Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Kadeřávek

Stanovení oskulačních hyperboloidů sborcených ploch třetího a čtvrtého stupně, jež lze jim daným bodem vésti

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 40 (1911), No. 5, 570--574

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122271`

Konečný tvar konstrukce přímek A, B, C je tedy: *Najdu body*: $q \equiv (\delta, D)$, $h \equiv (\delta, \triangle)$; *svíticím bodem s vedu příčku S k mimoběžkám* D, $\triangle$, označím F *průsečnici rovin* δ a $(S, \triangle)$, $d \equiv (\delta, S)$ *leží na* F. *Najdu poláry* $\overline{of}$ *bodu* h *a* $\overline{d_2 f}$ *bodu* d *vzhledem ke* K, *spojím* $\overline{qh}$ *a označím*: $(\overline{qh}, \overline{of}) \equiv u$. *Najdu* t *tak, aby* $(q, u, t, h) = -1$, *označím*: $(\overline{ot}, \overline{d_2 f}) \equiv \mathfrak{w}$, $(\overline{qf}, \overline{ot}) \equiv \varphi$, $(\overline{of}, \overline{\varphi d_2}) \equiv v$, *pak* $\overline{vh}$ *je tečnou v* h *a* $\overline{d\mathfrak{w}}$ *v* d *k* X. *Je-li dále*: $y \equiv (\overline{qh}, \overline{d\mathfrak{w}})$, $z \equiv (\overline{dq}, \overline{vh})$, $x \equiv (\overline{yz}, F)$, *je* $\overline{xq}$ *tečnou v* q. *Nyní snadno narýsuji* X, *jejíž průsečíky* s K *jsou body* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

Podotýkám ještě: Protože každou sborcenou plochu třetího stupně lze uvésti do kollineace s konoidem Plückerovým, stačí důkaz provésti pro konoid Plückerův. Pro tuto plochu je K' kružnicí a tedy při důkazu odpadne pomocná kružnice K''.

Stanovení oskulačních hyperboloidů sborcených ploch třetího a čtvrtého stupně, jež lze jim daným bodem vésti.

Dr. **František Kadeřávek**, assistent české techniky v Praze.

Plocha sborcená třetího stupně **P** buď dána kuželosečkou A a přímkami B, C, z nichž B protínej křivku A; hledejme oskulační hyperboloid procházející daným bodem s. Kdyby předložená úloha byla již vyřešena hyperboloidem **H**, oskulujícím danou plochu podél přímky P, pak by rovina ϱ bodem s a libovolnou površkou plochy **P** určená protała plochy **P** a **H** v kuželosečkách π a χ, které by se v průsečném bodě p přímky P s rovinou ϱ oskulovaly protínajíce se ještě v bodě průsečném b přímky B s rovinou ϱ. Křivka χ mimo to musila by procházeti bodem s a průsečíkem c přímky C s rovinou ϱ — náležejíť obě přímky B i C oskulačnímu hyperboloidu.

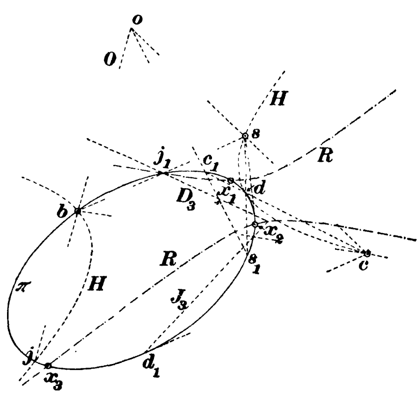
Z toho patrno, že předložená úloha redukuje se na následující rovinnou úlohu:

Body b, c, s proložiti kuželosečku tak, aby oskulovala danou, bodem b procházející kuželosečku π, kterouž úlohu řešíme takto:

Zvolme si na křivce π (viz obr.) libovolný bod d a sestrojme křivku H, která jdouc body b, s, c křivky π se v bodě d dotýká.

Ježto mají křivky π a H tři dané body realné společné, musí míti ještě jeden, ale pouze jediný bod společný; označme ho j. Zvolíme-li si ale naopak na křivce π bod j a hledáme-li body d, v nichž dotýkají se křivky π kuželosečky jdoucí body b, c, j, s, pak vycházejí body d dva.

