Eduard Weyr
Stanovení součtů jistých nekonečných řad

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 21 (1892), No. 4, 161--180

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122284

Stanovení součtů jistých nekonečných řad.

Napsal

Eduard Weyr v Praze.

Pan *Appell* poukázal v Comptes Rendus t. LXXXVI, pag. 953 k tomu, že lze součet nekonečné řady, jejíž člen u_n jest racionalnou funkcí indexu n, vždy vyjádřiti pomocí derivací funkce $\log \Gamma(x)$, ano že v jistých případech lze součet ten vyčísliti elementarnými funkcemi, totiž logarithmy a funkcemi goniometrickými.

Tomuto vyčíslení jsou následující řádky věnovány.

1. Značme symbolem log přirozené logarithmy a vezměme v úvahu výraz

$$(1) \qquad \log k - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \ldots - \frac{1}{z+k},$$

v němž z značí jakoukoli realnou neb komplexní hodnotu, a k kladné celistvé číslo, jež v následující úvaze roste do nekonečna; arci předpokládáme, že žádný z jmenovatelů nevymizí, t. j. že z se nerovná celistvému zápornému číslu.

Roste-li celistvé číslo k do nekonečna, tu se výraz (1) blíží konečné hodnotě, závislé na z, kterou *Gauss*, Werke t. III, pag. 153, označuje $\Psi(z)$,

$$(2) \qquad \Psi(z) = \lim \left(\log k - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \ldots - \frac{1}{z+k}\right),$$

$$\lim k = \infty.$$

Abychom to ukázali, nahraďme $\log k$ součtem

$$\log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \ldots + \log \frac{k}{k-1},$$

čímž

$$\Psi(z) = \lim\left(-\frac{1}{z+1} + \log 2 - \frac{1}{z+2} + \log\frac{3}{2} - \frac{1}{z+3}\right.$$
$$\left. + \log\frac{4}{3} - \ldots - \frac{1}{z+k}\right)$$

aneb, připíšeme-li na pravé straně člen $\log\frac{k+1}{k}$, jehož limita jest 0,

$$(3) \qquad \Psi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{z+\nu} + \log\frac{\nu+1}{\nu}\right),$$

a jde nyní o to ukázati, že řada na pravé straně konverguje. Označme literou ζ absolutní hodnotu $|z|$, zvolme celistvé kladné číslo $h > \zeta$ a pišme

$$\Psi(z) = \sum_{\nu=1}^{h-1}\left(-\frac{1}{z+\nu} + \log\frac{\nu+1}{\nu}\right) + \sum_{\nu=h}^{\infty}\left(-\frac{1}{z+\nu}\right.$$
$$\left. + \log\frac{\nu+1}{\nu}\right),$$

takže jest nám vyšetřiti konvergenci druhého součtu.

Jelikož pro $\nu > 1$ a $\nu > \zeta$ máme rozvinutí absolutně konvergující

$$\log\frac{\nu+1}{\nu} = \log\left(1+\frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{\nu^3} - \ldots,$$

$$-\frac{1}{z+\nu} = -\frac{1}{\nu}\frac{1}{1+\frac{z}{\nu}} = -\frac{1}{\nu}\left(1 - \frac{z}{\nu} + \frac{z^2}{\nu^2} - \frac{z^3}{\nu^3} + \ldots\right),$$

$$\log\frac{\nu+1}{\nu} - \frac{1}{z+\nu} = \frac{z-\frac{1}{2}}{\nu^2} - \frac{z^2-\frac{1}{3}}{\nu^3} + \frac{z^3-\frac{1}{4}}{\nu^4} - \ldots,$$

soudíme, že

$$\left|\log\frac{\nu+1}{\nu} - \frac{1}{z+\nu}\right| < \frac{\zeta+\frac{1}{2}}{\nu^2} + \frac{\zeta^2+\frac{1}{3}}{\nu^3} + \frac{\zeta^3+\frac{1}{4}}{\nu^4} + \ldots$$
$$< \frac{\zeta}{\nu^2}\left(1 + \frac{\zeta}{\nu} + \frac{\zeta^2}{\nu^2} + \ldots\right) + \frac{1}{\nu^2}\left(1 + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} + \ldots\right)$$

t. j.

$$\left|\log\frac{\nu+1}{\nu}-\frac{1}{z+\nu}\right|<\frac{\zeta}{\nu(\nu-\zeta)}+\frac{1}{\nu(\nu-1)}<\frac{\zeta}{\nu(\nu-\zeta)}$$
$$+\frac{1}{\nu(\nu-\zeta)},$$

a že tedy

$$\left|\sum_{\nu=h}^{\infty}\left(-\frac{1}{z+\nu}+\log\frac{\nu+1}{\nu}\right)\right|<(\zeta+1)\sum_{\nu=h}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu-\zeta)};$$

jelikož řada na pravé straně má patrně konečný součet, jest konvergence řady na levé straně stojící dokázána. Je-li tedy též zakončený součet

$$\sum_{\nu=1}^{h-1}\left(-\frac{1}{z+\nu}+\log\frac{\nu+1}{\nu}\right)$$

konečný, t. j. není-li z záporným celistvým číslem, jest i řada (3) definující $\Psi(z)$ konečnou.

