Karel Petr

O separaci kořenů rovnice algebraické dle reálných částí kořenů a o důkaze fundamentální věty algebry. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 50 (1921), No. 1, 23--33

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122283`

z čehož plyne dále

$$R_i = \frac{\frac{de_a}{di_G} - R_G}{1 + \frac{R_G}{R_a}}.$$

Odpor R_G galvanometru jest pravidelně proti prvnímu členu tak nepatrný, že jej můžeme zanedbati a psáti

$$R_i = \frac{1}{1 + \frac{R_G}{R_a}} \cdot \left(\frac{de_a}{di_G}\right)_{e_g}.$$

Totéž, co jsme dříve uvedli o přesnosti při měření S a D, platí ve stejné míře i zde. (Dokončení.)

O separaci kořenů rovnice algebraické dle reálných částí kořenů a o důkaze fundamentální věty algebry.

Napsal **K. Petr.**

Jest obecně známo, že, provádíme-li separaci kořenů pomocí Sturmovy věty, dospíváme již při nízkém stupni rovnice ($n = 5, 6, \ldots$) z pravidla k číslům tak velikým, že separace jest jenom se značnou námahou proveditelna; ovšem za předpokladu, že se separace ona provádí přesně, takže jsme současně poučeni o tom, má-li rovnice daná kořeny mnohonásobné či ne. Ku vykonání separace kořenů dle reálných částí — t. j. ku přesnému výpočtu, kolik jest kořenů dané rovnice algebraické, jichž reálná část jest v intervalu (a, b) — lze však sestrojiti obdobné řady, říkejme jim také Sturmovy, jež jsou značně jednodušší než původní Sturmovy (lze ku př. při rovnicích stupně 8. vystačiti výrazy, jichž výpočet není o mnoho nesnadnější než původních Sturmových při rovnicích stupně 4.). Odvození těchto řad lze podati na základě věty Cauchyovy vztahující se na změnu argumentu čísla komplexního daného hodnotou $f(z)$, když z probíhá uzavřenou křivkou a lze ke konstrukci jich užiti rovněž postupného dělení — jakož známo.

V následujícím jsem podal konstrukci řady, v níž počet změn znaménkových se mění jednak tím, že proměnná prochází nullovým bodem koncového členu (jako jest tomu při původní řadě Sturmově), jednak tím, že proměnná prochází nullovým bodem středního členu řady, a jinak se počet ten měniti nemůže. Nullové body středního členu jsou dány polovičními součty kořenů rovnice dané; nullové body koncového členu jsou kořeny dané rovnice. Řada ta pak řeší problém separace kořenů dle reálných částí a shoduje se, jak jsem ukázal, s řadou, ku které dospíváme postupným dělením.

Specielním případem tohoto úkolu zabýval se *A. Hurwitz**) odvodiv podmínky pro to, aby rovnice určitého stupně měla vesměs kořeny, jichž reálná část jest kladná; odvození to podal pomocí svrchu zmíněné věty Cauchyovy. Jeho výsledky algebraicky odvodil *L. Orlando***) na podkladě rovnice pro poloviční součet kořenů. Výsledky Hurwitzovy a to ještě zjednodušené***) vyplývají bezprostředně z řad níže odvozených.

Konečně jest vytknouti, že z vývodů následujících jako jednoduchý důsledek následuje algebraický důkaz fundamentální věty algebry (že každá rovnice má kořen). Postačí to, jak známo, dokázati pro rovnice stupně sudého a jest několik důkazů ryze arithmetických (algebraických). Pokud jsou mi známy, používají vesměs rovnice pro poloviční součet (anebo celý součet) kořenů. Jakožto jeden z nejznámějších uvádím důkaz *Cliffordův* reprodukovaný v Cesàro „Elem. Lehrbuch der alg. Analysis" str. 377—380.

---

*) *A. Hurwitz*, Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt; Math. Ann., sv. 46 (r. 1895).

