František Josef Studnička

O přímém integrování výrazů $\sin^p x \cos^q x \, dx$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 21 (1892), No. 4, 180--184

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122287

čili

$$4\,S = 4\left[\Psi'\left(-\frac{1}{2}\right) - \Psi'(0)\right] + 8 + 4\left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right),$$

$$4S = -4\,.\,2\log 2 + 8 + 4\left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right),$$

a tedy

$$S = \frac{\pi^2}{2} - 2(1 + \log 2).$$

O přímém integrování výrazů $\sin^p x \cos^q x\, dx$.

Napsal

prof. Dr. **F. J. Studnička.**

Mezi jednoduchými differenciály goniometrickými integraci podrobovanými stojí v první řadě výraz

$$\sin^p x \cos^q x\, dx,$$

kdež všeobecně značí p a q čísla *libovolná*, celistvá neb lomená, positivní neb negativní, ve zvláštním pak případě, jejž zde máme na zřeteli, jen čísla *positivní* a *celistvá*, takže příslušný integrál má jediný tvar

$$I = \int \sin^p x \cos^q x\, dx\,. \qquad (1)$$

Ustanovení hodnoty jeho provádí se spůsoby rozličnými a sice buď podlé redukčních vzorců snižováním mocnitelů,*) nebo převedením na tvar algebraický nějakou substitucí vhodnou, na př.

$$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \text{**)}$$

takže tu platí

$$\sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad dx = \frac{2dy}{1+y^2},$$

---

*) Viz *Studnička* „O počtu integrálním“ pag. 62.

**) Viz *Schlömilch* „Übungsbuch“ II. pag. 36.

a tedy se tím obdrží ze vzorce (1)

$$I = 2^{p+1} \int \frac{y^p (1 - y^2)^q}{(1 + y^2)^{p+q+1}} dy,$$

anebo konečně přímým provedením integrace pomocí vzorců, vyjadřujících součin $\sin^p x \cos^q x$ řadou, obsahující multipla sinusu neb kosinusu.*)

Že třetí tento způsob jest nejpohodlnější, nelze upříti, jelikož se hodnota uvedeného integrálu obdrží *přímo*. Jde tedy jen o to, znáti příslušné vzorce, aby se položily integraci za základ.

Poněvadž v naší skrovné literatuře nemáme dosud spisů, z nichž by se čerpati mohlo poučení o jich složení, budiž zde o nich pojednáno, a tím i vyhověno jednomu z hlavních úkolů časopisu tomuto vytčených, *vyplňovati totiž literární mezery v oboru mathematiky a fysiky u nás se jevící.*

Při tom zvolíme opět týž postup, jakým se řídilo pojednání dříve zde uveřejněné „O rychlém odvození dvou vzorců goniometrických“; vyvineme totiž napřed obdobné vzorce pro funkce hyperbolické, a od nich pak přejdeme ke vzorcům pro funkce kyklické neboli goniometrické, ponechávajíce laskavému čtenáři podlé toho upraviti si cestu přímou, funkcí hyperbolických nepředpokládající.

I.

Jakož známo, určen hyperbolický sinus S a kosinus K vzorci

$$S(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad (2)$$

$$K(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad (3)$$

takže podlé toho platí patrně

*) Viz *Laisant* „Intégration directe de l'expression $\cos^p x \sin^q x\, dx$,“ Ass. Franç. XVIII. pag. 225, kdež se vykládá co věc nová, ač není neznámá, jakož se poznává na př. z *Worpitzky* „Lehrbuch der Diff. u. Int.-Rechnung“, pag. 472., kdež obsaženy jsou naše příslušné vzorce ve formě poněkud odchylně odvozené.

$$S^p(x)\,K^q(x) = \frac{1}{2^{p+q}}(e^x - e^{x})^p\,(e^x + e^{-x})^q\,;$$

vyvineme-li tedy na pravé straně oba binomy podlé známé poučky v řady, jež budou konečnými, jelikož p a q představuje positivní čísla celistvá, a spojíme-li pak po znásobení obou řad příslušné binomy podlé vzorců (2) a (3) opět ve funkce S nebo K, obdržíme konečně, *čtvero* případů zde rozeznávajíce, pohodlně tyto vzorce:

1. Pro *sudé* p a q

$$2^{p+q-1}\,S^p(x)\,K^q(x) = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(p+q)-1} (-1)^k A_k\,K(p+q-2k)\,x$$
$$\pm \tfrac{1}{2}\,A_{\frac{1}{2}(p+q)}\,; \tag{4}$$

