Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vincenc Jarolímek

O určité imaginárné ploše stupně 2. třetího druhu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 50 (1921), No. 1, 33--41

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122279

dostaneme snadným počtem kořeny ve tvaru

$$\varepsilon_k = -\xi^2 \operatorname{cotg}^2 \frac{2k-1}{4m}\pi\,; \quad k = 1, 2, 3, \ldots m$$

a pro Θ_k dostaneme rovněž snadným počtem

$$\Theta_k = \frac{\xi}{n \sin^2 \frac{2k-1}{4n}\pi}$$

Jsou tedy pro dostí velikou $|\,\xi\,|$ kořeny ε_k vesměs *reálné a záporné,* čísla Θ_k jsou pak téhož znaménka jako ξ; užijeme-li těchto výsledků ve výraze (4) pro $D_k(X)$ dostaneme ihned, že pro polynomy (10) čísla C_k, c_k nabývají těchto hodnot

$$C_k = \gamma_k \xi^{k(2k-1)}, \quad c_k = \gamma' \xi^{2m+k(2k-3)},$$

při čemž $\gamma_k > 0$ i $\gamma'_k > 0$.

V případě obecném jest tedy

$C_k = \gamma_k \xi^{k(2k-1)} +$ členy v ξ stupně nižšího než $k(2k-1)$,

$c_k = \gamma'_k \xi^{2m+k(2k-3)} +$ členy v ξ st. nižšího než $2m + k(2k-3)$.

Poskytuje tudíž řada (9) pro $\xi = -\infty$ přesně $2m$ změn znaménkových, pro $\xi = \infty$ pak žádnou změnu znaménkovou a ztrácí se následkem toho, že ξ přechází spojitě od $-\infty$ do $+\infty$, při tomto přechodu celkem $2m$ změn znaménkových (aneb — obšírněji řečeno — o $2m$ více se jich ztratí než získá). Zároveň jest patrno, že počet hodnot ξ, pro které C_k a c_k mohou býti rovny nulle, jest konečný (kteroužto vlastnost mají i výrazy později zavedené a označené $\mathfrak{A}(r_1, r_2, \ldots r_k)$, $\mathfrak{a}(r_1, \ldots)$, jak stejně patrno). (Dokončení.)

O určité imaginárné ploše stupně 2. druhu III.

Podal prof. Dr. Vinc. Jarolímek.

I.

1. Dvě reálné kuželosečky A, B ležící ve dvou různých rovinách π, ϱ, ale na téže ploše 2 stupně φ^2,

a) mají dva společné body x, y, reálné nebo imaginárné;

b) indukují na průsečnici rovin $\overline{\pi\varrho} \equiv U$ touž involuci harmonických pólů, jejíž samodružné body jsou x, y;

c) leží na dvou kuželových plochách 2. stupně α, β, jsou tedy proniky kužele α (i β) s rovinami π, ϱ.

Plocha 2. stupně φ^2 může býti dána dvěma reálnými kuželosečkami A, B, jež mají dva společné body x, y, a jednou reálnou tečnou rovinou μ. Mohou pak tu nastat případy tyto:

2. Rovina μ seče obě křivky A, B v bodech reálných: křivku A v bodech t_1, t_2, křivku B v bodech u_1, u_2. Tečná rovina μ obsahuje čtyři reálné body plochy φ^2; tato musí tedy být sborcenou a spojnice $\overline{t_1 u_1}$, $\overline{t_2 u_2}$ (nebo $\overline{t_1 u_2}$, $\overline{t_2 u_1}$) jsou površky, ve kterých rovina μ plochu φ^2 seče. Průsečík $(\overline{t_1 u_1}, \overline{t_2 u_2}) \equiv z$ je bodem dotyčným; řídícími útvary A, B, $\overline{t_1 u_1}$ je plocha φ^2, obecně hyperboloid, určena s dostatek. Přímky $\overline{t_1 u_2}$, $\overline{t_2 u_1}$ dají druhý hyperboloid úloze hovící; oba jsou reálné a splynou v jedno, dotýká li se tečná rovina μ *jedné* z daných křivek, A nebo B. Dotýká li se rovina μ *obou* daných kuželoseček A, B, je li tedy tečnou k jedné z kuželových ploch α, β, jež křivkami A, B lze proložiti, plocha φ^2 stotožňuje se s kuželem α, resp. β.