**) *L. Orlando*, Sul problema di Hurwitz relativo alle parti reali delle radici di un' equazione algebrica; Math. Ann., sv. 71 (r. 1912) a dříve v několika pojednáních nacházejících se v Atti della reale Accad. dei Lincei.

***) Tak ku př. pro rovnici 4-tého stupně uvádí Hurwitz jako podmínky, aby rovnice měla kořeny jenom se zápornými reálnými částmi tyto nerovniny

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0, \quad -a_4 a_1^2 + a_3 a_2 a_1 - a_3^2 a_0 = U > 0, \quad a_4 > 0;$$

jako důsledek mých výsledků plynou však nerovniny

$$a_1 > 0, \quad U > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0.$$

I.

1. Nejprve zabývati se budeme rovnicí, jejíž kořeny jsou poloviční součty dvou různých kořenů rovnice dané. Je-li daná rovnice

$$f(x) = 0$$

aneb obšírněji psáno:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

a její kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, budeme hledati rovnici, jejíž kořeny jsou $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3), \ldots$, což jest $\frac{1}{2} n(n-1)$ hodnot (obecně různých). K rovnici této lze dospěti tímto známým způsobem. Označme

$$\xi = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2), \qquad \eta = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2),$$

pak jest

$$f(\xi + \eta) = 0, \qquad f(\xi - \eta) = 0$$

a také, jsou-li α_1, α_2 různé hodnoty a tudíž η od nully různo,

$$\tfrac{1}{2}[f(\xi + \eta) + f(\xi - \eta)] = 0, \quad \frac{1}{2\eta}[f(\xi + \eta) - f(\xi - \eta)] = 0. \tag{1}$$

To jsou dvě rovnice pro dvě neznámé ξ, η. Provedeme-li eliminaci veličiny η, dostaneme rovnici pro ξ, jež bude stupně $\frac{1}{2} n(n-1)$.

Eliminaci tu provedeme postupným dělením. Nejprve, užívajíce Taylorovy identity, klademe

$$f(\xi + \eta) = \eta^n + A_1 \eta^{n-1} + A_1 \eta^{n-2} + \ldots + A_n,$$

kdež

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!} f^{(n-k)}(\xi)$$

jest mnohočlen v ξ (vždy) stupně k-tého. Předpokládejme dále pro jednoduchost, že n jest *číslo sudé*; $n = 2m$. Pak jde o eliminaci čísla η z rovnic

$$\begin{aligned} \eta^{2m} + A_2 \eta^{2m-2} + A_4 \eta^{2m-4} + \ldots + A_{2m} &= 0, \\ A_1 \eta^{2m-2} + A_3 \eta^{2m-4} + \ldots + A_{2m-1} &= 0. \end{aligned} \tag{1'}$$

Značme krátce $\eta^2 = X$ a levou stranu prvé z posledních dvou rovnic $g(X)$, druhé z obou rovnic pak $h(X)$. Budeme nyní děliti mnohočlen $g(X)$ mnohočlenem $h(X)$, až dostaneme zbytek stupně $(m-2)$; při tom, abychom se vyhnuli zlomkům, násobíme dělence výrazem A_1^2; zbytek označíme $-r_1(X)$. Koefficient nejvyšší mocniny proměnné X v $r_1(X)$, t. j. mocniny $(m-2)$-té budiž $\mathfrak{c}_1$. Dělíme-li nyní $\mathfrak{c}_1^2 h(X)$ mnohočlenem $r_1(X)$, obdržíme zbytek, jehož koefficienty jsou vesměs, jak známo, dělitelny A_1^2, což k vůli symmetrii znamenati budeme též $\mathfrak{c}_0^2$, takže zbytek můžeme napsati ve tvaru $-\mathfrak{c}_0^2 r_2(X)$, a t. d. Dostáváme takto postupně řetěz rovnic