Funkce $\Psi(z)$ takto definovaná jest funkcí analytickou, jednoznačnou v celé rovině komplexní roviny z, a nekonečně velkou toliko v pólech $z=-1, -2, -3, \ldots$ Skutečně máme pro každé z různé od těchto polů

$$\Psi(z)=\sum_{\nu=1}^{h-1}\left(-\frac{1}{z+\nu}+\log\frac{\nu+1}{\nu}\right)+\sum_{\nu=h}^{\infty}\left\{\frac{z-\frac{1}{2}}{\nu^2}-\frac{z^2-\frac{1}{3}}{\nu^3}\right.$$
$$\left.+\frac{z^3-\frac{1}{4}}{\nu^4}-\ldots\right\}$$

a poněvadž, jakož z předchozí úvahy patrno, dvojitá nekonečná řada absolutně konverguje, ano i nahrazením všech do ní vcházejících hodnot jich absolutními obnosy konvergentní řada vychází, máme

$$\Psi(z)=\sum_{\nu=1}^{h-1}\left(-\frac{1}{z+\nu}+\log\frac{\nu+1}{\nu}\right)+\mathrm{A}+z\sum_{\nu=h}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$$
$$-z^2\sum_{\nu=h}^{\infty}\frac{1}{\nu^3}+z^3\sum_{\nu=h}^{\infty}\frac{1}{\nu^4}-\ldots,$$

kde psáno A místo $-\frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{3}\Sigma\frac{1}{\nu^3}-\ldots$, čímž tvrzení dokázáno.

Výraz $\Psi(z)$ rovnicí (2) neb (3) definovaný souvisí s funkcí $\Gamma(z)$ rovnicí

$$\Psi(z)=\frac{d\log\Gamma(z+1)}{dz},$$

jest tedy $\Psi(z)$ logarithmickou derivací druhého Eulerova integrálu pro argument $z+1$, k čemuž zde budiž pouze poukázáno.

2. Odvoďme si některé vlastnosti funkce $\Psi(z)$, jichž nám bude třeba.

Dle rovnice definiční (2) neb (3) jest patrné, že platí

$$\Psi(z+1)=\Psi(z)+\frac{1}{z+1}, \tag{4}$$

kteráž rovnice podává hodnotu $\Psi(z)$ pro každé realné z, známy-li jsou její hodnoty pro intervall rozměru 1.

Budiž n kladné celistvé číslo; dle rovnice (2) máme

$$\Psi\left(\frac{1-n}{n}\right)=\lim\left(\log k-\frac{n}{1}-\frac{n}{n+1}-\frac{n}{2n+1}-\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{n}{(k-1)n+1}\right),$$

$$\Psi\left(\frac{2-n}{n}\right)=\lim\left(\log k-\frac{n}{2}-\frac{n}{n+2}-\frac{n}{2n+2}-\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{n}{(k-1)n+2}\right),$$

. . . .

$$\Psi\left(\frac{n-1-n}{n}\right)=\lim\left(\log k-\frac{n}{n-1}-\frac{n}{n+n-1}\right.$$
$$\left.-\frac{n}{2n+n-1}-\ldots-\frac{n}{(k-1)n+n-1}\right),$$

$$\Psi(0)=\lim\left(\log k-\frac{n}{n}-\frac{n}{n+n}-\frac{n}{2n+n}-\ldots\right.$$
$$\left.-\frac{n}{(k-1)n+n}\right),$$

při $\lim k = \infty$. Sečtením všech těchto rovnic obdržíme na pravé straně

$$n \lim\left(\log k - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{kn}\right)$$

čili

$$n \lim\left(\log (kn) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{kn}\right) - n \log n$$

t. j. $n\Psi(0) - n \log n$, čímž jsme nabyli formule

$$\Psi\left(\frac{1-n}{n}\right) + \Psi\left(\frac{2-n}{n}\right) + \ldots + \Psi\left(-\frac{1}{n}\right) \tag{5}$$
$$= (n-1)\,\Psi(0) - n \log n.$$

Dle definiční rovnice (2) máme

$$\Psi(-z) - \Psi(z-1) = \lim\left(\log k - \frac{1}{-z+1} - \frac{1}{-z+2} - \ldots - \frac{1}{-z+k}\right)$$
$$- \lim\left(\log k - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \ldots - \frac{1}{z+k-1}\right)$$
$$= \lim\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} + \ldots + \frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k}\right);$$

na pravo jsme připojili člen $\frac{1}{z+k}$, jehož limita jest 0. Přepíšeme-li pravou stranu na

$$\frac{1}{z} + \lim \sum_{(\nu)} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{z-\nu}\right), \quad \nu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k,$$

vidíme dle známé formule, že se rovná $\pi \operatorname{cotg} \pi z$, čímž nabýváme další formule

$$\Psi(-z) - \Psi(z-1) = \pi \operatorname{cotg} \pi z. \tag{6}$$

Z ní plyne derivováním dle z

$$\Psi'(-z) + \Psi'(z-1) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}, \tag{7}$$

jakož obdobně derivováním formule (4):

$$\Psi'(z+1) = \Psi'(z) - \frac{1}{(z+1)^2}. \tag{8}$$

Učinivše v (7) $z = \frac{1}{2}$, máme

$$\Psi'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

a tedy vzhledem k (8) vypočteme $\Psi'(z)$ pro každé z různící se o $\frac{1}{2}$ od čísla celistvého, kladného neb záporného; na př.:

$$\Psi'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} - 4.$$

Že lze i pro celistvá z udati hodnotu $\Psi'(z)$ v zakončeném tvaru, vychází z formule plynoucí derivováním rovnice (3)

$$\Psi'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(z+\nu)^2};$$

máme totiž

$$\Psi'(0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

a funkce $\Psi'(z)$ pro celistvé z plyne nyní pomocí rovnice (8).

