Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

R. M.

O řešení rovnic druhého, třetího a čtvrtého stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 3, 217–231

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122254

že poloměry $\overline{a'm}$, $\overline{a'm'}$ dotýkají se resp. kružnic K' a K v bodu a'.

Promítneme-li z bodů a, a' bod δ, který jest průsečíkem kružnice K' s osou projektivní Σ na K do d', d a spojíme-li tyto body se středem s, doděláme se dvou paprsků $\overline{sd} \equiv$ D, $\overline{sd'} \equiv$ D', Poněvadž δ nalezá se na K', stojí D kolmo na D', a jelikož δ leží též na Σ, jsou paprsky D a D' též sdruženými a tedy hledanými paprsky dvou soustředných svazků projektivných, čímž úloha předložená jest rozřešena.

Dle toho, protíná-li projektivná osa Σ kružnici K' ve dvou bodech reálných, splývajících aneb imaginárných, obdržíme v soustředných svazcích paprskových dva sdružené a kolmé páry buď reálné, splývající aneb imaginárné, což i od jinud jest známo.

V Telči, dne 2. prosince 1881.

O řešení rovnic druhého, třetího a čtvrtého stupně.

Studujícím napsal **M. R.**

Chci v následujících krátkých úvahách pojednati o řešení rovnic druhého, třetího a čtvrtého stupně dle *Lagrange-e* a sice hlavně za tím účelem, abych vyložil společný princip, na němž úspěch methody spočívá.

1. *Symetrické celistvé funkce dvou hodnot.* Nechť značí x_1 a x_2 dvě libovolné hodnoty. Výraz utvořený těmito hodnotami, který má tu vlastnost, že se nemění, vyměníme-li x_1 a x_2 na vzájem, zove se symetrickou funkcí hodnot x_1 a x_2. Jsou tedy výrazy $x_1 + x_2$ a $x_1 x_2$ symetrickými funkcemi hodnot x_1 a x_2; taktéž je na př. $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ symetrickou funkcí, kdežto $x_1 x_2 + x_2^2$ není symetrickou. Každou celistvou symetrickou funkci dvou hodnot x_1 a x_2 lze snadno vyjádřiti pomocí součtů $x_1 + x_2$ a součinu $x_1 x_2$. Je-li totiž $Ax_1^\alpha x_2^\beta$ nějaký člen dané symetrické funkce, tu se v ní nutně vyskytne též člen $Ax_1^\beta x_2^\alpha$ a tyto dva tvoří již o sobě symetrickou funkci

$$A(x_1^\alpha x_2^\beta + x_1^\beta x_2^\alpha).$$

Supponujeme-li $\alpha > \beta$, lze ji psáti ve tvaru

$$Ax_1^\alpha x_2^\beta (x_1^{\alpha-\beta} + x_2^{\alpha-\beta}) \text{ t. j. } Aq^\beta (x_1^{\alpha-\beta} + x_2^{\alpha-\beta}),$$

označíme-li k vůli stručnosti součin $x_1 x_2$ literou q. Jde tedy o to, abychom výraz $x_1^{\alpha-\beta} + x_2^{\alpha-\beta}$ vyjádřili pomocí p a q, kdež p značí součet $x_1 + x_2$. V případu $\alpha = \beta$ máme člen $Ax_1^\alpha x_2^\alpha$, který sám o sobě tvoří již symetrickou funkci, jejíž hodnota je Aq^α.

Výrazy $x_1^\lambda + x_2^\lambda$ pak vyvineme pomocí p a q posloupně takto:

$$x_1 + x_2 = p.$$

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2,$$

t. j.

$$p^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2q,$$

tedy

$$x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q.$$

$$(x_1 + x_2)^3 = x_2^3 + x_2^3 + 3x_1x_2 (x_1 + x_2)$$

t. j.

$$p^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3pq,$$

tedy

$$x_1^3 + x_2^3 = p^3 - 3pq.$$

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)^4 &= x_1^4 + x_2^4 + 4x_1^3x_2 + 6x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2^3 \\ &= x_1^4 + x_2^4 + 4x_1x_2 (x_1^2 + x_2^2) + 6x_1^2x_2^2\end{aligned}$$

t. j.

