Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Hübner

O ustanovení vzorce pro sin$(\alpha + \beta)$ a cos$(\alpha + \beta)$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 3, 214--215

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122260`

$$s' - b' = 90^0 - \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} = \beta - \sigma,$$

$$s' - c' = 90^0 - \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} = \gamma - \sigma.$$

Jelikož $\beta + \gamma < 180^0 + \alpha$, jest $\alpha - \sigma > 0$. Totéž platí o rozdílech $\beta - \sigma$, $\gamma - \sigma$. Zaveďme tyto hodnoty do vzorců (1), (2), (3) vztažených ku trojúhelníku polarnému, a obdržíme

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\beta - \sigma)\sin(\gamma - \sigma)}{\sin\beta \sin\gamma}}, \qquad (7)$$

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\sigma \sin(\alpha - \sigma)}{\sin\beta \sin\gamma}}, \qquad (8)$$

$$\cot\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\beta - \sigma)\sin(\gamma - \sigma)}{\sin\sigma \sin(\alpha - \sigma)}} \text{ atd.} \qquad (9)$$

Tyto vzorce dostaneme též přímo ze vzorců (1), (2), (3), když na levé straně zaměníme funkce s kofunkcemi, na pravé straně převrátíme veškeré rozdíly a písmena latinská zaměníme s řeckými. Veličina σ leží v týchž mezích, jako veličina s. I praktické počítání dle vzorců (7), (8), (9) jest v mnohém ohledu výhodnější než dle vzorců (4), (5), (6). Proto vzorce (7), (8) a (9) všem odborníkům co nejvřeleji odporučuji.

V Hradci Králové, dne 23. prosince 1881.

O ustanovení vzorce pro sin $(\alpha + \beta)$ a cos $(\alpha + \beta)$.

Studujícím napsal V. J. Hübner.

Vycházejme tu od trojúhelníku *abc*, okolo něhož opišme křivku kruhovou K. Jak vidno, vyznačí-li se průměr *cd* a tětivy *ad*, *db*, jest:

$$\sphericalangle bdc = \sphericalangle bac = \sphericalangle \alpha,$$
$$\sphericalangle adc = \sphericalangle abc = \sphericalangle \beta.$$

Dle věty Ptolomeovy jest v čtyrúhel. *abcd*:

$$\overline{ab} \,.\, \overline{cd} = \overline{ac} \,.\, \overline{bd} + \overline{bc} \,.\, \overline{ad},$$

a ještо:

$$\overline{ac} = \overline{cd} \sin\beta,$$
$$\overline{bd} = \overline{cd} \cos\alpha,$$

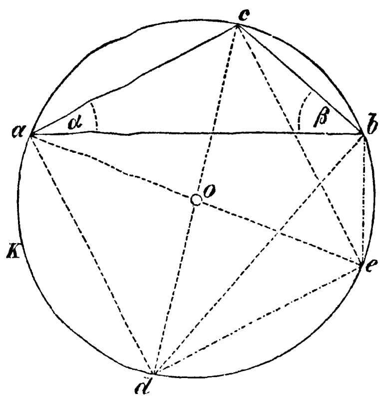
$$\overline{bc} = \overline{cd} \sin \alpha,$$
$$\overline{ad} = \overline{cd} \cos \beta$$

a

$$\overline{ab} = (\overline{ac} = \overline{cd}) \, . \sin (\alpha + \beta)$$

vyjde, dosadíme-li tyto hodnoty do předešlé rovnice:

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$



Vyznačíme-li ještě tětivy *be* a *de*, obdržíme tu dle známé již poučky v čtyřúhel. *bcde*:

$$\overline{bd} \, . \, \overline{ce} = \overline{bc} \, . \, \overline{de} + \overline{be} \, \overline{cd},$$

jak vidno z obrazce jest však:

$$\overline{ce} = \overline{ad}$$

a

$$\overline{de} = \overline{ac},$$

pročež

$$\overline{be} \, . \, \overline{cd} = \overline{bd} \, . \, \overline{ad} - \overline{bc} \, . \, \overline{ac}.$$

Dosadíme-li do této rovnice známé nám již hodnoty a za $\overline{be}$ ještě:

$$(ae = cd) \, . \cos (\alpha + \beta),$$

vyvodíme:

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \, . \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.\text{*)}$$

*) Srovnej: Dr. Aug. Wiegand „Ebene Trigonometrie.“