3. *Gauss* ukázal, Werke III, p. 157, že lze rozdíl $\Psi(z) - \Psi(0)$ pro každou racionalnou hodnotu argumentu z vyčísliti v zakončeném tvaru pomocí logarithmů a funkcí goniometrických, a sice následující duchaplnou úvahou.

Označme m, n dvě celistvá kladná čísla, z nichž m jest menší, a zvolme $z = -\frac{m}{n}$. Položme dále $\frac{2\pi}{n} = \omega$ a označujme literou φ kterýkoli z úhlů ω, 2ω, 3ω, ..., $(n-1)\omega$; pak platí

$$\begin{aligned}
1 &= \cos n\varphi = \cos 2n\varphi = \cos 3n\varphi = \ldots, \\
\cos \varphi &= \cos (n+1)\varphi = \cos (2n+1)\varphi = \ldots, \\
\cos 2\varphi &= \cos (n+2)\varphi = \cos (2n+2)\varphi = \ldots, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

a dále

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos(n-1)\varphi + 1 = 0.$$

Máme tedy, položíme-li za z v rovnici (3) posloupně

$$\frac{1-n}{n},\ \frac{2-n}{n},\ \frac{3-n}{n},\ \ldots,\ -\frac{1}{n},\ 0$$

a násobíme-li výsledky resp.

$$\cos\varphi,\ \cos 2\varphi,\ \cos 3\varphi,\ \ldots,\ \cos(n-1)\varphi,\ 1$$

tyto rovnice

$$\cos\varphi\,\Psi\left(\frac{1-n}{n}\right) = -n\cos\varphi + \cos\varphi\,.\log 2$$

$$-\frac{n}{n+1}\cos(n+1)\varphi + \cos\varphi\,.\log\frac{3}{2} - \ldots$$

$$\cos 2\varphi\,\Psi\left(\frac{2-n}{n}\right) = -\frac{n}{2}\cos 2\varphi + \cos 2\varphi\,.\log 2$$

$$-\frac{n}{n+2}\cos(n+2)\varphi + \cos 2\varphi\,.\log\frac{3}{2} - \ldots,$$

$$\cos 3\varphi\,\Psi\left(\frac{3-n}{n}\right) = -\frac{n}{3}\cos 3\varphi + \cos 3\varphi\,.\log 2$$

$$-\frac{n}{n+3}\cos(n+3)\varphi + \cos 3\varphi\,.\log\frac{3}{2} - \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos(n-1)\varphi\,\Psi\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{n}{n-1}\cos(n-1)\varphi + \cos(n-1)\varphi\log 2$$

$$-\frac{n}{2n-1}\cos(2n-1)\varphi + \cos(n-1)\varphi\log\frac{3}{2} - \ldots,$$

$$\Psi(0) = -\frac{n}{n}\cos n\varphi + \log 2 - \frac{n}{2n}\cos 2n\varphi + \log\frac{3}{2} - \ldots;$$

sečteme-li tyto rovnice, obdržíme

$$\cos\varphi\,\Psi\left(\frac{1-n}{n}\right) + \cos 2\varphi\,\Psi\left(\frac{2-n}{n}\right) + \cos 3\varphi\,\Psi\left(\frac{3-n}{n}\right) + \ldots$$

$$+ \cos(n-1)\varphi\,\Psi\left(-\frac{1}{n}\right) + \Psi(0)$$

$$= -n\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{4}\cos 4\varphi + \ldots \text{in inf.}\right),$$

jelikož faktory u všech logarithmů vymizí. Avšak pro každé x nepřesahující 1 máme*)

$$\log(1-2x\cos\varphi+x^2)=-2\left(x\cos\varphi+\frac{1}{2}x^2\cos 2\varphi\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}x^3\cos 3\varphi+\ldots\right),$$

kteráž řada snadně vychází rozvinutím součtu

$$\log(1-rx)+\log\left(1-\frac{x}{r}\right),$$

značíme-li r hodnotu

---

*) Kořeny rovnice $1-2x\cos\varphi+x^2=0$ jsou $\cos\varphi\pm\sqrt{-1}\sin\varphi$; položivše $\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi=r$, jest $\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi=\frac{1}{r}$ a tedy totožně

$$1-2x\cos\varphi+x^2=(x-r)\left(x-\frac{1}{r}\right)=\left(1-\frac{x}{r}\right)(1-rx).$$

Při $\left|\frac{x}{r}\right|<1$ t. j. $|x|<1$ máme však

$$\log\left(1-\frac{x}{r}\right)=-\frac{x}{r}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{r^2}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{r^3}-\ldots,$$

a při $|rx|<$ t. j. $|x|<1$ obdobně

$$\log(1-rx)=-rx-\frac{1}{2}r^2x^2-\frac{1}{3}r^3x^3-\ldots,$$

a tedy sečtením

$$\log(1-2x\cos\varphi+x^2)=-\left(r+\frac{1}{r}\right)x-\frac{1}{2}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)x^2$$
$$-\frac{1}{3}\left(r^3+\frac{1}{r^3}\right)x^3-\ldots$$