$$p^4 = x_1^4 + x_2^4 + 4q (p^2 - 2q) + 6q^2$$

a tedy

$$x_1^4 + x_2^4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2.$$

Tak bychom mohli pokračovati; jest však výhodnější, užijeme-li následujícího též rekurrentního postupu. Násobením máme

$$\begin{aligned}(x_1^{\alpha-1} + x_2^{\alpha-1})(x_1 + x_2) &= x_1^\alpha + x_2^\alpha + x_1^{\alpha-1} x_2 + x_1 x_2^{\alpha-1} \\ &= x_1^\alpha + x_2^\alpha + x_1 x_2 (x_1^{\alpha-2} + x_2^{\alpha-2}),\end{aligned}$$

t. j.

$$p(x_1^{\alpha-1} + x_2^{\alpha-1}) = x_1^\alpha + x_2^\alpha + q(x_1^{\alpha-2} + x_2^{\alpha-2}),$$

Označíme-li tedy výraz $x_1^\alpha + x_2^\alpha$ obecně symbolem s_α, máme tedy

$$ps_{\alpha-1} = s_\alpha + qs_{\alpha-2} \text{ t. j. } s_\alpha = ps_{\alpha-1} - qs_{\alpha-2},$$

Tím obdržíme s_3 z s_2 a s_1; s_4 pomocí s_3 a s_2 atd. Tedy na př.

$$s_5 = ps_4 - qs_3 = p^4 - 4p^2q + 2q^2 - q(p^3 - 3pq).$$
$$= p^4 - p^3q - 4p^2q + 3pq^2 + 2q^2.$$

2. *Symetrické celistvé funkce tří hodnot.* Buďte x_1, x_2, x_3 tři libovolné hodnoty. Výraz jimi utvořený, který se nemění, vyměníme-li na vzájem jakékoli dvě z těchto tří hodnot, nazýváme symetrickou funkci hodnot x_1, x_2, x_3. Tak jest na př. $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ a též $x_1x_2x_3$ výrazem symetrickým; funkce $x_1x_2+x_3$ není symetrická, neboť vyměnivše na vzájem první a třetí literu obdržíme novou hodnotu $x_3x_2+x_1$.

Je-li $Ax_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$ jedním členem celistvé symetrické funkce hodnot x_1, x_2, x_3, musejí náležeti té funkci též všecky nové členy, jež výměnami daných tří liter obdržíme. Mějme na př. utvořiti souměrnou funkci, jež obsahuje člen $Ax_2^2x_3^2x_3$. Permutujeme-li litery x_1, x_2, x_3 všemi možnými spůsoby, obdržíme $1.2.3 = 6$ permutac, avšak jen tři různé členy, poněvadž $x_1^2x_2^2x_3 = x_2^2x_1^2x_3$ a pod. Tedy zní hledaná symetrická funkce

$$A(x_1^2x_2^2x_3 + x_1^2x_3^2x_2 + x_2^2x_3^2x_1).$$

Z toho patrno, že je symetrická funkce dána, dán-li jeden člen její; v dalším ji označíme tím, že položíme znamení součtu před kterýkoli její člen. Bude tedy na př.

$$\Sigma x_1^2x_2^2x_3 = x_1^2x_2^3x_3 + x_1^2x_3^2x_2 + x_2^2x_3^2x_1,$$
$$\Sigma x_1 = x_1 + x_2 + x_3, \text{ atd.}$$

Symetrickou funkci nazýváme jednoduchou, obsahuje-li každý člen jen jednu z tří hodnot x. Jest tedy Σx_1^α obecný tvar jednoduchých symetrických funkcí. Obsahuje-li každý člen dvě z daných hodnot x, zove se funkce dvojitou, a obsahuje-li je všecky tři, zove se trojnásobnou. Jsou tedy

$$\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta, \quad \Sigma x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$$

obecné výrazy dvoj- resp. trojnásobných funkcí symetrických.

Nejjednodušší jednoduchá funkce jest

$$\Sigma x_1 = x_1 + x_2 + x_3,$$

což značiti budeme p_1; nejjednodušší dvojitá jest

$$\Sigma x_1x_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p_2$$

a nejjednodušší trojnásobná jest

$$\Sigma x_1x_2x_3 = x_1x_2x_3 = p_3.$$

Ukážeme nyní, že *lze každou celistvou souměrnou funkci liter* x_1, x_2, x_3 *vyjádřiti co celistvou funkci hodnot* p_1, p_2, p_3.