3. Rovina μ nemá realných bodů s křivkami A, B vůbec. Body t_1, t_2, u_1, u_2, ve kterých rovina μ seče křivky A, B, jsou tedy imaginárné, podvojně sdružené. Body $\left\{\begin{matrix} t_1, t_2 \\ u_1, u_2 \end{matrix}\right.$ jsou samodružnými v elliptické involuci harmonických pólů křivky $\left\{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right.$, jejíž osou jest průsečnice $\left\{\begin{matrix} \mu\pi \equiv P \\ \mu\varrho \equiv R \end{matrix}\right.$. Nicméně jsou průsečíky imaginárných sdružených spojnic $(\overline{t_1 \tau_1}, \overline{t_2 \tau_2}) \equiv z$, $(\overline{t_1 \tau_2}, \overline{t_2 \tau_1}) \equiv y$ reálné, i sestrojí se podle G. P. IV. str. 31 a 32.[1]), když prve stanovíme střed a potenci involuce na přímce P (resp. R) vytvořené křivkou A (B). Tečná rovina μ a dotyčný její bod z určují s křivkami A, B žádanou plochu φ^2 s dostatek; rovina δ proložená bodem z tak, aby protala A, B v reálných bodech 1, 2, 3, 4, protne plochu φ^2 v kuželosečce E, kterou proložíme pěti body z, 1, 2, 3, 4, načež plocha φ^2 je stanovena třemi kuželosečkami A, B, E. Že však rovina μ seče φ^2 v přímkách *imaginárných* $\overline{t_1 \tau_1}$, $\overline{t_2 \tau_2}$, je plocha φ^2 v tomto případě *nepřím-*

---

[1]) G. P. IV. značí spis „Jarolímek, Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru", svazek IV.

ková. Totéž platí o ploše druhé, která jest určena bodem y a křivkami A, B[1]).

4. Rovina μ seče křivku A ve dvou reálných bodech t_1, t_2 (na přímce $\overline{\mu\pi} \equiv P$), křivku B ve dvou imaginárných bodech sdružených u_1, u_2 (na přímce $\overline{\mu\varrho} \equiv$ R), nebo naopak.

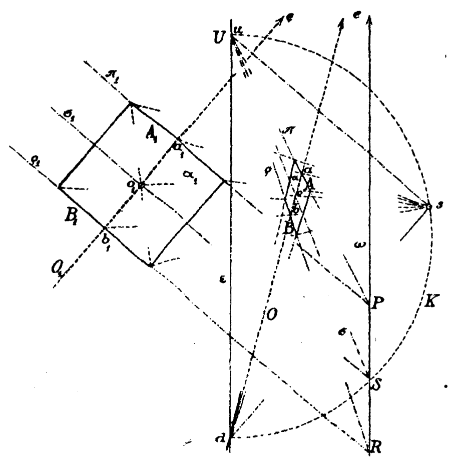
V tomto případě jsou přímky $\overline{t_1u_1}$, $\overline{t_2u_2}$ imaginárné, a nejsouce spolu sdruženy, mají i společný bod z pomyslný; a totéž platí i o spojnicích $\overline{t_1u_2}$ $\overline{t_2u_1}$. Žádaná plocha φ^2 je imaginárná [2]), majíc na reálné tečné rovině μ pomyslný bod dotyčný. Tato plocha φ^2 obsahuje však dvě reálné kuželosečky A, B, náleží tedy ke druhu *třetímu* (G. P. III. str. 101.), a má nutně také dvě reálné tečné plody kuželové 2. stupně. Že tato vlastnost přísluší imaginárné ploše stupně 2. druhu *II.* φ^2_1, dokázali jsme v G. P. V. na str. 62.; že však i na plochu druhu III. jí rozšířiti lze, jde na jevo z věty:

