Vojtěch Jarník

Věty o střední hodnotě z teorie mřížových bodů. 6. pojednání

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 70 (1941), No. 3-4, 89--103

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122288`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČAST MATEMATICKÁ

Věty o střední hodnotě z teorie mřížových bodů. 6. pojednání.[1])

Vojtěch Jarník, Praha.

(Došlo dne 5. října 1940.)

§ 1. Výsledky.

V celém článku budiž stále r celé, $r > 1$,

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2 \quad (\alpha > 0). \tag{1}$$

Pro reálné b budiž ξ^b ona větev, regulární v komplexní rovině ξ, nařízuté podél záporné reálné osy, která je kladná pro $\xi > 0$. Místo e^ξ píši příležitostně též $\exp \xi$. Znakem C označuji kladná čísla, závislá pouze na Q (t. j. na $r, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$). Znakem B označuji komplexní čísla (jež mohou záviseti na libovolných parametrech), jejichž absolutní hodnota je menší než nějaké C. Různá B, C nerozlišuji indexy. Pro $x > 0$ budiž $A(x)$ počet mřížových bodů $(u_1, \ldots, u_r)$ v elipsoidu $Q(u) \leq x$;

$$\mathsf{P}(x) = \mathsf{P}_Q(x) = A(x) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)}, \quad M(x) = \int_0^x \mathsf{P}^2(y)\,dy,$$

$$M_2(x) = \int_0^x M(y)\,dy.$$

Jsou-li všechna α_j celá, jest[2])

[1]) Práce téhož názvu jsem otiskl v těchto časopisech: Math. Zeitschr. **33** (1931), str. 62—84, str. 85—97; **36** (1933), str. 581—617; Věstník Král. Č. Sp. Nauk 1931 (17 stran); Časopis **69** (1940), str. 148—174. V dalším je cituji znaky I až V.

[2]) Vzorce (2), (3), (4) — a ještě mnohem více — najdete v V; pocházejí od Craméra, Landaua, Walfisze a ode mne.

$$0 < \lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^{3/2}} < \infty \text{ pro } r = 2, \tag{2}$$

$$0 < \lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^2 \log x} < \infty \text{ pro } r = 3, \tag{3}$$

$$0 < \lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^{r-1}} < \infty \text{ pro } r > 3. \tag{4}$$

Vzorce (2), (3), (4) platí ovšem též tehdy, jsou-li všechny podíly

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_k} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, r) \tag{5}$$

racionální, t. j. jsou-li všechna čísla α_j celistvými násobky jistého kladného čísla α (neboť zřejmě je $\mathsf{P}_{\alpha Q}(x) = \mathsf{P}_Q(x : \alpha)$).

Je-li však aspoň jedno z čísel (5) iracionální, jest — na rozdíl od (4) —

$$\lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^{r-1}} = 0 \text{ pro } r > 3.\text{[3]} \tag{6}$$

Konečně pro případy $r = 2, 3$ dokážeme zde:[4])

$$0 < \liminf_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^{3/2}} \leqq \limsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^{3/2}} < \infty \text{ pro } r = 2, \tag{7}$$

$$0 < \liminf_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^2}; \ \limsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^2 \log x} < \infty \text{ pro } r = 3. \tag{8}$$

Zde je zvláště zajímavé srovnání formulí (4), (6) s formulí (7): kdežto pro $r > 3$ je $M(x)$ v „iracionálním“ případě vždy veličinou *nižšího* řádu než v „racionálním“ případě, má $M(x)$ pro $r = 2$ v obou případech řádově *touž* velikost. Pro $r = 3$ nemá výsledek tak definitivní charakter. Dosud bylo známo pro $r = 2, 3$ toto:[5])

$$\left.\begin{aligned} &0 < \liminf_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^{3/2}}, \ \limsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^{3/2} \log^4 x} < \infty \text{ pro } r = 2,\\ &0 < \liminf_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^2}, \ \limsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x^2 \log^2 x} < \infty \text{ pro } r = 3. \end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

K důkazu vzorců (7), (8) stačí tedy úplně, dokážeme-li (pro *libovolná* $\alpha_j > 0$) toto:

Hlavní věta. *Budiž* $2 \leqq r \leqq 3$. *V celém článku budiž* $\varphi(x) = x^{3/2}$ *pro* $r = 2$, $\varphi(x) = x^2 \log x$ *pro* $r = 3$. *Potom je* $M(x) = O(\varphi(x))$.

[3]) Viz IV.

[4]) Při tom jsou α_j libovolná kladná (racionální nebo iracionální) čísla.

[5]) Viz I. V práci I, str. 81, ř. 7 je toto přepsání: místo $Q(u)$ má tam býti forma inversní ke $Q(u)$.

K tomu cíli stačí pak dokázati toto:

1. pomocná věta. *Pro* $2 \leqq r \leqq 3$ *je* $M_2(x) = O(x\,\varphi(x))$.

Z této pomocné věty plyne vskutku (ježto $M(x)$ je neklesající funkce)

$$0 \leqq M(x) \leqq \frac{1}{x} \int\limits_x^{2x} M(y)\,\mathrm{d}y \leqq \frac{1}{x} M_2(2x) = O(\varphi(2x)) = O(\varphi(x)). \tag{8b}$$

1. pomocnou větu dokážeme metodou, příbuznou metodě pojednání V. Odkazy ku V provádím takto: pomocná věta 7, V, vzorec (21, V) znamená pomocnou větu 7, po příp. vzorec (21) z V atd.

§ 2. Důkaz 1. pomocné věty.