Násobením a mocněním hodnot p_1, p_2, p_3 obdržíme skutečně

$$(1) \qquad p_1 = \Sigma x_1,$$

$$(2) \qquad \begin{cases} p_2 = \Sigma x_1 x_2, \\ p_1^2 = \Sigma x_1^2 + 2\Sigma x_1 x_2, \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} p_3 = \Sigma x_1 x_2 x_3, \\ p_1 p_2 = \Sigma x_1^2 x_2 + 3\Sigma x_1 x_2 x_3, \\ p_1^3 = \Sigma x_1^3 + 3\Sigma x_1^2 x_2 + 6\Sigma x_1 x_2 x_3. \end{cases}$$

Rovnice první udává Σx_1; rovnice (2) podávají řešením neznámé $\Sigma x_1 x_2$ a Σx_1^2; rovnice (3) tři neznámé Σx_1^3, $\Sigma x_1^2 x_2$, $\Sigma x_1 x_2 x_3$. Zároveň patrno, kterak rovnice tvořeny; v rovnici první jest na levé straně index 1; v rovnicích (2) jest na levé straně index 2 a po druhé dvakrát index 1, tedy součet indexů 2; v rovnicích (3) jest součet indexů v levo vždy 3.

Řešením nalezneme

$$\Sigma x_1 = p_1,$$
$$\Sigma x_1 x_2 = p_2, \quad \Sigma x_1^2 = p_1^2 - 2p_2,$$
$$\Sigma x_1 x_2 x_3 = p_3, \quad \Sigma x_1^2 x_2 = p_1 p_2 - 3p_3,$$
$$\Sigma x_1^3 = p_1^3 - 3(p_1 p_2 - 3p_3) - 6p_3,$$

tedy

$$\Sigma x_1^3 = p_1^3 - 3p_1 p_2 + 3p_3.$$

Zároveň patrno, kterak pokračovati; utvoříme-li součiny výrazů p_1, p_2, p_3, v nichž součet indexů jest 4, t. j. součiny $p_1 p_3$; p_2^2; $p_1^2 p_2$; p_1^4 objeví se na pravé straně symetrické funkce $\Sigma x_1^2 x_2 x_3$, $\Sigma x_1^2 x_2^2$, $\Sigma x_1^3 x_2$, Σx_1^4 a řešením obdržíme

$$\Sigma x_1^2 x_2 x_3 = p_1 p_3.$$
$$\Sigma x_1^2 x_2^2 = p_2^2 - 2p_1 p_3,$$
$$\Sigma x_1^3 x_2 = p_1^2 p_2 - p_1 p_3 - 2p_2^2,$$
$$\Sigma x_1^4 = p_1^4 - 4p_1^2 p_2 + 4p_1 p_3 + 2p_2^2.$$

Obdobně bychom si zjednali symetrické funkce $\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$, v nichž $\alpha + \beta + \gamma = 5$, atd., tedy všecky symetrické funkce pomocí p_1, p_2, p_3.

3. *Symetrické celistvé funkce čtyř hodnot.* Symetrická celistvá funkce hodnot x_1, x_2, x_3, x_4 jest celistvá jich funkce, jež se nemění záměnou kterýchkoli dvou těchto liter. Opět lze

každou takovou funkci vyjádřiti co celistvou funkci čtyř symetrických výrazů

$$\begin{aligned}
\Sigma x_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = p_1,\\
\Sigma x_1 x_2 &= x_1 x_2 + \ldots + x_3 x_4 = p_2,\\
\Sigma x_1 x_2 x_3 &= x_1 x_2 x_3 + \ldots + x_2 x_3 x_4 = p_3,\\
\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 &= x_1 x_2 x_3 x_4 = p_4.
\end{aligned}$$