Určujíť veškery kuželosečky svazku $bcjs$, jehož dva základní body na π leží, v křivce π involuci kvadratickou, jejímiž samodružnými body $d\,d'$ procházející křivky svazku $bcjs$ se dotýkají křivky π. Ježto pak každému bodu d odpovídá jen jeden jediný bod j, bodu j ale dvojina involuce kvadratické.



je zřejmo, že řada bodů j a v involuci sdružené dvojiny $d\ d'$ určují v křivce π řadu jedno-dvojznačnou, mající tři body samodružné x_1, x_2, x_3. V každém tomto bodu x splývá bod j kuželosečky body b, c, s proložené s dvěma soumeznými body splynulými v bodu d; má tedy křivka χ, body b, c, s proložená a v bodu x se kuželosečky π dotýkající. v bodě x tři soumezné body s křivkou π společné a je tedy jednou z hledaných křivek. Původně hledaný oskulační hyperboloid je křivkou χ a přímkami BC ji protínajícími úplně určen a oskuluje danou sborcenou plochu podél povrchové přímky proložené bodem x.

Jednotlivé dvojiny sdružených bodů řady jedno-dvojznačné sestrojíme výhodně takto: zvolme si bod d, v němž má se příslušná křivka H křivky π dotýkati, a považujme jej za střed kollineace křivek π a H. Bodům c a s homologické $c_1 s_1$ vytýkají na křivce π paprsky $\overline{cd}$, $\overline{sd}$, načež spojnice $\overline{c_1 s_1}$ jako homologická k $\overline{cs}$ protíná tuto v bodě o osy kollineace. Ježto H a π se protínají v realném bodě b, musí jím osa O procházeti a je body o, b určena. Další její průsečík j s křivkou π je hledaným homologickým bodem bodu zvoleného d.

Sestrojme si tímto způsobem pět dvojin $j_1 d_1 \ldots j_5 d_5$ uvažované jedno-dvojznačné řady a promítněme paprsky $D_1 \ldots D_5$ body $d_1 \ldots d_5$ z bodu j_1 a paprsky $J_1 \ldots J_5$ body $j_1 \ldots j_5$ z bodu d_1. Ježto takto vzniklé svazky $J_1 \ldots J_5$, $D_1 \ldots D_5$ jedno-dvojznačné mají společný paprsek $J_1 \equiv D_1$, jsou v poloze redukované; tu však protínají se homologické paprsky $J_2 D_2 \ldots$ v bodech redukční kuželosečky R, procházející středem j svazku dvojznačného a protínající tudíž křivku π ještě v dalších třech bodech $x_1 x_2 x_3$, hledaných to dvojných bodech uvažované jedno-dvojznačné řady na π.

Neprotíná-li přímka B kuželosečku A, tu křivka A a mimoběžky BC určují sborcenou plochu čtvrtého stupně. Hledejme i zde oskulační hyperboloidy procházející daným bodem s. Rovina, proložená body s, b, c, kdež b, c značí průsečíky přímek B, C s rovinou křivky A, protíná danou sborcenou plochu **P** v kuželosečce π a oskulační hyperboloid **H** plochy **P** vedený bodem s v kuželosečce χ, procházející body s, b, c a oskulující křivku π v bodě x, jímž vedená površka P plochy **P** jest přímkou, podél níž se plochy **P** a **H** oskulují. I zde budou hledané hyperboloidy určeny, rozřešíme-li rovinnou úlohu: body b, c, s proložiti kuželosečky oskulující danou křivku π, při čemž žádný z bodů b, c, s na křivku π nespadá, kterouž rozřešíme následním způsobem:

Zvolme si na křivce π bod d a sestrojme kuželosečku χ body b, c, d, s procházející a dotýkající se křivky π v bodě d. Mimo bod dotyčný d mají křivky π a χ ještě dva body e, e' společné; vyhledáme je snadno opět užitím kollineace o centru d. Z toho patrno, že libovolnému bodu d křivky π náleží dva určité body e, e' téže křivky, ale naopak kterémukoli bodu e (nebo e') přináleží čtyři určité body $d, d' d'', d'''$ křivky π. Jsou to body, v nichž dotýkají se křivky π kuželosečky jdoucí body b, c, s, e (resp. b, c, s, e').

Místo obecného důkazu ukažme tuto čtyřznačnost ve zvoleném, jinak však zcela obecném případě, kdy body b, c jsou úběžné imag. body kruhové roviny křivky π. Pak křivky χ body b, c, s tečně ke křivce π vedené jsou kružnice; přetvořme nyní vše reciprokými provodiči, při čemž střed transformace zvolme v bodě s. Tu veškery kružnice χ přejdou v tečny křivky ${}^1\pi$, v niž kuželosečka π přešla, a ony čtyři její tečny, jež lze bodem ${}^1e$ sdruženým k bodu e v této záměně ke křivce ${}^1\pi$ vésti, přeměněny zpět, dávají čtyři kružnice předloženou úlohu řešící.