Až do konce budiž stále $x > 2$, $2 \leqq r \leqq 3$. Pro $\Re s > 0$ budiž

$$\vartheta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s}, \quad F(s) = \prod_{j=1}^{r} \vartheta(\alpha_j s) - \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, s^{\frac{r}{2}}}; \tag{9}$$

$$A = \operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq r} \frac{2\pi}{\alpha_j}, \quad \lambda = \frac{A}{\sqrt{x}}. \tag{10}$$

2. pomocná věta. *Pro* $s = \frac{1}{x} + ti$, $s' = \frac{1}{x} + t'i$ *(*t, t' *reálná),* $j = 1, 2, \ldots, r$ *položme*

$$G_j(s) = (|\,\vartheta(\alpha_j s)\,| + |\,s^{-\frac{1}{2}}\,|)^r, \tag{11}$$

$$I_1(x) = \int\limits_0^{2\lambda}\int\limits_0^{2\lambda} \left|\frac{F(s)\,F(s')}{ss'}\right| \frac{x\,\mathrm{d}t\;x\,\mathrm{d}t'}{(1 + x\,|\,t - t'\,|)^2}, \tag{12}$$

$$I_{2,j}(x) = \int\limits_0^{\lambda} \left|\frac{F(s')}{s'}\right| \left(\int\limits_{2\lambda}^{\infty} \left|\frac{G_j(s)}{s}\right| \frac{x\,\mathrm{d}t}{(1 + x\,|\,t - t'\,|)^2}\right) x\,\mathrm{d}t', \tag{13}$$

$$I_{3,j}(x) = \int\limits_{\lambda}^{\infty}\int\limits_{\lambda}^{\infty} \left|\frac{G_j(s)\,G_j(s')}{ss'}\right| \frac{x\,\mathrm{d}t\;x\,\mathrm{d}t'}{(1 + x\,|\,t - t'\,|)^2}. \tag{14}$$

Potom je pro $x > C$

$$M_2(x) = B\left(I_1(x) + \sum_{j=1}^{r} I_{2,j}(x) + \sum_{j=1}^{r} I_{3,j}(x) + x\right). \tag{15}$$

Důkaz (všechno pro $x > C$). Jest

$$|e^{x(s+s')}| = e^2, \quad |s+s'| = \left|\frac{2}{x} + i(t+t')\right| > \frac{C}{x}(1 + x\,|t+t'|). \tag{16}$$

Klademe-li v pom. větě 2, V $a = b = x^{-1}$ (srovnej (11, V) s (9)), plyne podle (16)

$$M_2(x) = B\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{F(s)\,F(s')}{ss'}\right|\frac{x\,\mathrm{d}t\,x\,\mathrm{d}t'}{(1 + x\,|t+t'|)^2} + Bx. \tag{17}$$

Integrand v (17) se nezmění, vyměníme-li t s t' nebo píši-li $-t$, $-t'$ místo t, t'; píši-li $-t'$ místo t', nezmění se $|s'^{-1}F(s')|$. Konečně: mají-li t, t' totéž znamení, zmenší se $|t+t'|$, píši-li $-t'$ místo t'. Tedy jest (týž integrand jako v (17))

$$M_2(x) = B\int\limits_0^{\infty}\Bigl(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\,\mathrm{d}t'\Bigr)\,\mathrm{d}t + Bx = B\int\limits_0^{\infty}\Bigl(\int\limits_{-\infty}^{0}\ldots\,\mathrm{d}t'\Bigr)\,\mathrm{d}t + Bx. \tag{17a}$$

Píši-li v posledním integrálu $-t'$ místo t', dostávám

$$M_2(x) = B\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\left|\frac{F(s)\,F(s')}{ss'}\right|\frac{x\,\mathrm{d}t\,x\,\mathrm{d}t'}{(1 + x\,|t-t'|)^2} + Bx. \tag{18}$$

Tedy (s týmž integrandem jako v (18))

$$\begin{aligned} M_2(x) = B\Bigl(&\int\limits_0^{2\lambda}\int\limits_0^{2\lambda}\ldots\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t' + \int\limits_0^{\lambda}\Bigl(\int\limits_{2\lambda}^{\infty}\ldots\,\mathrm{d}t'\Bigr)\,\mathrm{d}t + \\ &+ \int\limits_0^{\lambda}\Bigl(\int\limits_{2\lambda}^{\infty}\ldots\,\mathrm{d}t\Bigr)\,\mathrm{d}t' + \int\limits_{\lambda}^{\infty}\int\limits_{\lambda}^{\infty}\ldots\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'\Bigr) + Bx \end{aligned} \tag{19}$$

(že část integračního oboru je dvojnásob pokryta, ovšem nevadí). Zde je třetí integrál roven druhému; užijeme-li ještě věty o aritmetickém a geometrickém středu

$$\begin{aligned} F(s) &= B\prod_{j=1}^{r}(|\vartheta(\alpha_j s)| + |s^{-\frac{1}{2}}|) = B\sum_{j=1}^{r} G_j(s), \\ F(s)\,F(s') &= B\prod_{j=1}^{r}((|\vartheta(\alpha_j s)| + |s^{-\frac{1}{2}}|)(|\vartheta(\alpha_j s')| + |s'^{-\frac{1}{2}}|)) = \\ &= B\sum_{j=1}^{r} G_j(s)\,G_j(s'), \end{aligned} \tag{19a}$$

plyne (15) z (19).

3. pomocná věta. *Pro* $0 \leq t \leq 2Ax^{-\frac{1}{2}} = 2\lambda$, $s = x^{-1} + ti$, $x > C$ *jest* $s^{-1}F(s) = Bx^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}$.

Důkaz. Viz II, str. 89. Lze jej též rekonstruovati z důkazu pomocné věty 5, V.

4. pomocná věta. $I_1(x) = O(x\,\varphi(x))$.