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_0^2\, g(X) &= q_0(X)\, h(X) - r_1(X) \\ \mathfrak{c}_1^2\, h(X) &= q_1(X)\, r_1(X) - \mathfrak{c}_0^2\, r_2(X) \\ \mathfrak{c}_2^2\, r_1(X) &= q_2(X)\, r_2(X) - \mathfrak{c}_1^2\, r_3(X) \qquad (2) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{c}_{m-2}^2 r_{m-3}(X) &= q_{m-2}(X)\, r_{m-2}(X) - \mathfrak{c}_{m-3}^2\, r_{m-1} \end{aligned}$$

Tu jest zbytek r_{m-1} již nezávislý na X; při tom jest ovšem mlčky předpokládáno, že $r_1(X)$ jest vskutku stupně $(m-2)$, $r_2(X)$ stupně $(m-3), \dots$, kterážto okolnost při neurčitém ξ vskutku vždy nastává, jakož ostatně v pozdějším odstavci bude prokázáno, až podáme vyjádření polynomů $r_k(X)$.

Rovnice

$$r_{m-1} = 0$$

nám poskytuje výsledek eliminace čísla $\eta^2 = X$ z rovnic (1) a dává nám hledanou rovnici v ξ pro poloviční součet kořenů dané rovnice. Rovnice ta jest nutně stupně $\frac{1}{2}n(n-1)$ a kdybychom z řetězu rovnic (2) stupeň tento počítali, obdrželi bychom pro stupeň ten vskutku ono číslo (ovšem za jistých předpokladů úvahu tuto zjednodušujících). Dokážeme však i tento výsledek později obecně a nebudeme se odůvodňováním jeho nyní zdržovati.

Značíme-li dále

$$r_k(0) = \mathfrak{d}_k, \quad h(0) = A_{2m-1} = \mathfrak{d}_0, \quad g(0) = A_{2m} = \mathfrak{d}_{-1}$$

a *sestrojíme-li řadu* (polynomů v proměnné ξ)

$$1,\ \mathfrak{c}_0,\ \mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_{m-2},\ r_{m-1},\ \mathfrak{d}_{m-2},\ \mathfrak{d}_{m-3}, \dots \mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{d}_0,\ \mathfrak{d}_{-1} \qquad (3)$$

pak, nejsou-li dva po sobě jdoucí členové této řady pro určité ξ rovny nulle, a je-li r_{m-1} a rovněž $\mathfrak{d}_{-1} = A_{2m} = f(\xi)$ od nully různo, řada ta počtem změn znaménkových nám udává počet kořenů rovnice dané, jichž reálná část jest větší než ξ.

Tento výrok jest platný i tehdy, je-li $r_{m-1} = 0$ a čísla $\mathfrak{c}_{m-2}$, $\mathfrak{d}_{m-2}$ jsou různa od nully a mají znaménka protivná.

Jestliže $r_{m-1} = 0$ a čísla $\mathfrak{c}_{m-2}$, $\mathfrak{d}_{m-2}$ jsou různa od nully a mají znaménka stejná, jest jeden pár kořenů komplexních rovnice dané, jehož reálná část jest rovna ξ. Jestliže $\mathfrak{d}_{-1} = A_{2m}$ jest rovno nulle, jest jeden kořen rovnice dané rovný ξ.

Nebylo by nesnadno podati důkaz těchto vět na základě definice dané čísel $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, kdybychom zavedli ještě zjednodušující předpoklady; omezím se však nejprve na to, že postup, jakého by bylo tu lze užiti, osvětlím na příkladech rovnice 6. stupně a také na příkladě rovnice 5. stupně, aby též bylo jasno, jak třeba svrchu uvedenou větu modifikovati pro rovnice lichého stupně. Obecně platný důkaz věty bude pak podán později při neodvislém vyjádření výrazů $\mathfrak{c}_k$, $\mathfrak{d}_k$ (viz odstavce II., III., IV., kde značeny tyto veličiny C_k, c_k), při čemž omezím se toliko na případ n sudého, jakožto důležitějšího a poněkud jednoduššího, ponechávaje případ stupně lichého k podrobnému provedení mladším pracovníkům.