Ale $r^\nu+r^{-\nu}=2\cos\nu\varphi$, čímž

$$\log(1-2x\cos\varphi+x^2)=-2\left(x\cos\varphi+\frac{1}{2}x^2\cos 2\varphi\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}x^3\cos 3\varphi+\ldots\right),$$

rovnice platná při $|x|<1$. Poněvadž však řada pro $x=1$ ještě konverguje, platí, dle známé věty Abelovy, toto rozvinutí i při $x=1$, pročež

$$\log(2-2\cos\varphi)=-2\left(\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\cos 3\varphi+\ldots\right).$$

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi.$$

Tím předchozí rovnice nabývá tvaru

$$\cos\varphi\,\Psi\left(\frac{1-n}{n}\right) + \cos 2\varphi\,\Psi\left(\frac{2-n}{n}\right) + \cos 3\varphi\,\Psi\left(\frac{3-n}{n}\right) + \dots$$
$$+ \cos(n-1)\varphi\,\Psi\left(-\frac{1}{n}\right)$$
$$= -\Psi(0) + \frac{1}{2}n\log(2-2\cos\varphi).$$

Položme v této rovnici posloupně

$$\varphi = \omega,\ 2\omega,\ 3\omega,\ \dots,\ (n-1)\omega$$

a znásobme takto vycházející rovnice resp. hodnotami

$$\cos m\omega,\ \cos 2m\omega,\ \cos 3m\omega,\ \dots,\ \cos(n-1)m\omega$$

a sečtěme výsledky, i obdržíme

$$\Psi\left(\frac{1-n}{n}\right)\sum_{(\varphi)}(\cos\varphi\cos m\varphi) + \Psi\left(\frac{2-n}{n}\right)\sum_{(\varphi)}(\cos 2\varphi\cos m\varphi) + \dots$$
$$+ \Psi\left(-\frac{1}{n}\right)\sum_{(\varphi)}(\cos(n-1)\varphi\cos m\varphi)$$
$$= -\Psi(0)\sum_{(\varphi)}\cos m\varphi + \frac{1}{2}n\sum_{(\varphi)}[\cos m\varphi\log(2-2\cos\varphi)],$$

kde summační znamení se vztahují k hodnotám

$$\varphi = \omega,\ 2\omega,\ \dots,\ (n-1)\omega.$$

Přičteme-li k této rovnici onu, kterou jsme v čl. 2. odvodili,

$$\Psi\left(\frac{1-n}{n}\right) + \Psi\left(\frac{2-n}{n}\right) + \Psi\left(\frac{3-n}{n}\right) + \dots + \Psi\left(-\frac{1}{n}\right)$$
$$= (n-1)\Psi(0) - n\log n,$$

a přihlédneme-li, že platí rovnice

$$1 + \Sigma(\cos k\varphi\cos m\varphi) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n-1}\cos k\nu\omega\cos m\nu\omega$$
$$= 1 + \cos k\omega\,.\cos m\omega + \cos 2k\omega\,.\cos 2m\omega + \dots$$
$$+ \cos(n-1)k\omega\,.\cos(n-1)m\omega = 0$$

při kterékoli hodnotě $k = 1, 2, 3, \ldots (n-1)$ vyjma $k = m$ a $k = n - m$, v kterém případě vychází hodnota $\frac{1}{2}n$, obdržíme

$$\frac{n}{2}\Psi\left(\frac{m-n}{n}\right) + \frac{n}{2}\Psi\left(\frac{n-m-n}{n}\right) = -\Psi(0)[-(n-1)$$

$$+\sum_{(\varphi)} \cos m\varphi] + \frac{n}{2}\sum_{(\varphi)}[\cos m\varphi \log(2 - 2\cos\varphi)] - n\log n,$$

čili, jelikož

$$1 + \sum_{(\varphi)} \cos m\varphi = 0,$$

$$\Psi\left(-\frac{m}{n}\right) + \Psi\left(-\frac{n-m}{n}\right) = 2\Psi(0) - 2\log n$$

$$+ \cos m\omega \log(2 - 2\cos\omega) + \cos 2m\omega \log(2 - 2\cos 2\omega) + \ldots$$

$$+ \cos(n-1)m\omega \log[2 - 2\cos(n-1)\omega].$$

Patrně se rovná poslední sčítanec na pravo sčítanci

$$\cos m\omega \log(2 - 2\cos\omega),$$

předposlední pak sčítanci

$$\cos 2m\omega \log(2 - 2\cos 2\omega), \text{ atd.},$$

tak že sčítanci jsou si podvojně rovny, vyjmeme-li sčítance středního při sudém n se vyskytujícího, totiž

$$\cos\frac{n}{2}m\omega \,.\, \log\left(2 - 2\cos\frac{n}{2}\omega\right),$$

který při sudém m má hodnotu $+2\log 2$ a při lichém m má hodnotu $-2\log 2$.