Uvedeným způsobem vytčena jest na křivce π dvoj-čtyřznačná řada bodová, jejíchž šest samodružných bodů $x_1 \ldots x_6$ určuje v ploše **P** šest přímek, podél nichž sestrojené oskulační hyperboloidy procházejí bodem s. Abychom body $x_1 \ldots x_6$ nalezli, uvažujme nejprve dva obecné svazky přímkové dvoj-čtyřznačné:

$$P + \lambda\, Q = 0$$
$$P_1 + \lambda_1\, Q_1 = 0 \qquad (1)$$

kdež $P_1 Q_1 P Q$ značí lineárné výrazy v souřadnicích x a y a kdež parametry λ a λ_1 vázány jsou podmínkou:

$$\lambda^2\, \pi^4(\lambda_1) + p\lambda^1\, \pi_1^4(\lambda_1) + q^2\pi_2^4(\lambda_1) = 0, \qquad (2)$$

v níž p a q jsou koeficienty, π pak algebraické výrazy v λ_1 stupně čtvrtého. Vyloučením parametrů z rovnice (2) vychází algeb. rovnice šestého stupně v x, y, z níž patrno, že dva dvoj-čtyř-značné svazky vytvářejí průsečíky homologických paprsků algeb. křivku šestého stupně, mající ve středu svazku čtyřznačného bod čtyřnásobný a dvojný bod ve středu svazku druhého.

Zvolme nyní na křivce π dva body σ a σ'. Promítneme-li z prvého čtyřznačnou řadu bodů d, z druhého pak sdruženou řadu dvojznačnou bodů e na křivce π, vytvoří takto určené 2-, 4-značné svazky křivku Σ šestého stupně, protínající křivku π mimo 4násobný bod σ a dvojnásobný bod σ' ještě v dalších šesti bodech $x_1 \ldots x_6$, hledaných to samodružných bodech dané 2-, 4-značné příbuznosti v π.

Abychom si konstrukci usnadnili, nezvolme obecné body σ a σ' na π, nýbrž proložme body b, c, s křivku χ, která se ve dvou bodech křivky π dotýká, a ty zvolme za středy svazků. Takto určené svazky vytvářejí křivku Σ, redukující se na dvojnou přímku $\overline{\sigma\sigma'}$ (jevíc se každý její bod průsekem paprsku $\overline{\sigma\sigma'}$

svazku 4-značného se dvěma odpovídajícími, avšak v témže paprsku $\overline{\sigma'\sigma}$ splynulými paprsky svazku 2-značného) a křivku Σ' stupně čtvrtého, mající v bodě σ bod dvojný. Křivku Σ' určíme body, jež stanovíme, sestrojíme-li k zvoleným bodům d_1 . . . dvojiny sdružené $e_1 e'_1$ . . . Průsečíky $\overline{d_1\sigma} \,.\, \overline{e_1'\sigma}$; $\overline{d_1\sigma} \,.\, \overline{e'_1\sigma'}$ dávají určující body; mimo ně známe bod dvojný σ a i další dvojné body lze snadno pro křivku Σ' sestrojiti.

Z uvedených konstrukcí patrno, že lze je provésti, i když určující přímky P, Q jsou naprosto imaginárné.

Vliv principu relativnosti na formu rovnic vektorového pole.

Prof. Dr. **Arnošt Dittrich** v Třeboni.

Po dosavadních nezdarech stanoviti pohyb země vůči prostoru pozorováním na pohybující se zeměkouli máme zajisté právo důvěřovati tomuto principu, dokud pokusy nebude vyvrácen. Můžeme naň spolehnouti tak dalece a tak bezpečně jako na princip zachování energie, založený původně také na nezdaru pokusů zhotoviti samohyb, perpetuum mobile. Princip relativnosti má velikou cenu. Lze jím z jedné rovnice differenciální (jež neobsahuje derivace dle času) odvoditi tři další (jež najisto obsahují derivace dle času). Ba i když nevíme o vektorovém poli zhola nic, lze dostati pro ně čtyři rovnice differenciální, jež pak arci neinformují o povaze vektorového pole, neboť vyjadřují pouze princip relativnosti.

Vyložím toto odvozování rovnic na příkladě, jenž je sám o sobě prakticky důležit. Volím jej, poněvadž od tohoto příkladu snadno lze přejíti k obecnému theorému.

Dejme tomu, že vektor u, v, w vyhovuje rovnici kontinuity

$$u_x + v_y + w_z = 0.$$

Pak lze pomocí principu relativnosti obdržeti tři rovnice další, obsahující derivace dle času: u_t, v_t, w_t.

Podobné rovnice vyvodil pro vektor světelný prof. Koláček r. 1897, t. j. dříve, než princip relativnosti byl znám. Pomocí