2. Při rovnici stupně šestého jest $g(X) = X^3 + A_2X^2 + A_4X + A_6$, $h(X) = A_1X^2 + A_3X + A_5$; dělením pak obdržíme pro první zbytek tvar $AX + B$, kde

$$A = A_5A_1 - A_4A_1^2 - A_3^2 + A_3A_2A_1,$$
$$B = - A_6A_1^2 - A_5A_3 + A_5A_2A_1,$$

zbytek poslední má pak očividně tvar

$$U = \frac{1}{A_1^2}(-A_1B^2 + A_3AB - A_5B^2)$$

a jde o to vyšetřiti počet změn znaménkových v řadě

$$1,\ A_1,\ A,\ U,\ B,\ A_5,\ A_6. \qquad (m)$$

Členové této řady jsou mnohočleny v ξ a jest snadno vyčísliti koefficienty při nejvyšší mocnině ξ, tím že vycházíme od rovnice šestého stupně tvaru $x^6 = 0$. Poznali bychom tak, že stupně v ξ jsou při členech řady dány čísly 0, 1, 6, 15, 8, 5, 6 a že koefficienty při nejvyšších mocninách jsou čísla vesměs kladná. Dostáváme (jelikož stupně v ξ střídají se v paritě), že řada (m) dává pro $\xi = -\infty$ šest změn znaménkových, pro $\xi = \infty$ pak žádnou. Ztrácí se tedy při přechodu od $-\infty$ do ∞ šest změn znaménkových. Bylo by dále snadno prokázati, že jenom při zvláštních podmínkách pro koefficienty dané rovnice (t. j. pro čísla $a_1, a_2, \ldots, a_6$) stávati se mohou dva po sobě jdoucí členy řady (m) pro jednu hodnotu proměnné ξ nullou; omezím se pak jenom na takové rovnice, při kterých dva po sobě jdoucí členové v (m) nejsou pro žádné ξ současně rovny nulle.*) Pak vymizí li ku př. A_1 jest $A = -A_3^2$ a mají tedy členové sousedící s $A_1 = 0$ protivná znaménka; totéž platí pro hodnoty proměnné ξ, pro něž vymizí jeden ze členů A, B, A_5, jak z pouhého pohledu na rovnice definující členy řady (m) vyplývá. Může se tedy počet změn znaménkových v řadě (m) měniti jenom tenkrát, když ξ prochází nullovým bodem buď členu A_6, aneb členu U. Avšak, prochází-li ξ nullovým bodem členu A_6 (t. j. reálným kořenem dané rovnice) rostouc, ubude jedna změna znaménková (neboť $A_6 = f(\xi)$, $A_5 = f'(\xi)$). Nullové body rovnice $U = 0$ jsou poloviční součty kořenů rovnice dané; jestliže však $\xi = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, jest dle svrchu uvedeného pro toto ξ $AX + B$ největší společnou mírou $g(X)$ a $h(X)$ a hodnota pro X činící tento výraz nullou jest $\frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)^2$; jsou-li tedy α_1, α_2 kořeny reálné, mají A, B protivná znaménka, jsou-li komplexně sdružené, mají A, B stejná znaménka. Mění se tedy ještě počet změn znaménkových v řadě (m), když ξ prochází reálnou částí dvou komplexně sdružených kořenů, o dvě; má-li se však při přechodu od $-\infty$ do ∞ ztratiti celkem 6 změn, pak nutně, prochází-li ξ reálnou částí dvou kompl. sdruž. kořenů dané rovnice rostouc, *ztratí se* dvě změny znaménkové. *Jest tedy v řadě* (m) *tolik změn znaménkových, kolik v rovnici dané jest kořenů, jichž reálná část jest větší než* ξ (není-li ovšem $U = 0$ pro to určité ξ a zároveň A, B stejného znaménka, ve kterémžto případě čtenář snadno větu dle předcházejícího doplní). Rozšíření těchto výsledků na obecné rovnice stupně šestého (bez omezujících předpokladů) není obtížno, jelikož však obdobná úvaha později obecně bude provedena, opomíjím je na tomto místě.