Přibeřeme-li k poslední rovnici rovnici v čl. 2. odvozenou

$$\Psi\left(-\frac{m}{n}\right) - \Psi\left(-\frac{n-m}{n}\right) = \pi \operatorname{cotang}\frac{m}{n}\pi,$$

obdržíme pro kladné liché celistvé číslo n a pro kladné celistvé $m < n$

$$
(9)\quad \begin{aligned}
\Psi\left(-\frac{m}{n}\right) = \Psi(0) + \frac{1}{2}\pi \operatorname{cotang}\frac{m\pi}{n} - \log n \\
+ \cos\frac{2m\pi}{n}\log\left(2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}\right) \\
+ \cos\frac{4m\pi}{n}\,.\log\left(2 - 2\cos\frac{4\pi}{n}\right) \\
+ \cos\frac{6m\pi}{n}\,.\log\left(2 - 2\cos\frac{6\pi}{n}\right) + \ldots \\
+ \cos\frac{(n-1)m\pi}{n}\,.\log\left(2 - 2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right);
\end{aligned}
$$

a pro kladné sudé n a kladné $m < n$,

$$
(10)\quad \begin{aligned}
\Psi\left(-\frac{m}{n}\right) = \Psi(0) + \frac{1}{2}\pi \operatorname{cotang}\frac{m\pi}{n} - \log n \\
+ \cos\frac{2m\pi}{n}\log\left(2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}\right) \\
+ \cos\frac{4m\pi}{n}\,.\log\left(2 - 2\cos\frac{4\pi}{n}\right) + \ldots \\
+ \cos\frac{(n-2)m\pi}{n}\log\left(2 - 2\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right) \pm \log 2,
\end{aligned}
$$

kde v posledním sčítanci v pravo platí znamení $+$ při sudém m, a znamení $-$ při lichém m.

Jest tedy rozdíl $\Psi\left(-\frac{m}{n}\right) - \Psi(0)$ vyjádřen logarithmy a výrazy goniometrickými pro případ, že $\frac{m}{n}$ jest kladný ryzý zlomek; pomocí formule

$$\Psi(z+1) = \Psi(z) + \frac{1}{z+1}$$

snadno vyjádříme rozdíl $\Psi(z) - \Psi(0)$ týmž spůsobem pro každé racionalné z. Na příklad

$$\Psi\left(-\frac{1}{2}\right) - \Psi(0) = -2\log 2,$$

$$\Psi\left(-\frac{2}{3}\right) - \Psi(0) = -\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}\log 3.$$

4. Přistupme nyní k vyšetření konvergence řad, o jichž sečtení nám běží.

Aby řada $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$, jejíž obecný člen u_ν jest racionalnou funkcí indexu ν, konvergovala, musí především $\lim u_\nu = 0$ při $\lim \nu = \infty$ t. j. u_ν musí býti ryze lomenou funkcí indexu ν. Položme tedy

$$u_\nu = \frac{a_0 \nu^{s-1} + a_1 \nu^{s-2} + \ldots + a_{s-1}}{b_0 \nu^s + b_1 \nu^{s-1} + \ldots + b_s}.$$

Jelikož se podíl dvou sousedních členů jeví též jako racionalná funkce indexu, bylo by lze vyšetřiti konvergenci pomocí kriteria *Gaussova*, jež lze i pro komplexní řady snadno upraviti. Dojdeme však následujícím spůsobem též rychle cíle. Pišme

$$u_\nu = \frac{1}{\nu} \frac{a_0 + \frac{1}{\nu}\left(a_1 + \frac{a_2}{\nu} + \ldots + \frac{a_{s-1}}{\nu^{s-2}}\right)}{b_0 + \frac{1}{\nu}\left(b_1 + \frac{b_2}{\nu} + \ldots + \frac{b_s}{\nu^{s-1}}\right)};$$

pro dosti velké ν máme tedy

$$u_\nu = \frac{1}{\nu} \frac{a_0 + \frac{1}{\nu}(a_1 + \varepsilon)}{b_0 + \frac{1}{\nu}(b_1 + \varepsilon')},$$

kde ε a ε' jsou hodnoty libovolně malé; aneb předpokládajíce $a_0 \gtrless 0$, $b_0 \gtrless 0$,

$$u_\nu - \frac{1}{\nu}\frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{\nu^2} \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1 + a_0 \varepsilon' + b_0 \varepsilon}{b_0\left(b_0 + \frac{b_1 + \varepsilon'}{\nu}\right)}.$$

Označíme-li tedy absolutní obnosy hodnot a_0, a_1, b_0, b_1 literami α_0, α_1, β_0, β_1, máme, berouce součet Σ od dosti velkého ν do ∞,

$$\left|\Sigma u_\nu - \frac{a_0}{b_0} \Sigma \frac{1}{\nu}\right| < \frac{\alpha_1 \beta_0 + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_0 + \beta_0}{\beta_0 \beta'_0} \Sigma \frac{1}{\nu^2},$$

značí-li β_0' kladné číslo menší než absolutní obnos veličiny $b_0 + \frac{b_1 + \varepsilon'}{\nu}$. Jelikož řada na pravé straně konverguje, jest rozdíl na levé straně též konečný; avšak součet $\Sigma \frac{1}{\nu}$ roste do nekonečna, a roste tudíž také Σu_ν do nekonečna t. j. řada Σu_ν, jejíž člen u_ν jest racionalnou lomenou funkcí indexu o jmenovateli o stupeň vyšším než čítatel, diverguje.