Pochod je týž jako v předcházejícím článku. Píšeme dle téže zásady rovnice (1), (2), (3), jež mají i zde platnost, a dále výrazy, v nichž součet indexů se rovná 4:

$$(4)\left\{\begin{aligned}
p_4 &= \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4,\\
p_1 p_3 &= \Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 4\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4,\\
p_2^2 &= \Sigma x_1^2 x_2^2 + 2\Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 6\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4,\\
p_1^2 p_2 &= \Sigma x_1^3 x_2 + 5\Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 2\Sigma x_1^2 x_2^2 + 12\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4,\\
p_1^4 &= \Sigma x_1^4 + 4\Sigma x_1^3 x_2 + 6\Sigma x_1^2 x_2^2 + 12\Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 24\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4.
\end{aligned}\right.$$

Z těchto pěti rovnic jde řešením dle součtů Σ

$$\begin{aligned}
\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 &= p_4,\\
\Sigma x_1^2 x_2 x_3 &= p_1 p_3 - 4p_4,\\
\Sigma x_1^2 x_2^2 &= p_2^2 - 2p_1 p_3 + 2p_4,\\
\Sigma x_1^3 x_2 &= p_1^2 p_2 - p_1 p_3 - 2p_2^2 + 4p_4,\\
\Sigma x_1^4 &= p_1^4 - 4p_1^2 p_2 + 4p_1 p_3 + 2p_2^2 - 4p_4.
\end{aligned}$$

Zcela obdobně bychom mohli vypočísti souměrné funkce $\Sigma x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma x_4^\delta$, v nichž $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 5$, pak 6, 7 atd.

4. *Stanovení rovnice o daných kořenech.* Dána-li rovnice stupně m-tého

$$(5)\quad x^m - p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} - \ldots + (-1)^m p_m = 0,$$

nazýváme jejím kořenem každou hodnotu x, která vložena do levé strany napsané rovnice, činí tuto levou stranu $= 0$. Jest velmi snadno utvořiti rovnici m-tého stupně mající m daných čísel $x_1, x_2, \ldots x_m$ za kořeny. Skutečně, napíšeme-li součin

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m),$$

t. j. vynásobivše

$$x^m - x^{m-1}\Sigma x_1 + x^{m-2}\Sigma x_1 x_2 - x^{m-3}\Sigma x_1 x_2 x_3 + \ldots + (-1)^m x_1 \ldots x_m,$$

vidíme, že součin ten se rovná nulle, a jen tehdy se rovná nulle, kdy x se rovná jedné z hodnot $x_1, x_2, \ldots x_m$. Jsou tedy tato čísla všecky kořeny rovnice m-tého stupně

$$x^m - x^{m-1}\Sigma x_1 + {}^{m-2}\Sigma x_1 x_2 - \ldots + (-1)^m x_1 x_2 \ldots x_m = 0,$$

čili rovnice (5), položíme-li za $p_1, p_2, \ldots p_m$ hodnoty

$p_1 = \Sigma x_1$; $p_2 = \Sigma x_1 x_2$; $p_3 = \Sigma x_1 x_2 x_3$; .., $p_m = x_1 x_2 \ldots x_m$. Rovnice takto utvořená jest obecnou t. j. každá rovnice vzniká takovým spůsobem. Budiž

$$f(x) = x^m - p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} - \ldots + (-1)^m p_m = 0$$

libovolně daná rovnice. Pak lze dle *Gausse* dokázati, že má vždy alespoň jeden kořen, řekněme x_1. Dělíme-li $f(x)$ rozdílem $x - x_1$, jest divisor stupně prvního v x, lze tedy divisí tak daleko pokračovati, až se objeví zbytek stupně nulltého t. j. neobsahující x. Pišme

$$\frac{f(x)}{x - x_1} = f_1(x) + \frac{R}{x - x_1},$$

kdež $f_1(x)$ jest celistvá funkce stupně $m - 1$ a R onen zbytek neobsahující x. Máme totožnost

$$f(x) = f_1(x)(x - x_1) + R,$$

a pro $x = x_1$

$$f(x_1) = R;$$

avšak dle supposice je x_1 kořenem nové rovnice t. j. $f(x_1) = 0$, čímž

$$R = o,$$

t. j. je-li x_1 kořenem, pak divise $f(x) : (x - x_1)$ beze zbytku vyjde. Rovnice $f_1 = 0$ má dle Gausse zase alespoň jeden kořen, na př. x_2 a tedy divise $f_1 : (x - x_1)$ vyjde, t. j.