Imaginárnou plochu φ^2 stupně 2. druhu III. lze perspektivnou kollineací transformovati v imaginárnou plochu φ^2_1, stupně 2. druhu II. Pokládáme-li totiž A, B za podstavy kužele α (který danými kuželosečkami A, B podle odst. 1. c) lze proložiti), šikmo sříznutého, lze bráti *kužel α za relief válce přímého α_1*. Důkaz. Budiž U průsečnice rovin π, ϱ, ve kterých leží podstavy A, B (obr. 1., kdež nákresna postavena kolmo na U), d vrchol doplněného kužele α. Rovina ε položená vrcholem d a přímkou U budiž rovinou úběžnic (relief roviny ε_1 nekonečně vzdálené). Spusťme $\overline{du} \perp U$, opišme nad průměrem $\overline{du}$ kružnici K, zvolme na ní střed kollineace s (oko) a rovinu samodružnou (č. průmětnu) $\omega \parallel \varepsilon$ (roviny π, ϱ, ε, ω, jeví se v obraze přímkami). Aby kužel AB byl reliefem přímého válce A_1B_1, musí U býti úběžnicí rovin $\pi_1 \parallel \varrho_1$, ve kterých leží pod-

[1]) Označíme-li průsečík $(PR) \equiv x$, bude xyz společný polárný trojúhelník svazku kuželoseček EK, jehož základní body jsou t_1, t_2, u_1, u_2. Tento svazek jest pak pronikem roviny μ se svazkem ploch 2. stupně $\Sigma\varphi^2$, jež procházejí kuželosečkami A, B (srovnej v G. P. III. str. 32; v našem případě bikvadratika L^4 rozpadá se v kuželosečky A, B).

[2]) Přímky t_1u_2, t_2u_1 dají druhou plochu imaginárnou ψ^2; plochy φ^2 a ψ^2 jsou sdružené, pronikají se v *reálných* kuželosečkách A, B a jsou vepsány do dvou *reálných* kuželů 2 stupně γ, δ.

stavy válce A_1, B_1; stanovme tedy průsečnice rovin $\overline{\pi\omega} \equiv P$, $\overline{\varrho\omega} \equiv R$, proložme rovinu (sU), stopou P rovinu $\pi_1 \parallel (sU)$ stopou R rovinu $\varrho_1 \parallel (sU)$, a promítněme z bodu s podstavy A, B do A_1, B_1 na rovinách π_1, ϱ_1. Sestrojíme-li póly a, b kuželoseček A, B pro poláru U, budou a, b reliefy středů a_1, b_1 (jež obdržíme v průsečících paprsků $\overline{sa}$, $\overline{sb}$ s rovinami π_1, ϱ_1) podstav válce A_1, B_1, a protože spojnice pólů $\overline{ab} \equiv O$ jde vrcholem d kužele α, musí spojnice $\overline{a_1 b_1} \equiv O_1 \parallel sd$; že však $\overline{sd} \perp sU$