Položme tedy

$$u_\nu = \frac{a_0 \nu^{s-r} + a_1 \nu^{s-r-1} + \ldots + a_{s-r}}{b_0 \nu^s + b_1 \nu^{s-1} + \ldots + b_s}, \quad r > 1,$$

a nalezneme obdobně

$$\left| \Sigma u_\nu - \frac{a_0}{b_0} \Sigma \frac{1}{\nu^r} \right| < \frac{\alpha_1 \beta_0 + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_0 + \beta_0}{\beta_0 \beta_0'} \Sigma \frac{1}{\nu^{r+1}},$$

z čehož soudíme vzhledem ke konečnosti součtů $\Sigma \frac{1}{\nu^r}$, $\Sigma \frac{1}{\nu^{r+1}}$, že jest též Σu_ν konečným. Řada Σu_ν tudíž konverguje tenkráte a jen tenkráte, je-li stupeň jmenovatele racionalné lomené funkce u_ν alespoň o dvě jednotky vyšší než stupeň čítatelův.

5. Řada $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu u_\nu$, kde u_ν značí opět racionalnou lomenou funkci indexu ν, konverguje, je-li stupeň jmenovatele alespoň o jednu jednotku vyšší stupně čitatele.

Pišme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu u_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ (-1)^{2\nu} u_{2\nu} + (-1)^{2\nu+1} u_{2\nu+1} \right\}$$
$$= \sum_{0}^{\infty} (u_{2\nu} - u_{2\nu+1}).$$

Je-li obecně

$$u_\nu = \frac{a_0 \nu^{s-r} + a_1 \nu^{s-r-1} + \ldots + a_{s-r}}{b_0 \nu^s + b_1 \nu^{s-1} + \ldots + b_s},$$

máme tedy

$$\sum_{0}^{\infty} (-1)^\nu u_\nu = \sum_{0}^{\infty} \left\{ \frac{a_0 (2\nu)^{s-r} + \ldots + a_{s-r}}{b_0 (2\nu)^s + \ldots + b_s} - \frac{a_0 (2\nu+1)^{s-r} + \ldots + a_{s-r}}{b_0 (2\nu+1)^s + \ldots + b_s} \right\}$$

čili

$$\sum_{0}^{\infty} (-1)^\nu u_\nu = \sum_{0}^{\infty} v_\nu,$$

kde, jakož snadný počet ukazuje, v_ν značí racionalnou lomenou funkci indexu ν, jejíž jmenovatel jest stupně $2s$ a čítatel stupně $2s - r - 1$. Řada tedy konverguje, je-li $r + 1 > 1$ t. j. $r > 0$, jak bylo dokázati. Je-li $r > 1$, jest výsledek ten samozřejmý, jelikož pak každá z obou řad $\Sigma u_{2\nu}$ a $\Sigma u_{2\nu+1}$ o sobě konverguje, a tedy také jich rozdíl t. j. řada $\Sigma(-1)^\nu u_\nu$.

6. Přistupme nyní k vyčíslení součtu

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu ,$$

kde

$$u_\nu = \frac{a_0\nu^{s-r} + a_1\nu^{s-r-1} + \ldots + a_{s-r}}{b_0\nu^s + b_1\nu^{s-1} + \ldots + b_s}, \quad b_0 \gtrless 0, \; r > 1,$$

pomocí funkce

$$\Psi(z) = \frac{d \log \Gamma(z+1)}{dz}$$

a její derivací.

Rozložme lomenou funkci u_ν na parcialné zlomky, a mějme za supposice, *že jmenovatel obsahuje samé jednoduché kořenové faktory*,

$$u_\nu = \frac{A_1}{\nu + k_1} + \frac{A_2}{\nu + k_2} + \ldots + \frac{A_s}{\nu + k_s},$$

tak že $-k_1, -k_2, \ldots -k_s$ značí kořeny rovnice

$$b_0x^s + b_1x^{s-1} + \ldots + b_s = 0.$$

Odstraníme-li v předposlední rovnici jmenovatel, soudíme z totožnosti tak nabyté, že koefficient členu ν^{s-1} na pravo vymizí, t. j. že

(11) $$A_1 + A_2 + \ldots + A_s = 0.$$

Pišme nyní

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \left\{ \frac{A_1}{\nu + k_1} + \frac{A_2}{\nu + k_2} + \ldots + \frac{A_s}{\nu + k_s} \right\},$$

aneb vzhledem k (11)

$$-S_n = (A_1 + A_2 + \ldots + A_s)\log n - A_1 \sum_0^n \frac{1}{\nu + k_1}$$
$$- A_2 \sum_0^n \frac{1}{\nu + k_2} - \ldots - A_s \sum_0^n \frac{1}{\nu + k_s},$$
$$-S_n = A_1 \left(\log n - \sum_0^n \frac{1}{\nu + k_1}\right) + \ldots + A_s \left(\log n\right.$$
$$\left. - \sum_0^n \frac{1}{\nu + k_s}\right),$$

a obdržíme pro $\lim n = \infty$ ihned

$$(12) \quad -S = A_1 \Psi(k_1 - 1) + A_2 \Psi(k_2 - 1) + \ldots + A_s \Psi(k_s - 1),$$

čímž hledaný součet S vyjádřen pomocí logarithmické derivace funkce Γ.