Důkaz. (12), 3. pom. věta a (10) dávají pro $x > C$

$$I_1(x) = Bx^{\frac{r}{2}+1}\int_0^{2\lambda}\left(\int_0^{2\lambda}\frac{x\,\mathrm{d}t'}{(1+x\,|\,t-t'\,|)^2}\right)x\,\mathrm{d}t = \tag{19b}$$

$$= Bx^{\frac{r}{2}+1}\int_0^{2\lambda}x\,\mathrm{d}t\,.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,\mathrm{d}u}{(1+x\,|\,u\,|)^2} = Bx^{\frac{r}{2}+\frac{3}{2}} = Bx\,\varphi(x).$$

* * *

Až do konce budiž j $(1 \leqq j \leqq r)$ libovolně (ale pevně) zvoleno. Pro zkrácení pišme α, $G(s)$, $I_2(x)$, $I_3(x)$ místo α_j, $G_j(s)$, $I_{2,j}(x)$, $I_{3,j}(x)$. Všechny zlomky $h : k$, kde h, k jsou celá, $h \gtreqless 0$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$, $\{h, k\} = 1$, nazveme Fareyovými zlomky ($\{h, k\}$ značí největší společnou míru čísel h, k). Ke každému Fareyovu zlomku $h : k$ existují právě dva Fareyovy zlomky $h_1 : k_1 < h_2 : k_2$ $(k_j > 0$, $\{h_j, k_j\} = 1$ pro $j = 1, 2)$ tak, že $h : k$ je *jediný* Fareyův zlomek, ležící mezi $h_1 : k_1$, $h_2 : k_2$. Potom položíme $\mathfrak{B}_{h,k} = \left\langle\frac{h+h_1}{k+k_1}, \frac{h+h_2}{k+k_2}\right\rangle$, $\mathfrak{C}_{h,k} = \frac{2\pi}{\alpha}\mathfrak{B}_{h,k}$ (je-li γ reálné, $\mathfrak{M}$ množina reálných čísel, značí $\gamma\mathfrak{M}$ množinu všech γx, kde $x \in \mathfrak{M}$). Jak známo, platí

$$\mathfrak{C}_{h,k} = \left\langle\frac{2\pi}{\alpha}\frac{h}{k} - \frac{2\pi\vartheta_1}{\alpha k\sqrt{x}}, \frac{2\pi}{\alpha}\frac{h}{k} + \frac{2\pi\vartheta_2}{\alpha k\sqrt{x}}\right\rangle, \tag{20}$$

$$\tfrac{1}{2} \leqq \vartheta_1 \leqq 1,\ \tfrac{1}{2} \leqq \vartheta_2 \leqq 1.$$

Položíme-li

$$\varrho = \frac{2\pi}{\alpha\,([\sqrt{x}] + 1)} \quad \text{(tedy } 0 < \varrho < \lambda \text{ podle (10)),} \tag{21}$$

je $\mathfrak{C}_{0,1} = \langle -\varrho, \varrho\rangle$. Intervaly $\mathfrak{C}_{h,k}$, vyhovující podmínkám

$$h > 0,\ 0 < k \leqq \sqrt{x},\ \{h, k\} = 1 \tag{22}$$

pokrývají tedy interval $\langle\varrho, +\infty)$, tím spíše tedy interval $\langle\lambda, +\infty)$.

5. pomocná věta. *Nechť platí* (22) *a budiž* $s = x^{-1} + ti$, $t \in \mathfrak{C}_{h,k}$, $x > C$; *klaďme* $\beta = \frac{2\pi}{\alpha}\frac{h}{k}$. *Potom je*

$$Chk^{-1} < t < |\,s\,| < Chk^{-1}, \tag{23}$$

$$G(s) = \frac{Bx^{\frac{r}{2}}}{k^{\frac{r}{2}}(1 + x \mid t - \beta \mid)^{\frac{r}{2}}}. \tag{24}$$

Důkaz (všechno pro $x > C$). (23) plyne (viz (20)) z (22) a ze vztahů

$$h \geqq 1, \; \mid t - \beta \mid \leqq \frac{2\pi}{\alpha k \sqrt{x}}, \; s = \frac{1}{x} + it, \; \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{k\sqrt{x}}. \tag{25}$$

Dále plyne z (25), (22), (23)

$$k(1 + x \mid t - \beta \mid) = B\sqrt{x}, \tag{25a}$$

$$s^{-\frac{1}{2}} = B\sqrt{\frac{k}{h}} = B\sqrt{k} = Bx^{\frac{1}{4}} = B\sqrt{\frac{x}{k(1 + x \mid t - \beta \mid)}}. \tag{26}$$

Z pomocných vět 4, V a 3A, V, aplikovaných na $Q(u) = u^2$, plyne

$$\vartheta(\alpha s) = Bk^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x} + i(t - \beta)\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \exp\left(\frac{-Cm^2x}{k^2(1 + ix(t - \beta))}\right)\right|. \tag{27}$$

Podle (25) jest

$$\Re \frac{x}{k^2(1 + ix(t - \beta))} = \frac{x}{k^2(1 + x^2(t - \beta)^2)} > C, \tag{27a}$$

a tedy je řada v (27) rovna

$$B \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-m^2 C) = B; \tag{27b}$$

odtud a z (26), (27) plyne (24).

Od tohoto místa budeme, jsou-li dána h, k, po příp. h', k', psáti pro zkrácení stále $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}', \beta, \beta'$ místo $\mathfrak{C}_{h,k}, \mathfrak{C}_{h',k'}, \frac{2\pi}{\alpha}\frac{h}{k}, \frac{2\pi}{\alpha}\frac{h'}{k'}$.

6. pomocná věta. $I_2(x) = O(x\,\varphi(x))$.