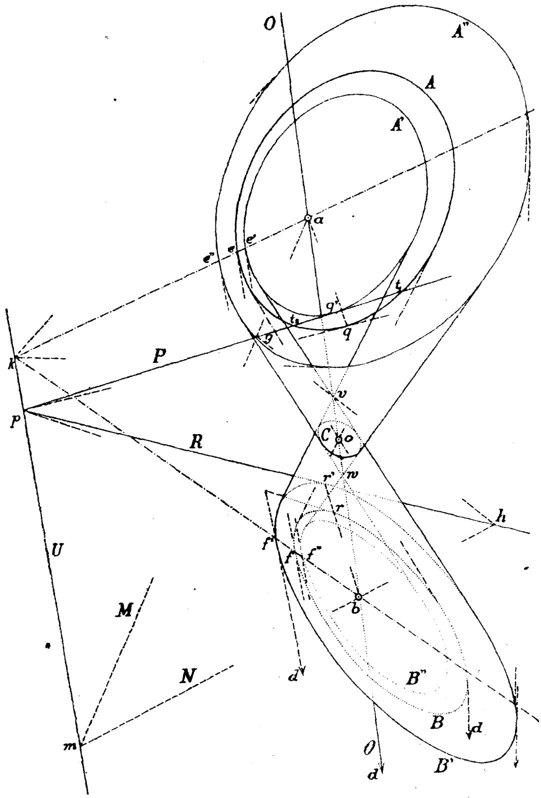


Obr. 1.

(v kružnici K), jest také $O_1 \perp \pi_1$, t. j. válec α_1 je *přímý*. Plocha φ^2 proložená křivkami A, B je reliefem plochy φ_1^2 druhu II., obsahující křivky $A_1 \cong B_1$. Stanovíme-li střed válce o_1, bude o_1 zároveň středem plochy φ_1^2, a rovina $o_1 \sigma_1 \perp O_1$ jednou hlavní její rovinou; ostatní dvě procházejí osou O_1 a osami křivky A_1.

5. Přikročme nyní k úloze:

Imaginární plocha φ^2 stupně 2. druhu III. buď dána dvěma reálnými kuželosečkami A, B, jež ležíce v různých rovinách π, ϱ, mají dva společné body x, y, a jednou reálnou tečnou rovinou μ, která seče křivku A v reálných bodech t_1, t_2, křivku však B v imaginárných bodech u_1, u_2; sestrojiti jest obě reálné plochy kuželové 2. stupně γ, δ, které ploše φ^2 jsou *opsány*. Buďtež v obr. 2. A, B obrazy daných kuželoseček, U obraz průsečnice rovin $\overline{\pi\varrho}$, který v našem případě A, B neseče, tudíž body x, y jsou pomyslné.



Obr. 2.

Křivky A, B leží na kuželi α, jehož vrchol zobrazíme průsečíkem d vnějších společných tečen obrazů A, B; tyto pak jsou perspektivně kollineárné na nákresně pro střed d a osu U. Póly a. b křivek A, B pro poláru U leží na přímce O jdoucí bodem d. Kužel α je reliefem přímého válce α_1, jehož osa je O_1; střed jeho o_1 má obraz svůj v bodě o, jejž obdržíme v průsečíku o vnitřních tečen obrazů A, B (nebo, jsou-li tečny pomyslné, druhém středu kollineačním křivek A, B), kdežto bod d_1 jest úběžný na O_1. Je tedy O_1 jednou hlavní osou plochy φ_1^2, jejíž reliefem je daná imaginárná plocha φ^2, a rovina $(o\,U) \equiv \sigma$ reliefem jedné hlavní roviny plochy φ_1^2.

