

¹⁵⁾ A. Oberbeck, Ann. d. Phys., **34** (1888), 1041; M. Wien, Ann. d. Phys., **61** (1897), 151.

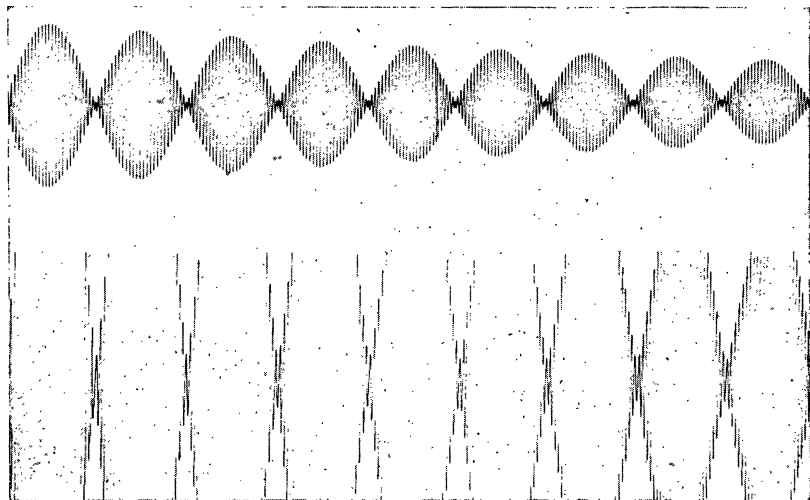
¹⁶⁾ Rovnice energie je v tomto případě:

$$\frac{1}{2} D_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} D_3 \varphi_3^2 + \frac{1}{2} D_{12} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} D_{23} (\varphi_2 - \varphi_3)^2 = A^2.$$

Řešení těchto rovnic

$$\varphi_k = a_k \sin \Omega t, \quad k = 1, 2, 3$$

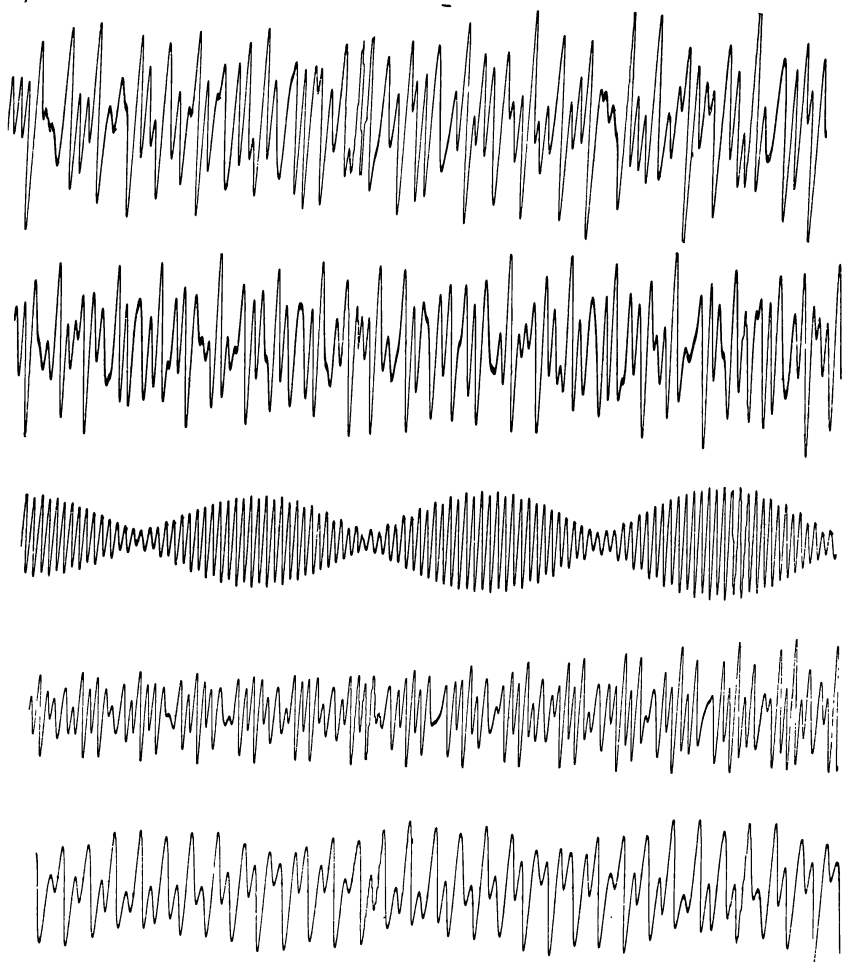
vede ke třem lineárním rovnicím pro amplitudy a_1, a_2, a_3 ; vyloučením jich dostáváme rovnici stupně 6. pro frekvenci sprzęžených kmitů Ω , což značí, že uvedená soustava má obecně tři frekvence sprzęžené $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.



Obr. 7.

Autogramy dvou sprzęžených kyvadel torsních s malou a velkou amplitudou — nezávislost periody na amplitudě.