Důkaz. V integračním oboru integrálu I_2 (viz (13)) jest $t \geqq 2t'$, tedy $t - t' \geqq \frac{1}{2}t$. Ježto intervaly $\mathfrak{C}_{h,k}$, vyhovující podmínkám (22), pokrývají interval $\langle 2\lambda, +\infty)$, je podle pom. vět 3, 5 pro $x > C$

$$I_2(x) = B\int_0^{\lambda} x^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}\,dt' \sum_{h,k} \frac{k^3}{h^3} \int_{\mathfrak{C}} \frac{x^{\frac{r}{2}}\,dt}{k^{\frac{r}{2}}(1 + x \mid t - \beta \mid)^{\frac{r}{2}}}, \tag{27c}$$

kde se sčítá přes h, k s podmínkami (22). Délka $\mathfrak{C}$ je $Bk^{-1}x^{-\frac{1}{2}}$ podle (20); nahradíme-li $1 + x \mid t - \beta \mid$ jedničkou, plyne podle (10)

$$I_2(x) = B\sum_{h,k} x^{\frac{r}{4}+\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} k^{2-\frac{r}{2}} h^{-3} = Bx^{\frac{r}{2}+1} = Bx\,\varphi(x). \tag{27d}$$

7. pomocná věta. $I_3(x) = O(x\,\varphi(x))$.

Důkaz (všechno pro $x > C$). Ježto intervaly $\mathfrak{C}_{h,k}$ s podmínkami (22) pokrývají interval $\langle\lambda, +\infty)$, je podle (14) a podle 5. pom. věty

$$I_3(x) = Bx^r \sum_{h,k,h',k'} \frac{k}{h}\cdot\frac{k'}{h'} \int_{\mathfrak{C}} \left(\int_{\mathfrak{C}'} \frac{x\,\mathrm{d}t'}{k'^{\frac{r}{2}}(1 + x\,|\,t' - \beta'\,|)^{\frac{r}{2}}(1 + x\,|\,t - t'\,|)^2} \right) \times \frac{x\,\mathrm{d}t}{k^{\frac{r}{2}}(1 + x\,|\,t - \beta\,|)^{\frac{r}{2}}}, \tag{28}$$

kde h, k, h', k' probíhá všechny systémy, vyhovující podmínkám (22) a (29):

$$h' > 0,\ 0 < k' \leqq \sqrt{x},\ \{h', k'\} = 1. \tag{29}$$

Položme $I_3(x) = S_1 + S_2$, kde S_1 je součet oněch členů v (28) vpravo, pro něž $h : k = h' : k'$ (tedy $h = h'$, $k = k'$, $\beta = \beta'$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$); S_2 je součet oněch členů, pro něž

$$\frac{h}{k} \neq \frac{h'}{k'}. \tag{30}$$

Odhadněme napřed S_1; nahradíme-li $1 + x\,|\,t' - \beta\,|$ jedničkou, vyjde

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{x\,\mathrm{d}t'}{(1 + x\,|\,t - t'\,|)^2} = B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}u}{(1 + x\,|\,u\,|)^2} = B;$$

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{x\,\mathrm{d}t}{(1 + x\,|\,t - \beta\,|)^{\frac{3}{2}}} = B, \int_{\mathfrak{C}} \frac{x\,\mathrm{d}t}{1 + x\,|\,t - \beta\,|} = \tag{30a}$$

$$= B \int_{-\frac{C}{k\sqrt{x}}}^{\frac{C}{k\sqrt{x}}} \frac{x\,\mathrm{d}u}{1 + x\,|\,u\,|} = B \log \frac{e\sqrt{x}}{k}$$

(viz (20)); tedy pro $r = 3$

$$S_1 = Bx^3 \sum_{h,k} k^{-1}h^{-2} = Bx^3 \log x = Bx\,\varphi(x). \tag{31}$$

Pro $r = 2$ je

$$S_1 = Bx^2 \sum_{h,k} h^{-2} \log \frac{e\sqrt{x}}{k} = Bx^2 \sum_{1 \leqq k \leqq \sqrt{x}} \log \frac{e\sqrt{x}}{k}. \tag{32}$$

Při různých odhadech budeme užívati této známé věty: je-li $a < b$,

$f(u)$ monotonní a $0 \leqq f(u) \leqq K$ pro $a \leqq u \leqq b$, jest

$$\sum_{a \leqq m \leqq b} f(m) \leqq \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u + K. \tag{33}$$

Podle (32) je tedy (substituce $e\sqrt{x}u^{-1} = v$) pro $r = 2$

$$S_1 = Bx^2 \left(\log (e\sqrt{x}) + \int_1^{\sqrt{x}} \log \frac{e\sqrt{x}}{u}\,\mathrm{d}u\right) =$$

$$= Bx^2 (\log x + \sqrt{x} \int_e^{e\sqrt{x}} v^{-2} \log v\,\mathrm{d}v) = Bx^{\frac{5}{2}} = B\,(x\,\varphi(x)) \tag{34}$$

pro $r = 2$.

Zbývá odhadnouti S_2. Ale S_2 je právě výraz (43, V) pro $n = 2$, se stejným sumačním oborem (22), (29), (30); pouze je nutno, násobiti tehdejší $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, β, β' číslem α^{-1}. Čtenář se snadno přesvědčí, že pro $r = 3$ jde všechno doslova stejně jako v pomocné větě 9, V (pro $n = 2$), pouze je nutno v (50, V) a v prvních čtyřech řádkách na str. 164, V psáti $\pi\alpha^{-1}$ místo π; tedy vyjde

$$S_2 = O(x^3) = O(x\,\varphi(x)) \text{ pro } r = 3. \tag{35}$$

Pro $r = 2$ probíhají úvahy rovněž podobně jako v pomocné větě 9, V (pro $n = 2$), pouze některé odhady je nutno provésti jinak (ovšem je nutno provésti též zmíněné dosazení $\pi\alpha^{-1}$ místo π). Proto uvedu v dalším postup důkazu zcela stručně, odkazuje na příslušná místa v V.