Tečná kuželová plocha γ_1, jejíž osa jest O_1, má vrchol v_1 v průsečíku osy O_1 s tečnou rovinou μ_1 plochy φ_1, jejíž reliefem je daná rovina μ; a každá rovina $\pi_1 \perp O_1$ seče kužel γ_1 v kuželosečce A'_1, která je homothetická[1]) s kuželosečkou A_1 (danou reliefem A), a má střed svůj na ose O. Obraz vrcholu v kužele γ obdržíme takto: proložme přímkou O libovolnou rovinu λ a stanovme její průsečnici s rovinou $\mu \equiv (PR)$; veďme stopu M roviny λ na rovině π bodem a směrem libovolným, průsečík $(MU) \equiv$ spojme s bodem b přímkou $N \equiv \overline{\mu\varrho}$; M seče P v bodě g, N přímku R v bodě h, $\overline{gh}$ je průsečnice rovin $\overline{\lambda\pi}$ a seče přímku O v žádaném vrcholu v. Rovina π seče pak kužel γ_1 v kuželosečce A'_1, jejíž reliefem A' bude kuželosečka homothetická, jež dána je pólem a, polárou U a tečnou P. Veďme bodem $(PU) \equiv p$ tečnu $\overline{pq}$ ke křivce A, dotyčný bod q spojme s pólem a, stanovme průsečík $(\overline{aq}, A) \equiv q'$, a spojme $\overline{pq'}$ tečnou homologickou k A'; další body křivky A', jakož i sdružené průměry, z nichž jeden je $\parallel U$ a druhý sdružený k U, sestrojíme podle zákona kollineace křivek A, A' dle osy U a středu a.

Kužel γ, stanovený křivkou A' a vrcholem v protne rovinu δ v kuželosečce B' určené tečnou R, jejíž obraz sestrojíme tím, že vedeme bodem p tečnu $\overline{pr}$ k dané křivce B, dotyčný bod r spojíme s pólem b; $\overline{br}$ protne R v bodě r', načež sestrojíme kuželosečku B' kollineárnou ku B v soustavě (bU) pomocí homologických bodů r', r, Druhý kužel δ je reliefem kužele δ_1, souměrného s kuželem γ_1 centrálně podle středu o_1 i orthogonálně podle hlavní roviny $o_1\,\sigma_1 \parallel \pi_1$. Osa kužele δ_1 jest O_1, vrchol w_1; ježto $\overline{v_1 o_1} = \overline{o_1 w_1}$, jsou body v_1, w_1, o_1, d_1 (d_1 v nekonečnu) harmonické, což musí platit i o jejich obrazech; obraz vrcholu w (obr. 2.) obdržíme tedy jakožto čtvrtý harmonický bod k obrazům v, w, d. Kužel σ seče rovinu π v kuželosečce

---

[1]) Podle G. P. V. str. 61. Obrazy A, A', A'' homothetických křivek A_1, A'_1, A''_1 (obr. 2.) ovšem nejsou homothetické, nýbrž toliko perspektivně kollineárné podle obrazu osy U a obrazu středu a.

$A'' \cong B'$; obrazy těchto křivek jsou homologické podle středu d. Stanovme tedy na př. k bodu f' na B' homologický bod e'' na A'' [$\overline{bf'}, U) \equiv k$, $(\overline{ak}, \overline{df'}) \equiv e''$], a sestrojme kuželosečku A'' kollineárnou ku A v soustavě (aU) pomocí homologických bodů e'', e.

Kužel δ_1 protne posléze rovinu σ_1 v kuželosečce, jejíž obraz B'' obdržíme obdobně: stanovíme bod f'' homologický k bodu e' podle středu d, a sestrojíme kuželosečku B'' kollineárnou ku B v soustavě (bU) pomocí homologických bodů f'', f. Kužele γ a σ pronikají se ve dvou kuželosečkách C, D, jichž středy jsou o, d. Obraz křivky C jest kollineárný k obrazům A', a B' podle středu v a k obrazům A'', B'' podle středu w; osou kollineační v obou případech jest U, obraz středu o je pólem poláry U; a obdobné vlastnosti má obraz křivky D. Tato křivka D (jejíž obraz připadá mimo nákresnu) je reliefem kuželosečky D_1 nekonečně vzdálené na ploše válcové α_1, proložené křivkami $A_1 \cong B_1$. — Křivkami A, B a kuželi γ, δ je sestrojena *reálná kostra imaginárné plochy* φ^2 druhu III.

II.