$$\frac{f_1(x)}{x - x_2} - f_2(x),$$

kdež $f_2(x)$ značí celistvou funkci stupně $m - 2$. Takto pokračujíce máme rovnice

$$\frac{f_2(x)}{x - x_3} = f_3(x), \quad \frac{f_3(x)}{x - x_4} = f_4(x), \ldots \frac{f_{m-1}(x)}{x - x_m} = f_m,$$

kdež f_m jest funkce stupně m—m^{ho}, t. j. 0^{ho} t. j. stálá hodnota. Nyní posloupně

$$f(x) = (x - x_1) f_1(x) = (x - x_1)(x - x_2) f_2(x) = \ldots$$
$$= (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m) f_m.$$

koefficient při x^m v levo jest jednice, v pravo f_m, pročež konečně

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m).$$

5. *Řešení rovnic kvadratických.* Budiž dána rovnice

$$x^2 - p_1 x + p_2 = 0.$$

Dle článku předcházejícího víme, že má dva kořeny x_1, x_2 a že platí relace

$$x_1 + x_2 = p_1, \qquad x_1 x_2 = p_2.$$

Buď dána celistvá funkce těchto dvou dosud neznámých kořenů x_1, x_2, na př. funkce $x_1^2 + x_1 x_2$. Zaměníme-li kořeny nabývá tato funkce hodnoty $x_2^2 + x_1 x_2$, tak že má celkem dvě hodnoty, totiž

$$V_1 = x_1^2 + 2x_1x_2; \qquad V_2 = x_2^2 + 2x_1x_2.$$

Jest nyní snadné utvořiti rovnici o neznámé V, mající za kořeny hodnoty V_1 a V_2 a sice aniž bychom vypočtli kořeny, x_1, x_2. Rovnice hledaná zní

$$(V - V_1)(V - V_2) = 0$$

t. j.

$$V^2 - (V_1 + V_2) V + V_1 V_2 = 0.$$

Záměnou liter x_1 a x_2 přechází V_1 na V_2 a proto se touto záměnou ani součet $V_1 + V_2$ ani součin $V_1 V_2$ nemění, t. j. jsou oba symetrickými funkcemi hodnot x_1 a x_2 a proto je lze vyjádřiti dle čl. 1. pomocí p_1 a p_2. Nalezneme

$$V_1 + V_2 = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = p_1^2 + 2p_2,$$

$$V_1 V_2 = (x_1^2 + 2p_2)(x_2^2 + 2p_2) = x_1^2 x_2^2 + 2p_2(x_1^2 + x_2^2) + 4p_2^2$$

$$= 6p_2^2 + 2p_2(p_1^2 - 2p_2) = 2p_2^2 + 2p_1^2 p_2.$$

Rovnice pro V jest tedy

$$V^2 - (p_1^2 + 2p_2) V + 2p_2^2 + 2p_1^2 p_2 = 0.$$

Stanovení hodnot V závisí tedy zase na řešení rovnice kvadratické. Kdyby v této rovnici kvadratické koefficient při V scházel, byla by ryze kvadratickou, t. j. tvaru

$$V^2 + q = 0, \quad \text{tedy} \quad V = \pm \sqrt{-q}$$

t. j. oba kořeny V by se pak různily jen znamením. Z toho jde, že se nám řešení rovnice pro V podaří, zvolíme-li funkci V tak, aby měla dvě hodnoty různící se jen znamením. Taková funkce jest ale na př. $x_1 - x_2$, neboť záměnou kořenů x_1 a x_2 nabývá hodnot

$$V_1 = x_1 - x_2, \qquad V_2 = x_2 - x_1,$$

tedy skutečně

$$V_1 = - V_2,$$

pročež rovnice pro V zní

$$V^2 + V_1 V_2 = 0.$$

Avšak

$$V_1 V_2 = (x_1 - x_2)(x_2 - x_1) = -(x_1 - x_2)^2 = -(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1 x_2,$$

t. j.