Budiž $r = 2$. Jako v V můžeme se omeziti na součet T, složený z oněch členů součtu S_2, pro něž je

$$k' \geqq k. \tag{36}$$

Jako v V rozdělme T na dvě části T_1, T_2 podle (45, V), (46, V). Právě jako tehdy platí v T_1:

1. $k' > C\sqrt{x}$, $h'k'^{-1} > Chk^{-1}$.
2. Je-li dáno h, k, zbývá pro k' nejvýše $C\sqrt{x}k^{-1}$ možností.
3. Je-li dáno h, k, k', zbývá pro h' nejvýše C možností.

Nahradíme-li $1 + x \mid t - \beta \mid$ jedničkou, obdržíme pro integrál (28)

$$\frac{B}{kk'} \int_{\mathfrak{C}'} \left(\int_{\mathfrak{C}} \frac{x\,\mathrm{d}t}{(1 + x \mid t - t' \mid^2)}\right) \frac{x\,\mathrm{d}t'}{1 + x \mid t' - \beta' \mid} =$$

$$= \frac{B}{kk'} \int_{\mathfrak{C}'} \frac{x\,\mathrm{d}t'}{1 + x \mid t' - \beta' \mid} = \frac{B}{kk'} \tag{36a}$$

(neboť délka intervalu $\mathfrak{C}'$ je $Bx^{-\frac{1}{2}}k'^{-1} = Bx^{-1}$ podle (20)); tedy

$$T_1 = Bx^2 \sum_{h,k,h',k'} \frac{k^2}{h^2} \cdot \frac{1}{kk'} = Bx^2 \sum_{h,k} kh^{-2}x^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}k^{-1} = Bx^{\frac{5}{2}} = Bx\,\varphi(x). \tag{37}$$

V T_2 je $|\, t - t' \,| > C \,|\, h : k - h' : k' \,|$ (srovnej ř. 4 na str. 164, V); integrál tedy jest

$$\frac{Bx^{-2}}{kk'} \frac{k^2k'^2}{(hk' - h'k)^2} \int_{\mathfrak{C}'} \frac{x\,\mathrm{d}t'}{1 + x\,|\, t' - \beta' \,|} \int_{\mathfrak{C}'} \frac{x\,\mathrm{d}t}{1 + x\,|\, t - \beta \,|} =$$
$$= \frac{Bx^{-2}\,kk'}{(hk' - h'k)^2} \log \frac{e\sqrt{x}}{k} \log \frac{e\sqrt{x}}{k'} \tag{37a}$$

a zde je $k' \geqq k$. Položíme-li tedy jako v (51, V)

$$U = U(h, k) = \sum_{h',k'} \frac{k'^2}{h'\,(hk' - h'k)^2}, \tag{38}$$

je

$$T_2 = B \sum_{k,h} k^2h^{-1}\,U(h, k) \log^2 \frac{e\sqrt{x}}{k}, \tag{39}$$

(Sumační obor: (22)). Dále jde všechno stejně jako v V až ke vzorci (69, V); rozdělíme U na U_1, U_2 jako v V a obdržíme jako v (69, V) pro $j = 1, 2$

$$U_j(h, k) = \frac{B}{h} \sum_{a=1}^{k} \sum_{k'} k' \left(\frac{k}{a^2} + 1 \right). \tag{39a}$$

Při tom probíhá (jako v V) k' při daném a všechna celá čísla $k \leqq$ $\leqq k' \leqq \sqrt{x}$, jež modulo k mají určitý zbytek q, závislý pouze na h, k, a, j. Tedy je

$$\sum_{k'} k' = B\sqrt{x}\,(\sqrt{x}k^{-1} + 1) = Bxk^{-1}, \tag{39b}$$

$$U_j(h, k) = Bh^{-1} \sum_{a=1}^{k} (xa^{-2} + xk^{-1}) = Bxh^{-1},$$

$$T_2 = Bx \sum_{1 \leqq k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} h^{-2}\,k^2 \log^2 \frac{e\sqrt{x}}{k} \tag{40}$$

(podle (39)). Součet podle h dává B; položíme-li $f(u) =$ $u^2 \log^2 (e\sqrt{x}u^{-1})$, je pro $1 \leqq u \leqq \sqrt{x}$

$$f(u) > 0, \quad \frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u} = 2u \log \frac{e\sqrt{x}}{u} \left(\log \frac{e\sqrt{x}}{u} - 1 \right) \geqq 0; \tag{40a}$$

tedy je (substituce $e\sqrt{x}u^{-1} = v$)

$$\begin{aligned} 0 \leqq \sum_{1 \leqq k \leqq \sqrt{x}} f(k) \leqq x \log^2 e + \int_1^{\sqrt{x}} u^2 \log^2 \frac{e\sqrt{x}}{u} \mathrm{d}u = \\ = x + e^3 x^{3/2} \int_e^{e\sqrt{x}} v^{-4} \log^2 v \, \mathrm{d}v = B x^{3/2}. \end{aligned} \tag{40b}$$

Podle (40) je tedy

$$T_2 = B x^{3/2} = B x \, \varphi(x). \tag{41}$$

7. pomocná věta plyne nyní pro $r = 3$ z (31), (35) a pro $r = 2$ z (34), (37), (41).

Důkaz 1. pomocné věty. Plyne z (15) a z pomocných vět č. 4, 6, 7.