Pro rovnice 5. stupně klademe $g(X) = X^2 + A_2 X + A_4$, $h(X) = A_1 X^2 + A_3 X + A_5$. Dělíme nyní $h(X)$ výrazem $g(X)$; první zbytek jest $(-A_3 + A_2 A_1) X + (-A_5 + A_4 A_1)$; po-

---

*) Rovnice ty ani nemohou míti kořeny mnohonásobné ani rovnice pro poloviční součet kořenů dané rovnice, t. j. rovnice $U = 0$ nemá kořenů mnohonásobných.

slední pak zbytek jest $-(-A_5+A_4A_1)^2+A_2(-A_5+ +A_4A_1)(-A_3+A_2A_1)-A_4(-A_3+A_2A_1^2)^2$; značíme-li jej U, můžeme za řadu základní voliti řadu (vynechávajíce A_1 na prvém místě)

$$1,\ -A_3+A_2A_1,\ U,\ -A_5+A_4A_1,\ A_4,\ A_5. \tag{n}$$

K ní lze přičiniti tytéž poznámky jako ku řadě (m) a dokázati, že v řadě (n) jest tolik změn znaménkových, kolik v rovnici $x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0$ jest kořenů, jichž reálná část jest větší než ξ.

II.

Abych podal konstrukci obecných řad řešících náš problém, budu vycházeti od výrazů sestrojených v mém pojednání „O symmetrických soustavách čísel a větě Sturmově“. Rozpravy XV., č. 12 (1906).

Označme

$$D_k(X)=\begin{vmatrix}\sigma_0, & \sigma_1, & \ldots & \sigma_{k-1}\\ \sigma_1, & \sigma_2, & \ldots & \sigma_k\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \sigma_{k-1}, & \sigma_k, & \ldots & \sigma_{2k-2}\end{vmatrix}(X-\varepsilon_1)(X-\varepsilon_2)\ldots(X-\varepsilon_m),$$

při čemž

$$\sigma_k=\frac{\Theta_1\varepsilon_1^k}{X-\varepsilon_1}+\frac{\Theta_2\varepsilon_2^k}{X-\varepsilon_2}+\ldots\ldots+\frac{\Theta_m\varepsilon_m^k}{X-\varepsilon_m}.$$

Pak jest patrně dle známých vět o determinantech (o rozkladu determinantu aneb o násob. obdélníkových matic)

$$D_k(X)=\Sigma\,\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_k(X-\varepsilon_{k+1})(X-\varepsilon_{k+2})(X-\varepsilon_m)[1,2,\ldots,k]^2, \tag{4}$$

kde součet jest bráti tak, že místo kombinace $(1, 2\ldots, k)$ dosazují se všecky možné kombinace k-té třídy z elementů $1, 2, \ldots, m$ a za $(k+1, k+2, \ldots, m)$ doplňkové kombinace tak, aby oběma kombinacemi se doplňujícími všecky prvky $1, 2, \ldots, m$ byly vyčerpány, a kde dále jest

$$[1, 2, \ldots, k]^2=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2(\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2\ldots(\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k)^2.$$

Pro $D_k(X)$ jest platna tato relace — součin $(X-\varepsilon_1)(X-\varepsilon_2)\ldots$