6. Dva reálné kužele 2. stupně γ, δ, jež mají různé vrcholy v, w, ale jsou opsány téže ploše 2. stupně φ^2,

a) mají dvě společné tečné roviny ξ, η [1]), reálné nebo imaginárné;

b) na spojnici obou vrcholů $\overline{vw} \equiv O$ indukují touž involuci harmonických rovin polárných, jichž samodružné roviny jsou ξ, η;

c) pronikají se ve dvou kuželosečkách C, D, jsou tedy promítkami kuželosečky C (nebo D) ze dvou bodů v, w.

Abychom tedy stanovili dva kužele γ, δ tak, aby najisto měly dvě společné roviny tečné ξ, η (reál. č. imag.), zvolme rovinu σ, vytkněme v ní kuželosečku C, mimo rovinu σ dva body v, w, a z nich promítněme křivku C kuželovými plochami γ, δ; tyto pak budou se nutně pronikati v další reálné kuželosečce D, a v průsečících x, y křivek C, D budou kužele γ, δ míti společné roviny tečné. Body x. y, jsou-li reálné, obdržíme

[1]) Rovina ξ dotýká se kuželů podél přímek M, N a průsečík $(MN) \equiv p$ je dotyčným bodem roviny ξ na ploše φ^2; a obdobně stanoví se dotyčný bod q roviny η na φ^2.

takto: spojíme vrcholy $\overline{vw} \equiv O$, stanovíme průsečík p přímky O s rovinou σ, a bodem p vedeme tečny ke křivce C; body dotyčné jsou x, y.

Plocha 2. stupně φ^2 může býti dána dvěma k ní tečnými reálnými kuželovými plochami 2. stupně γ, δ, jež mají dvě společné tečné roviny ξ, η, a jedním reálným bodem m. Mohou pak tu nastati tyto případy:

7. Bod m nachází se *vně* daných kuželů; lze tedy bodem m položiti dvě reálné tečné roviny τ_1, τ_2 ke kuželi γ a dvě reálné tečné roviny ψ_1, ψ_2 ke kuželi δ. Průsečnice $\overline{\tau_1\psi_1}$, $\overline{\tau_2\psi_2}$ procházejí bodem m a jsouce površkami *sborcené* plochy φ^2, určují tečnou rovinu μ této plochy v bodě m; roviny μ, ξ, η s dotyčnými body resp. m, x, y určují s dostatek plochu φ^2, sborcený to hyperboloid. Průsečnice $\overline{\tau_1\psi_2}$, $\overline{\tau_2\psi_1}$, dají pak obdobně druhý hyperboloid úloze hovící. Oba splývají vjedno, je-li bod m na *jedné* z ploch γ, δ. Nachází-li se bod m na *obou* plochách kuželových γ, δ, tedy na jedné z kuželoseček C, D, v nichž γ a δ se pronikají, degeneruje plocha φ^2 v kuželosečku C, resp. D.

8. Bod m nachází se vnitř obou kuželů γ, δ, tudíž tečné roviny τ_1, τ_2, ψ_1, ψ_2 položené bodem m ke kuželům jsou imaginárné, podvojně sdružené. Roviny $\begin{cases} \tau_1, \tau_2 \\ \psi_1, \psi_2 \end{cases}$ jsou samodružnými v elliptické involuci harmonických polárných rovin kužele $\begin{cases} \gamma \\ \delta \end{cases}$ o vrcholu $\begin{cases} v \\ w, \end{cases}$ jejíž osou je spojnice $\begin{cases} \overline{mv} \equiv P \\ \overline{mw} \equiv R \end{cases}$. Nicméně průsečnice imaginárných sdružených rovin $\overline{\tau_1\psi_1}$, $\overline{\tau_2\psi_2}$ leží v *reálné* rovině ζ a průsečnice rovin $\overline{\tau_1\psi_2}$, $\overline{\tau_2\psi_1}$ v reálné rovině η. Sestrojíme je takto: protneme involuce rovinové libovolnou rovinou ε v involucích paprskových I, J (v každé dvě družiny), stanovíme (podle G. P. IV. str. 32. a 33.) reálné spojnice Z, Y imaginárných bodů, ve kterých se protínají navzájem samodružné paprsky involucí I, J, a proložíme roviny $(mZ) \equiv \zeta$, $(mY) \equiv \eta$.