*

Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre.

6. Abhandlung.[1])

(Auszug aus dem vorstehenden Artikel.*)

§ 1. Resultate.

Im Folgenden sei stets r ganz, $r > 1$,

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2 \quad (\alpha_j > 0). \tag{1}$$

Für reelles b bedeute ξ^b denjenigen in der längs der negativen reellen Achse aufgeschnittenen komplexen ξ-Ebene regulären

---

[1]) Ältere gleichgenannte Abhandlungen des Verfassers sind in der Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 62—84, S. 85—97, **36** (1933), S. 581—617, im Věstník Král. Č. Sp. Nauk 1931, 17 S. und im Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **69** (1940), S. 148—174 erschienen; sie werden weiter mit I bis V zitiert.

*) Um aus diesem Auszug den vollständigen deutschen Text zu rekonstruieren, ersetze man die fetten eingeklammerten Nummern durch die entsprechenden Formeln aus dem tschechischen Text; die mit gewöhnlichen Typen gedruckten Nummern bedeuten dann Hinweise im üblichen Sinne; weiter übersetze man pro = für. Z. B. statt „so ist — im scharfen Unterschied zu (4) — (**6**)" soll man lesen: „so ist — im scharfen Unterschied zu (4) —

$$\lim_{x \to \infty} \frac{M(x)}{x^{r-1}} = 0 \text{ für } r > 3.^{3}) \tag{6}$$"

Zweig, der für $\xi > 0$ positiv ist. Statt e^ξ schreibe ich gelegentlich auch $\exp \xi$. Mit C bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, die nur von Q (d. h. von r und von den α_j) abhängen. Mit B bezeichne ich unterschiedslos komplexe Zahlen, die von beliebigen Parametern abhängen dürfen, dem absoluten Betrage nach aber kleiner als ein C sind. Für $x > 0$ sei $A(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte $(u_1, \ldots, u_r)$ im Ellipsoid $Q(u) \leqq x$; P, M, M_2 seien wie im tschechischen Text definiert.

Sind alle α_j ganz, so gilt[2]　　　　(**2**), (**3**), (**4**).

Die Formeln (2), (3), (4) gelten natürlich auch dann, wenn alle Verhältnisse　　　　(**5**)

rational sind, d. h. wenn alle Zahlen α_j ganzzahlige Vielfache einer und derselben Zahl $\alpha > 0$ sind $\left(\text{denn offenbar ist } \mathsf{P}_{\alpha Q}(x) = \mathsf{P}_Q\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)$.

Wenn aber mindestens eine der Zahlen (5) irrational ist, so ist — im scharfen Unterschied zu (4) —　　　　(**6**).

Was die Fälle $r = 2, 3$ betrifft, so wollen wir hier beweisen:[4])

(**7**), (**8**).

Hier ist besonders der Vergleich von (4), (6) mit (7) interessant: während $M(x)$ für $r > 3$ im „irrationalen" Falle stets eine *kleinere* Größenordnung als im „rationalen" Falle hat, hat $M(x)$ für $r = 2$ in allen Fällen *dieselbe* Größenordnung. Im Falle $r = 3$ ist das Resultat nicht so befriedigend; der Vergleich von (8), (3) zeigt nur, daß $M(x)$ im irrationalen Falle *höchstens* dieselbe Größenordnung wie im rationalen Falle hat; und es bleibt in (8) noch eine logarithmische Spanne übrig. Bisher waren für $r = 2, 3$ folgende Resultate bekannt.[5])　　　　(**8a**).

Um (7), (8) zu beweisen, genügt es also vollständig, folgenden Hauptsatz (für *beliebige* $\alpha_j > 0$) zu beweisen:

Hauptsatz. *Es sei* $2 \leqq r \leqq 3$. *Es sei* (hier und auch stets im Folgenden) $\varphi(x) = x^{3/2}$ *für* $r = 2$, $\varphi(x) = x^2 \log x$ *für* $r = 3$. *Dann ist*

$$M(x) = O(\varphi(x)).$$

Und dazu genügt es, folgenden Hilfssatz zu beweisen:

Hilfssatz 1. *Für* $2 \leqq r \leqq 3$ *ist* $M_2(x) = O(x\,\varphi(x))$.

Ist nämlich der Hilfssatz 1 bewiesen, so ist, da $M(x)$ mit wachsendem x nicht abnimmt,　　　　(**8b**).

---

[2]) Die Formeln (2), (3), (4) — und noch viel mehr — findet man in V; sie stammen von Cramér, Landau, Walfisz und mir.　[3]) Vgl. IV.

[4]) Dabei sind die α_j ganz beliebige (rationale oder irrationale) positive Zahlen.

[5]) Vgl. I. Ich benutze diese Gelegenheit, um folgenden Schreibfehler zu berichtigen: in I, S. 81, Z. 7 soll statt $Q(u)$ die zu $Q(u)$ inverse Form stehen.

Wir wollen also Hilfssatz 1 beweisen. Die Methode ist diejenige von V. Ich verweise auf V folgendermaßen: Hilfssatz 7, V, Formel (21, V) bedeutet den Hilfssatz 7 bzw. die Formel (21) aus V usw.

§ 2. Beweis des Hilfssatzes 1.

Im Folgenden sei stets $x > 2$, $2 \leqq r \leqq 3$; für $\Re s > 0$ sei **(9)**, **(10)**.

Hilfssatz 2. *Für* $s = \frac{1}{x} + ti$, $s' = \frac{1}{x} + t'i$ *(t, t' reell), $j = 1, 2, \ldots, r$ setze man* **(11)**, **(12)**, **(13)**, **(14)**.

Dann ist für $x > C$ **(15)**.