$(X - \varepsilon_m)$ označme pro krátkost $g(X)$ —

$$D_k(\varepsilon_1) = \Sigma\, \Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta_k (\varepsilon_1 - \varepsilon_{k+1}) \ldots (\varepsilon_1 - \varepsilon_m) [1, 2, \ldots, k]^2$$
$$= \Theta_1\, g'(\varepsilon)\, \Sigma' \Theta_2 \Theta_3 \ldots \Theta_k (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \ldots (\varepsilon_1 - \varepsilon_k)$$
$$[2, 3, \ldots, k]^2,$$

při čemž čárka u znaménka součtového poukazuje k tomu, že součet vztahuje se na všecky permutace $(k - 1)$ třídy z elementů $2, 3, \ldots, m$, jež postupně jest dosazovati místo permutace $(2, 3, \ldots, k)$ za znaménkem součtovým vypsané. Označíme-li

$$H_k(X) = \Sigma\, \Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta_k (X - \varepsilon_1)(X - \varepsilon_2) \ldots (X - \varepsilon_k) [1, 2, \ldots, k]^2,$$

jest patrně v důsledku poslední rovnice

$$D_k(\varepsilon_1) = H_{k-1}(\varepsilon_1) \,.\, \Theta_1\, g'(\varepsilon_1). \tag{5}$$

Avšak mezi polynomy $H_k(X)$, jež lze psáti jako determinanty ve tvaru

$$H_k(X) = \begin{vmatrix} S_0 X - S_1, & S_1 X - S_2, & \ldots, & S_{k-1} X - S_k \\ S_1 X - S_2, & S_2 X - S_3, & \ldots, & S_k X - S_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{k-1} X - S_k, & S_k X - S_{k+1}, & \ldots, & S_{2k-2} X - S_{2k-1} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} S_0, & S_1, & \ldots & S_{k-1}, & 1 \\ S_1, & S_2, & \ldots & S_k, & X \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_k, & S_{k+1}, & \ldots & S_{2k-1}, & X^k \end{vmatrix}, \tag{6}$$

$$S_k = \Theta_1 \varepsilon_1^k + \Theta_2 \varepsilon_2^k + \ldots + \Theta_k \varepsilon_m^k$$

jsou platny relace, jež snadno lze dokázati z pouček determinantních*)

$$C_{k-1}^2 H_k(X) + (C_{k-1} C'_k - C_k C'_{k-1} - C_{k-1} C_k X) H_{k-1}(X) +$$
$$+ C_k^2 H_{k-2}(X) = 0,$$

$$C_k = \begin{vmatrix} S_0, & S_1, & \ldots & S_{k-1} \\ S_1, & S_2, & \ldots & S_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{k-1}, & S_k & & S_{2k-1} \end{vmatrix}$$

---

*) Viz ku př. *E. Pasca'*, I Determinanti, str. 91, 92, kdež uvedena příslušná literatura. Nejjednodušší důkaz relací uvedených jest pravděpodobně od *Netto*, Journal für r. u. a. Math. 116, str. 44 (1896).

a při čemž C'_k dostaneme z C_k nahradíme-li indexy v elementech posledního řádku čísly vesměs o jednu většími. Relace tyto jsou, klademe-li ještě $H_0(X) = 1$, platny $k = 2, 3 \ldots$

Než vztah (5) jest platen, ať ε_1 nahradíme kterýmkoliv z čísel $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, jež *pokládati budeme v následujícím za různá.* Jelikož pak $D_k(X)$ jsou polynomy pro $k = 1, 2, \ldots m$ stupně vesměs nižšího než m, následuje z (5) a (7) ihned tato relace

$$C_{k-1}^2 D_{k+1}(X) + (C_{k-1}C'_k - C_k C_{k-1} - C_{k-1}C_k X) D_k(X) + \\ + C_k^2 D_{k-1}(X) = 0 \quad (8)$$

pro $k = 2, 3, \ldots, m-1$ Avšak stanovíme li, že

$$D_0(X) = (X - \varepsilon_1)(X - \varepsilon_2) \ldots (X - \varepsilon_m),$$

a hledáme-li na základě (4) lineární vztah mezi $D_0(X)$, $D_1(X)$, $D_2(X)$, obdržíme po snadném počtu vztah