$$V_1 V_2 = -(p_1^2 - 2p_2) + 2p_2 = 4p_2 - p_1^2.$$

Tím

$$V^2 + 4p_2 - p_1^2 = 0, \text{ t. j. } V = \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_2}.$$

Položivše

$$V_1 = +\sqrt{p_1^2 - 4p_2}, \quad V_2 = -\sqrt{p_1^2 - 4p_2},$$

máme nyní pro x_1 a x_2 rovnice

$$x_1 + x_2 = p_1, \quad x_1 - x_2 = +\sqrt{p_1^2 - 4p_2},$$

z nichž

$$x_1 = \frac{p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}, \quad x_2 = \frac{p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}.$$

Kdybychom položili

$$V_1 = -\sqrt{p_1^2 - 4p_2}, \quad V_2 = +\sqrt{p_1^2 - 4p_2},$$

obdrželi bychom

$$x_1 = \frac{p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}, \quad x_2 = \frac{p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2},$$

tedy tytéž kořeny, jen jinak označené.

Kdyby daná funkce V byla vůči kořenům x_1 a x_2 symetrickou, tu by záměnou kořenů x_1 a x_2 se nezměnila, t. j. měla by jedinou hodnotu. Tuto hodnotu lze pak dle čl. 1. ustanoviti racionálně pomocí p_1 a p_2, t. j. lze odvoditi pro ni rovnici lineárnou

$$V + q = 0,$$

kdež q jest racionálná funkce koefficientů p_1 a p_2.

6. *Řešení rovnic kubických.* Dle čl. 4. víme, že kubická rovnice

$$x^3 - p_1 x^2 + p_2 x - p_3 = 0$$

má tři kořeny x_1, x_2, x_3 a že platí relace

$$\Sigma x_1 = p_1, \quad \Sigma x_1 x_2 = p_2, \quad x_1 x_2 x_3 = p_3.$$

Počněme se speciálnou rovnicí

$$x^3 - 1 = 0.$$

Zde jeden kořen $x_1 = 1$ a tudíž $x^3 - 1$ dělitelno rozdílem $x - 1$; provedeme-li divisi, nalezneme za podíl $x^2 + x + 1$, čímž

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Dané rovnici tedy též vyhovíme, položíme-li

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

t. j. vyhovíme dle článku předcházejícího hodnotami

$$x_2 = \frac{-1 + 3\sqrt{-1}}{2}, \quad x_3 = \frac{-1 - 3\sqrt{-1}}{2}.$$

V případě právě uvažovaném máme

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 1,$$

tedy

$$1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_2 + x_3 + x_2 x_3 = 0, \quad x_1 x_2 x_3 = 1,$$

t. j.

$$x_2 x_3 = 1.$$

Avšak

$$x_2^3 = 1 \text{ tedy } x_2^2 = \frac{1}{x_2}, \quad \text{t. j. } x_2^2 = x_3,$$

a obdobně

$$x_3^2 = x_2,$$

o čemž se snadno i přímo mocněním hodnot x_2 a x_3 lze přesvědčiti.

Hodnotu $\frac{-1 + 3\sqrt{-1}}{2}$ v dalším budeme dle obvyklého způsobu označovati literou α *), hodnota $\frac{-1 - 3\sqrt{-1}}{2}$ pak jest α^2. Máme tedy relace

$$\alpha^3 = 1, \quad 1 + \alpha + \alpha^2 = 0.$$

Vraťme se nyní k rovnici obecné

$$x^3 - p_1 x^2 + p_2 x - p_3 = 0. \tag{6}$$

Buďte x_1, x_2, x_3 její kořeny a budiž V daná celistvá funkce těchto kořenů, na př. lineárný výraz

$$V = x_1 + A x_2 + B x_3.$$

Přeměníme-li ve V hodnoty x_1, x_2, x_3 na vzájem všemi možnými spůsoby, obdržíme $1 . 2 . 3 = 6$ různých hodnot a sice

$$\begin{aligned} V_1 &= x_1 + A x_2 + B x_3, \\ V_2 &= x_1 + A x_3 + B x_2, \\ V_3 &= x_2 + A x_1 + B x_3, \\ V_4 &= x_2 + A x_3 + B x_1, \\ V_5 &= x_3 + A x_1 + B x_2, \\ V_6 &= x_3 + A x_2 + B x_1, \end{aligned} \tag{7}$$

*) Kdybychom druhou hodnotu označili α, byla by první α^2 a vše další by též do slova potrvalo.