Bod m a tečná rovina jeho ζ určuje s tečnými kuželi γ, δ žádanou plochu φ^2 s dostatek. Vytkněme v rovině ζ kdekoli bod k, položme jím tečné roviny τ_1, τ_2, ψ_1, ψ_2 ke kuželům γ, δ, sestrojme kužel 2. stupně $\varkappa$, který se dotýká pěti rovin ζ,

τ_1, τ_2, ψ_1, ψ_2 protněme jej rovinou (mxy) [kdež x, y jsou dotyčné body kuželů γ, δ] v kuželosečce K, podél níž bude se kužel $\varkappa$ dotýkati plochy φ^2. A obdobně opatříme si druhou a třetí kuželosečku na ploše φ^2. Ježto tečná rovina ζ seče φ^2 v přímkách imaginárných, je plocha φ^2 *nepřímková*; totéž platí o ploše druhé, která je určena tečnou rovinou η a kuželi γ, δ.

9. Bod m nachází se vně kužele jednoho, na př. γ, ale vnitř kužele druhého δ. Tečné roviny τ_1, τ_2 položené bodem m ke kuželi γ, jsou tedy reálné, kdežto tečné roviny ψ_1, ψ_2 položené bodem m ke kuželi δ jsou imaginárné, spolu sdružené. V tomto případě jsou průsečnice $\overline{\tau_1\psi_1}$, $\overline{\tau_2\psi_2}$ imaginárné, ale nejsouce spolu sdruženy, neleží v jedné rovině reálné ζ; plocha φ^2 tudíž majíc reálný bod m, ale v něm tečnou rovinu ζ pomyslnou, nemůže býti reálná; a totéž platí o druhé ploše, k níž vedou průsečnice $\overline{\tau_1\psi_2}$, $\overline{\tau_2\psi_1}$. Avšak imaginárná plocha φ^2 majíc dvě reálné tečné plochy kuželové γ, δ, obsahuje také nutně dvě reálné kuželosečky A, B, z nichž jedna prochází daným bodem m. Vytkněme si tudíž úlohu, reciprokou k úloze 5.:

Imaginárná plocha φ^2 stupně 2. druhu III. buď dána dvěma reálnými tečnými kuželi γ, δ, jež mají různé vrcholy v, w, ale dvě společné tečné roviny ξ, η, a jedním reálným bodem m, který se nachází vně kužele γ a vnitř kužele δ; sestrojiti jest obě reálné kuželosečky A, B, které leží na ploše φ^2.

Kužele γ, δ pronikají se ve dvou kuželosečkách C, D, a roviny jejich v přímce U. Stanovme póly o, d kuželoseček C, D ku poláře U; spojnice jejich $\overline{od}$ je totožná se spojnicí vrcholů kuželů $\overline{vw} \equiv O$. Proložme dále rovinu $(mU) \equiv \pi$, v níž obsažena bude kuželosečka A; průsečík $(O\pi) \equiv a$. Rovina π seče kužel γ v kuželosečce A'; její kollineárná transformace, určená bodem m, pro střed a a osu U dá křivku A. K tomu bude třeba bodu m' na A' homologického ku m; spojnice bodů $\overline{ma}$ protne A' v bodě m', načež pomocí bodu m sestrojíme snadno kollineárnou křivku A. Druhou kuželosečku B obdržíme takto: na přímce O sestrojme bod b tak, aby dvojpoměr $(o\,d\,a\,b) = -1$, proložme rovinu $(bU) \equiv \varrho$ a sestrojme její průsek B s plochou kuželovou α, která jest určena křivkou A a vrcholem d. Konstrukce tyto jsou předchozími úvahami odůvodněny s dostatek.