$$D_2(X) + (\Sigma\Theta_1\varepsilon_1 - X\Sigma\Theta_1) D_1(X) + (\Sigma\Theta_1)^2 D_0(X) = 0,$$

který spadá do (8) jako zvláštní případ pro $k = 1$, volíme-li jenom $C_0 = 1$, $C'_0 = 0$; neboť jest $C_1 = S_0 = \Sigma\Theta_1$. $C'_1 = S_1 = \Sigma\Theta_1\varepsilon_1$. V důsledku však relací (8) platných pro $k = 1, 2, \ldots m$ jest $D_0(X)$, $D_1(X), \ldots D_m(X)$ řada funkcí vznikajících užitím algorithmu Euklidova na polynomy $D_0(X)$, $D_1(X)$ a to způsobem vyloženým v předcházejícím odstavci, jsou-li jenom $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$, jež jsou koefficienty nejvyšších mocnin X v $D_0(X)$, $D_1(X), \ldots D_{m-1}(X)$ (jak patrno z výrazů determinantních svrchu uvedených) vesměs od nully různá čísla. Má-li rovnice $g(X) = 0$, kde $g(X)$ jest mnohočlen předcházejícího odstavce, vesměs různé kořeny (což pří libovolném ξ různém od konečného počtu pevných hodnot vskutku jest) můžeme klásti $D_0(X) = g(X)$ (to ostatně k vůli stručnosti bylo již svrchu zavedeno) a poněvadž

$$D_1(X) = \left(\frac{\Theta_1}{\xi - \varepsilon_1} + \frac{\Theta_2}{\xi - \varepsilon_2} + \ldots + \frac{\Theta_m}{\xi - \varepsilon_m}\right) g(X)$$

stačí k tomu, aby splněna byla rovnost $D_1(X) = h(X)$, kdež $h(X)$ jest opět mnohočlen definovaný v odstavci předcházejícím, voliti

$$\Theta_k = \frac{h(\varepsilon_k)}{g'(\varepsilon_k)}.$$

Jak souvisí polynomy $r_k(X)$ a čísla $\mathfrak{c}_k$ odstavce předcházejícího s polynomy $D_k(X)$ a čísly C_k, jest na snadě a není třeba obšírněji se o tom zmiňovati (a rovněž tak o číslech $\mathfrak{d}_k$).

III.

1. V následujícím budeme zabývati se znaménky koefficientů při nejvyšší mocnině X, jakož i koefficientů při nejnižších mocninách X (t. j. členů nezávislých na X) v polynomech $D_k(X)$. Prvé označili jsme C_k, druhé označíme c_k a budeme tedy vyšetřovati, jaká znaménka mají členové řady

$$C_0 = 1,\ C_1 = A_1,\ C_2, \ldots C_m = D_m = c_m,\ c_{m-1}, c_{m-2}, \ldots c_1 = A_{2m-1},\quad c_0 = A_{2m}. \tag{9}$$