Beweis (alles für $x > C$). Es ist **(16)**.

Aus Hilfssatz 2, V mit $a = b = x^{-1}$ (man vergleiche (11, V) mit (9)) folgt wegen (16) **(17)**.

Der Integrand in (17) ändert sich nicht, wenn man t mit t' vertauscht oder wenn man t durch $-t$ und gleichzeitig t' durch $-t'$ ersetzt; ersetzt man t' durch $-t'$, so ändert sich $|s'^{-1} F(s')|$ nicht. Endlich: haben t und t' dasselbe Vorzeichen, so verkleinert man $|t + t'|$, wenn man t' durch $-t'$ ersetzt. Also ist (derselbe Integrand wie in (17)) **(17a)**.

Ersetzt man im letzten Integral t' durch $-t'$, so kommt heraus **(18)**.

Also (mit demselben Integranden wie in (18)) **(19)**.

(daß ein Teil des Integrationsgebietes doppelt überdeckt wird, schadet natürlich nicht). Hier ist das dritte Doppelintegral gleich dem zweiten; benutzt man noch den Satz vom arithmetischen und geometrischen Mittel: **(19a)**,

so folgt (15) aus (19).

Hilfssatz 3. *Für* $0 \leqq t \leqq \frac{2A}{\sqrt{x}} = 2\lambda$, $s = \frac{1}{x} + ti$, $x > C$ *ist*

$$s^{-1} F(s) = B x^{\frac{r}{4} + \frac{1}{2}}.$$

Beweis. Vgl. II, S. 89; man kann übrigens den Beweis auch leicht mit Hilfe des Beweises des Hilfssatzes 5, V rekonstruieren.

Hilfssatz 4. $I_1(x) = O(x\,\varphi(x))$.

Beweis. Nach (12), Hilfssatz 3 und wegen (10) ist für $x > C$ **(19b)**.

* * *

Bis zum Schluß sei der Index j $(1 \leqq j \leqq r)$ irgendwie beliebig (aber fest) gewählt. Zur Abkürzung schreiben wir α, $G(s)$, $I_2(x)$,

$I_3(x)$ statt α_j, $G_j(s)$, $I_{2,j}(x)$, $I_{3,j}(x)$. Wir legen auf die reelle Achse alle Brüche $\frac{h}{k}$, wo h, k ganz, $h \gtreqless 0$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$, $\{h, k\} = 1$ ($\{h, k\}$ bedeutet den größten gemeinsamen Teiler von h, k) und nennen sie Fareybrüche. Zu jedem Fareybruch hk^{-1} gibt es genau ein Paar von Fareybrüchen $h_1k_1^{-1}$, $h_2k_2^{-1}$ ($k_j > 0$, $\{h_j, k_j\} = 1$ für $j = 1, 2$) mit $h_1k_1^{-1} < hk^{-1} < h_2k_2^{-1}$, sodaß zwischen $h_1k_1^{-1}$, $h_2k_2^{-1}$ genau ein Fareybruch, nämlich hk^{-1}, liegt. Dann bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}_{h,k}$ das abgeschlossene Intervall $\left\langle \frac{h+h_1}{k+k_1}, \frac{h+h_2}{k+k_2} \right\rangle$ und setzen $\mathfrak{C}_{h,k} = \frac{2\pi}{\alpha}\mathfrak{B}_{h,k}$ (ist γ reell, $\mathfrak{M}$ eine Menge reeller Zahlen, so bedeutet $\gamma\mathfrak{M}$ die Menge aller Zahlen γz mit $z \in \mathfrak{M}$). Bekanntlich ist

(20).

Wird

$$\varrho = \frac{2\pi}{\alpha\,([\sqrt{x}]+1)} \quad (\text{also } 0 < \varrho < \lambda \text{ wegen } (10)) \tag{21}$$

gesetzt, so ist $\mathfrak{C}_{0,1} = \langle -\varrho, \varrho \rangle$. Die Intervalle $\mathfrak{C}_{h,k}$ mit

(22)

überdecken also offenbar das Intervall $\langle \varrho, +\infty)$, also umsomehr das Intervall $\langle \lambda, +\infty)$.

Hilfssatz 5. *Es gelte* (22) *und es sei* $s = \frac{1}{x} + ti$, $t \in \mathfrak{C}_{h,k}$, $x > C$. *Zur Abkürzung setze man* $\beta = \frac{2\pi}{\alpha}\frac{h}{k}$. *Dann ist* **(23)**, **(24)**.

Beweis (alles für $x > C$). (23) folgt sofort (vgl. (20)) aus (22) und

(25).

Weiter folgt aus (25), (22), (23) **(25a)**, **(26)**.

Aus den Hilfssätzen 4, V und 3A, V folgt (wenn man sie auf die Form $Q(u) = u^2$ anwendet) **(27)**.

Nun ist nach (25) **(27a)**,

also ist die Summe in (27) gleich **(27b)**;

daraus und aus (26) und (27) folgt (24).

Im Folgenden, wenn h, k oder h', k' gegeben sind, schreibe man zur Abkürzung $\mathfrak{C}$ statt $\mathfrak{C}_{h,k}$, $\mathfrak{C}'$ statt $\mathfrak{C}_{h',k'}$, β statt $\frac{2\pi}{\alpha}\frac{h}{k}$, β' statt $\frac{2\pi}{\alpha}\frac{h'}{k'}$.

Hilfssatz 6. $I_2(x) = O(x\,\varphi(x))$.