Rovnice šestého stupně, jejíž kořeny jsou tyto hodnoty $V_1, \ldots V_6$, zní

$$(V - V_1)(V - V_2) \ldots (V - V_6) = 0,$$

č. (8) $$V^6 - V^5 \Sigma V_1 + V^4 \Sigma V_1 V_2 - \ldots + V_1 V_2 \ldots V_6 = 0.$$

Koefficienty této rovnice šestého stupně jsou složeny symetricky z hodnot $V_1 \ldots V_6$ a tudíž i symetricky z hodnot x_1, x_2, x_3; neboť záměnou hodnot x_1 a x_2 na př. přejde V_1 na V_3, V_2 na V_4 a V_5 na V_6, pročež se ΣV_1, $\Sigma V_1 V_2$ atd. nezmění. Z toho jde, že lze výrazy ΣV_1, $\Sigma V_1 V_2$ atd. vypočísti co celistvé funkce hodnot p_1, p_2, p_3. Dejme tomu, že tato práce by byla již hotova, jest jen zdlouhavá, ale dle formulí v čl. 2. nikterak obtížna. Pak by záleželo stanovení hodnot V na řešení rovnice šestého stupně; my ale dosud dovedeme řešiti jen kvadratické rovnice, pročež nutno specialisovati funkci V tak, aby rovnice šestého stupně se redukovala na rovnici kvadratickou. Taková redukce jest možnou při rovnici

(9) $$V^6 + PV^3 + Q = 0;$$

stačí položiti $V^3 = W$ a máme pak rovnici kvadratickou

$$W^2 + PW + Q = 0.$$

Zbývá tedy rozhodnouti, kdy rovnice (8) nabývá tvaru (9). Za tím účelem podotkněme, že kořeny rovnice (9) mají tu vlastnost, že násobíme-li je hodnotami α neb α^2, obdržíme zase kořeny této rovnice. Neboť je-li

$$V^3 = W$$

bude i

$$(\alpha V)^3 = W, \quad (\alpha^2 V)^3 = W,$$

poněvadž

$$\alpha^3 = 1, \quad \alpha^6 = 1.$$

Tato vlastnost ale taky stačí, t. j. rovnice šestého stupně, jejíž kořeny mají vytknutou vlastnost, jest nutně tvaru (9). Neboť je-li V_1 jeden její kořen, máme hned další dva kořeny αV_1, $\alpha^2 V_1$; buď V_2 další kořen i budou αV_2, $\alpha^2 V_2$ další kořeny, čímž máme všech šest kořenů.

Nyní nalezneme

$$(V - V_1)(V - \alpha V_1)(V - \alpha^2 V_1) = V^3 - V_1^3,$$
$$(V - V_2)(V - \alpha V_2)(V - \alpha^2 V_2) = V^3 - V_2^3,$$

pročež rovnice pro V zní

$$(V^3 - V_1^3)(V^3 - V_2^3) = 0.$$

V rovnici pro V vyskytují se jen mocniny třetí a šestá, t. j. rovnice má skutečně tvar (9).

Značíce V_k hodnoty (7) supponujme tedy, že αV_k a $\alpha^2 V_k$ jsou též obsaženy mezi hodnotami (7). Vůči obecnosti hodnot x_1, x_2, x_3 nemůže se αV_1 rovnati V_2, neb by vzhledem ku x_1 jsme měli $\alpha = 1$; ani se αV_1 nemůže rovnati V_3 (vůči x_3 by tu musilo $\alpha = 1$), ani V_6 (vůči x_2 by musilo $\alpha = 1$). Musíme tedy zkusiti supposice

$$\alpha V_1 = V_4, \quad \alpha^2 V_1 = V_5,$$

aneb naopak

$$\alpha V_1 = V_5, \quad \alpha^2 V_1 = V_4.$$

Podržme jen druhou supposici, první beztoho vede k týmž výsledkům. Supponujeme tedy

$$\alpha(x_1 + Ax_2 + Bx_3) = x_3 + Ax_1 + Bx_2,$$

t. j.