Nejprvé vyšetřování to provedeme pro ten případ, že ξ má velmi velikou absolutní hodnotu (že $|\xi|$ jest větší než absolutní hodnota kteréhokoliv kořenu každé z rovnic $C_k = 0$, $c_k = 0$); k tomu cíli postačí nalézti znaménko nejvyšší mocniny proměnné ξ ve výrazech C_k, c_k. Z rovnic, které nám definují (postupným dělením) polynomy $D_k(X)$ dostáváme snadno, že stupně polynomů C_k resp. c_k v proměnné ξ jsou nejvýše rovny číslu $k(2k-1)$ resp. $2m + k(2k-3)$. Podržíme-li tudíž v koefficientech polynomů $g(X) = D_0(X)$, $h(X) = D_1(X)$, jež jsme značili A_k, toliko členy s nejvyšší mocninou čísla ξ (t. j. v A_k člen $\binom{2m}{k}\xi^k$), provedeme-li potom s těmito tak redukovanými mnohočleny $g(X)$, $h(X)$ výpočet výrazů C_k, c_k, pak součinitel při $\xi^{k(2k-1)}$ v C_k bude týž, jako kdybychom polynomy $g(X)$, $h(X)$ nebyli redukovali naznačeným způsobem. *Je-li tedy ten součinitel od nully různý, udává nám při $\xi = \infty$ svým znaménkem znaménko výrazu C_k vypočteného* pro neredukované $g(X)$, $h(X)$. Podržíme-li však v koefficientech polynomů $g(X)$, $h(X)$ v každém toliko člen s nejvyšší mocninou s ξ redukují se tyto polynomy na výrazy

$$\tfrac{1}{2}[(\xi+\eta)^{2m} + (\xi-\eta)^{2m}] \text{ resp. } \frac{1}{2\eta}[(\xi+\eta)^{2m} - (\xi-\eta)^{2m}],\quad \eta^2 = X, \tag{10}$$

Řešíme-li rovnici pro X

$$(\xi+\eta)^{2m} + (\xi-\eta)^{2m} = 0,\quad \eta^2 = X,$$

dostaneme snadným počtem kořeny ve tvaru

$$\varepsilon_k = -\xi^2 \cotg^2 \frac{2k-1}{4m}\pi; \quad k = 1, 2, 3, \dots m$$

a pro Θ_k dostaneme rovněž snadným počtem

$$\Theta_k = \frac{\xi}{n \sin^2 \frac{2k-1}{4n}\pi}$$

Jsou tedy pro dostí velikou $|\xi|$ kořeny ε_k vesměs *reálné a záporné*, čísla Θ_k jsou pak téhož znaménka jako ξ; užijeme-li těchto výsledků ve výraze (4) pro $D_k(X)$ dostaneme ihned, že pro polynomy (10) čísla C_k, c_k nabývají těchto hodnot

$$C_k = \gamma_k \xi^{k(2k-1)}, \quad c_k = \gamma' \xi^{2m+k(2k-3)},$$

při čemž $\gamma_k > 0$ i $\gamma'_k > 0$.

V případě obecném jest tedy

$C_k = \gamma_k \xi^{k(2k-1)} +$ členy v ξ stupně nižšího než $k(2k-1)$,

$c_k = \gamma'_k \xi^{2m+k(2k-3)} +$ členy v ξ st. nižšího než $2m + k(2k-3)$.

Poskytuje tudíž řada (9) pro $\xi = -\infty$ přesně $2m$ změn znaménkových, pro $\xi = \infty$ pak žádnou změnu znaménkovou a ztrácí se následkem toho, že ξ přechází spojitě od $-\infty$ do $+\infty$, při tomto přechodu celkem $2m$ změn znaménkových (aneb — obšírněji řečeno — o $2m$ více se jich ztratí než získá). Zároveň jest patrno, že počet hodnot ξ, pro které C_k a c_k mohou býti rovny nulle, jest konečný (kteroužto vlastnost mají i výrazy později zavedené a označené $\mathfrak{A}(r_1, r_2, \dots r_k)$, $\mathfrak{a}(r_1, \dots)$, jak stejně patrno). (Dokončení.)

O určité imaginárné ploše stupně 2. druhu III.

Podal prof. Dr. Vinc. Jarolímek.

I.

1. Dvě reálné kuželosečky A, B ležící ve dvou různých rovinách π, ϱ, ale na téže ploše 2 stupně φ^2,

a) mají dva společné body x, y, reálné nebo imaginárné;

b) indukují na průsečnici rovin $\overline{\pi\varrho} \equiv U$ touž involuci harmonických pólů, jejíž samodružné body jsou x, y;