Beweis. Im Integrationsgebiet von I_2 (vgl. (13)) ist $t \geqq 2t'$, also $t - t' \geqq \frac{1}{2}t$. Bedenkt man, daß die Intervalle $\mathfrak{C}_{h,k}$ mit (22) das Intervall $\langle 2\lambda, +\infty)$ überdecken, so hat man nach Hilfssatz 3, 5 für $x > C$ **(27c)**,

wo über alle h, k mit (22) summiert wird. Die Länge von $\mathfrak{C}$ ist $Bk^{-1}x^{-\frac{1}{2}}$ (vgl. (20)); wegen (10) bekommt man also, wenn man $1 + x \mid t - \beta \mid$ im Integranden durch 1 ersetzt, **(27d)**.

Hilfsatz 7. $I_3(x) = O(x\,\varphi(x))$.

Beweis (alles für $x > C$). Bedenkt man, daß die Intervalle $\mathfrak{C}_{h,k}$ mit (22) das Intervall $\langle \lambda, +\infty)$ überdecken, so hat man nach (14) und Hilfssatz 5 **(28)**,

wo h, k, h', k' alle Zahlensysteme mit (22) und **(29)**

durchläuft. Man setze $I_3(x) = S_1 + S_2$, wo S_1 die Summe aller Glieder rechts in (28) mit $hk^{-1} = h'k'^{-1}$ (also $h = h'$, $k = k'$, $\beta = \beta'$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$) bedeutet; S_2 ist die Summe aller Glieder mit

(30).

Man schätze zunächst S_1 ab; im Doppelintegral ersetze man $1 + {} + x \mid t' - \beta \mid$ durch 1; es kommt heraus **(30a)**

(vgl. (20)); also für $r = 3$ **(31)**.

Für $r = 2$ ist **(32)**.

Bei mehreren Abschätzungen benutzen wir folgende wohlbekannte Tatsache: ist $a < b$, $f(u)$ monoton und $0 \leqq f(u) \leqq K$ für $a \leqq u \leqq b$, so ist **(33)**.

Daher ist nach (32) (Substitution $e\sqrt{xu^{-1}} = v$) **(34)**

für $r = 2$.

Es bleibt noch übrig, S_2 abzuschätzen. Aber S_2 ist genau der Ausdruck (43, V) mit $n = 2$, auch mit demselben Summationsbereich (22), (29), (30); nur müssen die dortigen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, β, β' mit α^{-1} multipliziert werden. Man überzeuge sich, daß für $r = 3$ alles buchstäblich so wie im Hilfssatz 9, V (mit $n = 2$) geht, nur muß in (50, V) und in den ersten vier Zeilen auf S. 164, V die Zahl π durch $\pi\alpha^{-1}$ ersetzt werden. Daher kommt heraus **(35)**.

Für $r = 2$ geht auch alles ähnlich wie im Hilfssatz 9, V (mit $n = 2$), nur sehen die rechnerischen Abschätzungen an einigen Stellen etwas anders aus (die eben erwähnte Ersetzung von π durch $\pi\alpha^{-1}$ muß freilich auch für $r = 2$ durchgeführt werden). Ich bitte daher den Leser, die Richtigkeit der folgenden Ausführungen mit Hilfe des Beweises des Hilfssatzes 9, V nachzuprüfen.

Es sei also $r = 2$. Wie in V kann man sich auf die Teilsumme T beschränken, welche diejenigen Glieder von S_2 enthält, für welche

$$k' \geqq k \tag{36}$$

ist. Man teile genau so wie in V die Summe T in zwei Bestandteile T_1, T_2 laut (45, V), (46, V). Genau so wie dort gilt in T_1:

1. $k' > C\sqrt{x}$, $h'k'^{-1} > Chk^{-1}$.
2. Bei gegebenen h, k hat k' höchstens $C\sqrt{x}k^{-1}$ Möglichkeiten.
3. Bei gegebenen h, k, k' hat h' höchstens C Möglichkeiten.

Ersetzt man $1 + x \mid t - \beta \mid$ durch 1, so bekommt man für das Doppelintegral (28) **(36a)**

(denn nach (20) ist die Länge von $\mathfrak{C}'$ gleich $Bx^{-\frac{1}{2}}k'^{-1} = Bx^{-1}$); also **(37)**.

In T_2 ist $\mid t - t' \mid > C \left| \frac{h}{k} - \frac{h'}{k'} \right|$ (vgl. die 4. Zeile auf S. 164 in V);

das Doppelintegral ist also **(37a)**

und hier ist (wegen (36)) $\log (e\sqrt{x}k'^{-1}) \leqq \log (e\sqrt{x}k^{-1})$. Setzt man also wie in (51, V) **(38)**,

so hat man **(39)**

(Summationsbereich (22)). Weiter geht alles wie in V bis zur Formel (69, V); man teilt U in zwei Teilsummen U_1 (Glieder mit $hk' - h'k > 0$) und U_2 (Glieder mit $hk' - h'k < 0$) und man bekommt (wie in (69, V)) für $j = 1, 2$ **(39a)**.

Dabei läuft (wie in V) k' (bei gegebenem a) über alle ganzen Zahlen $k \leqq k' \leqq \sqrt{x}$, die modulo k einen bestimmten Rest q haben, der nur von h, k, a, j abhängt. Daher ist **(39b)**, **(40)**

(nach (39)). Die Summe über h ergibt B; wird $f(u) = u^2 \log^2 (e\sqrt{x}u^{-1})$ gesetzt, so ist für $1 \leqq u \leqq \sqrt{x}$ **(40a)**;

also ist (Substitution $e\sqrt{x}u^{-1} = v$) **(40b)**.

Nach (40) ist also **(41)**.

Nun folgt der Hilfssatz 7 für $r = 3$ aus (31), (35) und für $r = 2$ aus (34), (37), (41).

Beweis des Hilfssatzes 1. Folgt aus (15) und aus den Hilfssätzen 4, 6, 7.