Přepíšeme-li tento výsledek vzhledem k rovnici (11) na tvar

$$(13) \quad -S = A_1[\Psi(k_1 - 1) - \Psi(0)] + A_2[\Psi(k_2 - 1) - \Psi(0)]$$
$$+ A_s[\Psi(k_s - 1) - \Psi(0)],$$

a uvážíme-li, že lze, jakož bylo v článku 3. ukázáno, rozdíl $\Psi(z) - \Psi(0)$ pro každé racionalné z v zakončeném tvaru vyjádřiti, máme tento výsledek:

Jsou-li kořeny $k_1, k_2, \ldots, k_s$ vesměs různé, realné a racionalné hodnoty, lze součet $\sum_0^\infty u_\nu$ vyčísliti zakončeným logarithmicko-goniometrickým výrazem.

7. Má-li jmenovatel racionalné lomené funkce u_ν vícenásobné kořenové faktory, lze součet $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ vyjádřiti pomocí logarithmické derivace funkce Γ a pomocí dalších derivac této derivace.

Obdržíme totiž posloupným derivováním rovnice (3)

$$\frac{d\Psi(z)}{dz} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(z+\nu)^2},$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\Psi(z)}{dz^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(z+\nu)^3},$$
$$\frac{1}{2.3}\frac{d^3\Psi(z)}{dz^3} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(z+\nu)^4}, \text{ atd.}$$

Má-li zmíněný jmenovatel na př. trojnásobný faktor $\nu + k_1$ a dále jednoduché faktory kořenové $\nu + k_4, \ldots, \nu + k_s$, máme především rozkladem

$$u_\nu = \frac{A_1}{\nu + k_1} + \frac{B_1}{(\nu + k_1)^2} + \frac{C_1}{(\nu + k_1)^3} + \frac{A_4}{\nu + k_4} + \ldots + \frac{A_s}{\nu + k_s},$$

a arci opět

$$A_1 + A_4 + \ldots + A_s = 0,$$

a tudíž

$$-S_n = A_1 \left(\log n - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu + k_1}\right) + A_4 \left(\log n - \sum_{0}^{n} \frac{1}{\nu + k_4}\right) + \ldots$$
$$+ A_s \left(\log n - \sum_{0}^{n} \frac{1}{\nu + k_s}\right) - B_1 \sum_{0}^{n} \frac{1}{(\nu + k_1)^2} - C_1 \sum_{0}^{n} \frac{1}{(\nu + k_1)^3}.$$

Pro $\lim n = \infty$ plyne

$$-S = A_1 \Psi(k_1 - 1) + A_4 \Psi(k_4 - 1) + \ldots + A_s \Psi(k_s - 1)$$
$$- B_1 \Psi'(k_1 - 1) + \frac{1}{2} C_1 \Psi''(k_1 - 1),$$

tedy hledaný součet vyjádřen funkcemi Ψ, Ψ', Ψ''.

Jelikož lze hodnotu $\Psi(z)$ dle čl. 2. pro každé celistvé z aneb pro z líšící se od celistvého čísla o $\frac{1}{2}$ v zakončeném tvaru vyjádřiti, jest patrné, že lze v případě, kdy má jmenovatel zlomku u_ν jen jednoduché a dvojnásobné realné kořeny, z nichž prvnější jsou veskrze racionalné hodnoty, druhé pak hodnoty celistvé aneb hodnoty lišící se od celistvých čísel o $\frac{1}{2}$, součet $\sum_{0}^{\infty} u_\nu$ vždy zakončeným logarithmicko-goniometrickým výrazem vyjádřiti. V tom smyslu nutno opraviti výrok páně *Appell*-ův l. c. učiněný, o čemž jsem byl auktorem k mému dotazu svého času vyrozuměn.

8. *Příklady.*

I. $$S = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(a\nu + 1)},$$

kde a nechť značí celistvé kladné číslo.

Pišme

$$S = \frac{1}{a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)\left(\nu+1+\frac{1}{a}\right)},$$

a máme zde $k_1 = 1$, $k_2 = 1 + \frac{1}{a}$ a rozkladem

$$\frac{1}{(\nu+1)\left(\nu+1+\frac{1}{a}\right)} = \frac{a}{\nu+1} - \frac{a}{\nu+1+\frac{1}{a}},$$

pročež

$$-\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)\left(\nu+1+\frac{1}{a}\right)} = a\Psi(0) - a\Psi\left(\frac{1}{a}\right),$$

a

$$S = \Psi\left(\frac{1}{a}\right) - \Psi(0).$$

Avšak dle (4)

$$\Psi\left(\frac{1}{a}\right) = \Psi\left(\frac{1}{a} - 1\right) + a,$$

čímž

$$S = a + \Psi\left(-\frac{a-1}{a}\right) - \Psi(0).$$

Máme tedy dle (9) pro liché číslo a

$$S = a + \frac{1}{2}\pi \operatorname{cotg} \frac{(a-1)\pi}{a} - \log a$$

$$+ \cos\frac{2(a-1)\pi}{a} \log\left(2 - 2\cos\frac{2\pi}{a}\right)$$

$$+ \cos\frac{4(a-1)\pi}{a} \log\left(2 - 2\cos\frac{4\pi}{a}\right) + \dots$$

$$+ \cos\frac{(a-1)(a-1)\pi}{a} \log\left(2 - 2\cos\frac{(a-1)\pi}{a}\right),$$

a pro sudé a máme dle (10)

$$S = a + \frac{1}{2}\pi \operatorname{cotg}\frac{(a-1)\pi}{a} - \log a$$
$$+ \cos\frac{2(a-1)\pi}{a}\log\left(2 - 2\cos\frac{2\pi}{a}\right)$$
$$+ \cos\frac{4(a-1)\pi}{a}\log\left(2 - 2\cos\frac{4\pi}{a}\right) + \dots$$
$$+ \cos\frac{(a-2)(a-1)\pi}{a}\log\left(2 - 2\cos\frac{(a-2)\pi}{a}\right) - \log 2.$$