2. Pro *sudé* p a *liché* q

$$2^{p+q-1}\,S^p(x)\,K^q(x) = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(p+q-1)} (-1)^k A_k\,K(p+q-2k)\,x\,; \tag{5}$$

3. pro *liché* p a q

$$2^{p+q-1}\,S^p(x)\,K^q(x) = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(p+q)-1} (-1)^k A_k\,S(p+q-2k)\,x$$
$$\pm \tfrac{1}{2}\,A_{\frac{1}{2}(p+q)}\,; \tag{6}$$

4. pro *liché* p a *sudé* q

$$2^{p+q-1}\,S^p(x)\,K^q(x) = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(p+q-1)} (-1)^k A_k\,S(p+q-2k)\,x\,, \tag{7}$$

značí-li tu vesměs

$$A_k = p_k - q_1\,p_{k-1} + q_2\,p_{k-2} - \ldots \pm q_k\,, \tag{8}$$

při čemž užito nejjednoduššího symbolu pro koëfficienty binomické, takže platí všeobecně

$$p_k = (p)_k = \frac{p\,(p-1)\ldots(p-\overline{k-1})}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}\,.$$

Z tohoto složení koëfficientů A_k jde na jevo, že ve zvláštním případě, kde

$$p = q,$$

stane se hodnota jejich nullou, jakmile k vyjadřuje se číslem lichým, tedy platí

$$A_k = 0 \text{ pro } k = 2m - 1, \ (m = 1, 2, 3 \ldots),$$

což i ze složení příslušného součinu

$$\sin^p x \cos^p x = \frac{1}{2^{2p}} \sin^p 2x$$

jde na jevo. Podobně se obdrží ve vzorci (4) a (6)

$$A_{1/2(p+q)} = 0$$

pro případ zvláštní, kde

$$p = 2m \mp 1, \ q = 2m \pm 1.$$

II.

Jak bychom z předcházejících vzorců, obsahujících funkce hyperbolické, zjednali si vzorce s funkcemi kyklickými, jest známo, jelikož

$$\begin{aligned} S(ix) &= i \sin x, \\ K(ix) &= \cos x; \end{aligned}$$

obdržíme tedy ze vzorce (4) pro *sudé* p a q

$$(-1)^{\frac{p}{2}} 2^{p+q-1} \sin^p x \cos^q x = \sum_{k=0}^{1/2(p+q)-1} (-1)^k A_k \cos(p+q-2k)x \pm 1/2\, A_{1/2(p+q)}, \tag{9}$$

pro *sudé* p a *liché* q ze vzorce (5)

$$(-1)^{\frac{p}{2}} 2^{p+q-1} \sin^p x \cos^q x = \sum_{k=0}^{1/2(p+q-1)} (-1)^k A_k \cos(p+q-2k)x, \tag{10}$$

pro *liché* p a q ze vzorce (6)

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} 2^{p+q-1} \sin^p x \cos^q x = \sum_{k=0}^{1/2(p+q)-1} (-1)^k A_k \sin(p+q-2k)x \pm 1/2\, A_{1/2(p+q)}, \tag{11}$$

a konečně pro *liché* p a *sudé* q ze vzorce (7)

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} 2^{p+q-1} \sin^p x \cos^q x = \sum_{k=0}^{1/2(p+q-1)} (-1)^k A_k \sin(p+q-2k)x, \quad (12)$$

při čemž význam součinitelů A_k jest opět vzorcem (8) stanoven.

Zároveň tu jde na jevo, jak bychom pro

$$p = 0$$

zjednali si ze vzorce (4) a (5) jakož i (9) a (10) řady podobné pro

$$K^q(x) \quad \text{a} \quad \cos^q x$$

a stejným spůsobem konečně pro

$$q = 0$$

ze vzorce (4) a (7) jakož i (9) a (12) obdrželi řady podobné pro

$$S^p(x) \quad \text{a} \quad \sin^p x,$$

při čemž tu *sudé* i *liché* p, onde *sudé* i *liché* q by se přímo rozlišovalo. *)

Jestli tedy na př.

$$p = 5, \quad q = 3,$$

bude podlé vzorce (11)

$$128 \sin^5 x \cos^3 x = \sin 8x - 2 \sin 6x - 2 \sin 4x + 6 \sin 2x,$$

kdež naopak pro

$$p = 3, \quad q = 5$$

se podlé téhož vzorce obdrží

$$-128 \sin^3 x \cos^5 x = \sin 8x + 2 \sin 6x - 2 \sin 4x - 6 \sin 2x,$$

jakož se pomocí vzorce (8) snadno určí.

---

*) Viz: *Skřivan* „Přednášky o algebraické analysi“ pag. 98.