V případě n sprzęžených kyvadel torsních na jednom svislém drátě v délkách $l_{0,1}, l_{1,2}, l_{2,3}, \dots, l_{n-1,n}, l_{n,0}$ zavěšených dostaneme charakteristickou rovnici pro sprzęžené frekvence stupně $2n$ -tého. Taková soustava má obecně n frekvencí sprzęžených kmitů Ω_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$ (n kořenů charakteristické rovnice je totiž záporných). Značné zjednodušení nastane v předešlých případech, je-li moment setrvačnosti všech kyvadel stejný a rovněž pružnosti D buď všechny stejné, anebo $D_{0,1} = D_{n,0}, D_{1,2} = D_{2,3} = \dots = D_{n-1,n}$ a dále $D_{0,1} = kD_{1,2}$. Nebudeme se podrobně zabývat těmito případy, uvádíme jen k vůli zajímavosti autogramy tří sprzęžených soustav a to: a) $l_{0,1} = l_{1,2} = l_{2,3} = l_{3,0}$, b) $l_{1,2} = l_{2,3} = 2l_{0,1} = 2l_{3,0}$, c) $l_{1,2} = l_{2,3} \gg l_{0,1}, l_{0,1} = l_{3,0}$, d) čtyř sprzęžených kyvadel stejně dlouhých a e) pěti sprzęžených kyvadel rovněž stejně dlouhých (obr. 8). Ve všech případech byly stejné momenty setr-



Obr. 8.

Autogramy více spřažených kyvadel torsních a to tři (a, b, c), čtyř (d), pěti (e); momenty setrvačnosti byly vesměs stejné.

vačnosti. Doba celého autogramu byla 12 minut. Dalším rozborem těchto případů nebudeme se v této práci zabývat.

Tato práce byla umožněna podporou z jubilejního fondu Národní Rady Badatelské pro rok 1941.

Obrázky J. Zahradníček. Archiv JČMF.

*

Ungedämpfte Schwingungen zweier gekoppelter Torsionspendel.

(Auszug aus dem vorstehenden Artikel.)

Es werden gekoppelte Schwingungen zweier ungedämpfter Torsionspendel beschrieben, welche an einem oben und unten befestigten Stahldraht in einer Vertikale aufgehängt sind (Abb. 1a). Wenn D_1, D_0, D_2 die Torsionselastizitäten der Aufhängungsdrähte von den Längen l_1, l_0, l_2 bedeuten, wenn Θ_1, Θ_2 die Trägheitsmomente der Pendel und φ, χ ihre Ablenkungen aus der Gleichgewichtslage sind, dann gelten für die gekoppelten Pendel folgende Lagrange'schen Gleichungen

$$\Theta_1 \varphi'' + D_1 \varphi + D_0 (\varphi - \chi) = 0, \quad \Theta_2 \chi'' + D_2 \chi + D_0 (\chi - \varphi) = 0;$$

für $\chi = 0$ bzw. $\varphi = 0$ sind die Eigenfrequenzen

$$\omega_1^2 = \frac{D_1 + D_0}{\Theta_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{D_2 + D_0}{\Theta_2},$$

für die Kopplungsfrequenzen gilt die Gleichung

$$\Omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \Omega^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 - \frac{D_0^2}{\Theta_1 \Theta_2} = 0.$$

Statt des letzten Gliedes kann mit Rücksicht auf die Eigenfrequenzen

$$C \omega_1^2 \omega_2^2 = \frac{D_0^2}{(D_1 + D_0)(D_2 + D_0)} \omega_1^2 \omega_2^2,$$

bzw. wenn die Aufhängungsdrähte von gleichem Durchmesser sind,

$$C = \frac{l_1 l_2}{(l_1 + l_0)(l_2 + l_0)}$$

gesetzt werden. Es ist nämlich das Drehmoment — Torsionselastizität —

$$D = F \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^4}{l},$$

wo F den Drillungsmodul des Drahtes bedeutet. Für die Kopplungsfrequenzen erhalten wir den Ausdruck

$$\Omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 + C \omega_1^2 \omega_2^2}.$$

Die Giltigkeit dieses Ausdruckes wird an zwei Versuchsreihen geprüft. In einer Reihe waren die Pendellängen $l_1 = 7,90$ cm, $l_0 = 123,1$ cm, $l_2 = 8,30$ cm ($2r = 0,3$ mm Stahldraht), die Konstante $C = 3,76_6 \cdot 10^{-3}$. Die Pendelkörper bestanden aus zwei Messingstäbchen von der Länge 24,16 cm und dem Durchmesser

0,6 cm, an welchen zwei Messingzylinder von der Masse 36,1 g (Länge 1,50 cm, Durchmesser 1,95 cm) verschiebbar eingesetzt wurden, um die Eigenfrequenzen von verschiedenen Werten zu erhalten. Das untere Pendel hatte die Periode $T_2 = 3,685$ sec konstant, beim oberen Pendel wurde durch verschiebbare Massen das Trägheitsmoment geändert und dadurch wurden die Eigenperioden zwischen den Werten $T_1 = 3,630$ sec bis zu 7,255 sec erzielt. Aus der Schwebungszahl (Δn in einer Sekunde und darum $\Delta N = 12.60\Delta n$ während der Dauer des ganzen Autogrammes) wurde befriedigende Übereinstimmung der Messungen mit der Rechnung erhalten (I. Tabelle, Abb. 4). In der II. Tabelle sind die früher im physikalischen Institut vollzogenen Messungen*) nach dem Oberen umgerechnet und es wurde wieder befriedigende Übereinstimmung der Theorie mit Versuch erwiesen. In der zweiten Versuchsreihe handelte es sich um zwei gekoppelte Torsionspendel, bei denen der untere Aufhänge draht fehlte ($l_2 = \infty$, Abb. 1b). Die Konstanten der Pendel und die Meßergebnisse sind in der II. Tab. enthalten.

*) R. Kořtová, Schriften der naturwiss. Fakultät der Masaryk Univ., Nr. 216, Brünn 1935.