Na př. při $a = 4$ nalezneme

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(4\nu+1)} = 4 - \frac{\pi}{2} - 3\log 2.$$

II. $$S = \sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{1+\nu}{2\nu - \nu^2 - \nu^3}.$$

Pišme

$$S = \sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{1+\nu}{\nu(1-\nu)(2+\nu)}$$
$$= -\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{3+\nu}{(1+\nu)(2+\nu)(4+\nu)}$$

čili

$$-S = \sum_{0}^{\infty}(-1)^{\nu}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{1+\nu} - \frac{1}{2}\frac{1}{2+\nu} - \frac{1}{6}\frac{1}{4+\nu}\right),$$

aneb vytkneme-li členy o sudém indexu ν zvlášť a členy o lichém indexu též zvlášť, tvořící o sobě řady konvergentní, jelikož jest stupeň jmenovatele $(1+\nu)(2+\nu)(4+\nu)$ o dvě jednotky vyšší než stupeň čitatele $3+\nu$,

$$-S = \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{1+2\nu} - \frac{1}{2}\frac{1}{2+2\nu} - \frac{1}{6}\frac{1}{4+2\nu}\right)$$
$$-\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{2+2\nu} - \frac{1}{2}\frac{1}{3+2\nu} - \frac{1}{6}\frac{1}{5+2\nu}\right),$$
$$-S = \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\left[\frac{2}{3}\frac{1}{\frac{1}{2}+\nu} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\nu} - \frac{1}{6}\frac{1}{2+\nu}\right]$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}\left[\frac{2}{3}\frac{1}{1+\nu} - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{3}{2}+\nu} - \frac{1}{6}\frac{1}{\frac{5}{2}+\nu}\right].$$

Máme tedy

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\,\Psi\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\,\Psi(0) - \frac{1}{6}\,\Psi(1)\right]$$
$$- \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\,\Psi(0) - \frac{1}{2}\,\Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}\,\Psi\left(\frac{3}{2}\right)\right].$$

Avšak

$$\Psi(1) = \Psi(0) + 1,$$
$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = \Psi\left(-\frac{1}{2}\right) + 2,$$
$$\Psi\left(\frac{3}{2}\right) = \Psi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} = \Psi\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 + \frac{2}{3},$$

a tedy

$$2S = \frac{4}{3}\left[\Psi\left(-\frac{1}{2}\right) - \Psi(0)\right] + \frac{7}{6},$$

t. j. dle (10)

$$2S = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}\,\pi \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} - \log 2 - \log 2\right] + \frac{7}{6},$$

a konečně

$$S = \frac{7}{12} - \frac{4}{3}\log 2.$$

III. $$S = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1 + 2\nu}{9 + 21\nu + 16\nu^2 + 4\nu^3} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1 + 2\nu}{(1+\nu)(3+2\nu)^2};$$

pišme

$$S = \frac{1}{4}\sum_{0}^{\infty} \frac{1 + 2\nu}{(1+\nu)\left(\frac{3}{2} + \nu\right)^2},$$

aneb rozloživše na parcialné zlomky

$$4S = \sum_{0}^{\infty}\left(-\frac{4}{1+\nu} + \frac{4}{\frac{3}{2}+\nu} + \frac{4}{\left(\frac{3}{2}+\nu\right)^2}\right).$$

Máme tedy pro 4S výraz

$$4S = -4\Psi(0) + 4\Psi\left(\frac{1}{2}\right) + 4\Psi'\left(\frac{1}{2}\right),$$

čili

$$4S = 4\left[\Psi'\left(-\frac{1}{2}\right) - \Psi'(0)\right] + 8 + 4\left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right),$$

$$4S = -4 \, . \, 2 \log 2 + 8 + 4\left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right),$$

a tedy

$$S = \frac{\pi^2}{2} - 2(1 + \log 2).$$

O přímém integrování výrazů $\sin^p x \cos^q x \, dx$.

Napsal

prof. Dr. **F. J. Studnička.**

Mezi jednoduchými differenciály goniometrickými integraci podrobovanými stojí v první řadě výraz

$$\sin^p x \cos^q x \, dx,$$

kdež všeobecně značí p a q čísla *libovolná*, celistvá neb lomená, positivní neb negativní, ve zvláštním pak případě, jejž zde máme na zřeteli, jen čísla *positivní* a *celistvá*, takže příslušný integrál má jediný tvar

$$I = \int \sin^p x \cos^q x \, dx \, . \qquad (1)$$

Ustanovení hodnoty jeho provádí se spůsoby rozličnými a sice buď podlé redukčních vzorců snižováním mocnitelů,*) nebo převedením na tvar algebraický nějakou substitucí vhodnou, na př.

$$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \;^{**)}$$

takže tu platí

$$\sin x = \frac{2y}{1 + y^2}, \quad \cos x = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}, \quad dx = \frac{2dy}{1 + y^2},$$

---

*) Viz *Studnička* „O počtu integrálním“ pag. 62.

**) Viz *Schlömilch* „Übungsbuch“ II. pag. 36.