$$\alpha = A, \quad \alpha A = B, \quad \alpha B = 1,$$

t. j.

$$\alpha = A, \quad \alpha^2 = B, \quad \alpha^3 = 1.$$

Nyní nalezneme ihned, že

$$\alpha V_2 = \alpha(x_1 + \alpha x_3 + \alpha^2 x_2) = x_2 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_3 = V_3,$$
$$\alpha^2 V_2 = \alpha^2(x_1 + \alpha x_3 + \alpha^2 x_2) = x_3 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_1 = V_6,$$

a že obecně αV_k a $\alpha^2 V_k$ se nalezají opět mezi hodnotami V_k.

Položivše tedy

$$V = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3,$$

má V šest hodnot, jež lze psáti V_1, αV_1, $\alpha^2 V_1$, V_2, αV_2, $\alpha^2 V_2$ a jichž ustanovení záleží na rovnici šestého stupně, ale tvaru (9). Máme skutečně pro V rovnici

$$(V^3 - V_1^3)(V^3 - V_2^3) = 0,$$

t. j.

$$V^6 - (V_1^3 + V_2^3)V^3 + V_1^3 V_2^3 = 0. \tag{10}$$

Stanovení všech šesti hodnot V substitucí $V^3 = W$ převedeno na rovnici kvadratickou

$$W^2 - (V_1^3 + V_2^3)W + V_1^3 V_2^3 = 0, \tag{11}$$

a na rovnici kubickou

$$V^3 = W, \tag{12}$$

již dovedeme řešiti.

7. *Skutečné formování resolventy pro* V.

V předešlém článku jsme již podotkli, že koefficienty rovnice pro V co funkce symetrické kořenů x_1, x_2, x_3 lze vyčísliti racionálně pomocí hodnot p_1, p_2, p_3. Skutečně nalezneme, uváživše, že $\alpha^2 + \alpha = -1$,

$$\begin{aligned} V_1 V_2 &= (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)(x_1 + \alpha x_3 + \alpha^2 x_2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (\alpha + \alpha^2)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = p_1^2 - 3p_2. \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned} V_1^3 + V_2^3 &= 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (\alpha + \alpha^2)\,\Sigma x_1^2 x_2 + 12 x_1 x_2 x_3 \\ &= 2\Sigma x_1^3 - 3\Sigma x_1^2 x_2 + 12 x_1 x_2 x_3\,, \end{aligned}$$

tedy dle formulí v čl. 2.

$$\begin{aligned} V_1^3 + V_2^3 &= 2(p_1^3 - 3p_1 p_2 + 3p_3) - 3(p_1 p_2 - 3p_3) + 12 p_3 \\ &= 2p_1^3 - 9p_1 p_2 + 27 p_3. \end{aligned}$$

Zní nyní rovnice (10)

$$V^6 - (2p_1^3 - 9p_1 p_2 + 27p_3)V^3 + (p_1^2 - 3p_2)^3 = 0 \tag{13}$$

a rovnice (11)

$$W^2 - (2p_1^3 - 9p_1 p_2 + 27p_3)W + (p_1^2 - 3p_2)^3 = 0. \tag{14}$$

Řešme tuto rovnici a nazveme W_1 a W_2 její kořeny. Pak máme

$$V_1 = \sqrt[3]{W_1} \quad \text{a} \quad V_2 = \sqrt[3]{W_2}\,,$$

t. j.

$$x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 = \sqrt[3]{W_1}\,,$$

$$x_1 + \alpha x_3 + \alpha^2 x_2 = \sqrt[3]{W_2}\,,$$

dále

$$x_1 + x_2 + x_3 = p_1\,,$$

tři to linearné rovnice pro hledané kořeny x_1, x_2, x_3. Pouhým sečtěním máme, jelikož $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$$x_1 = \frac{p_1 + \sqrt[3]{W_1} + \sqrt[3]{W_2}}{3}\,,$$

násobivše lineárné rovnice resp. α^2, α, 1 a podruhé α, α^2, 1, máme sečtěním

$$x_2 = \frac{p_1 + \alpha^2 \sqrt[3]{W_1} + \alpha \sqrt[3]{W_2}}{3},$$

$$x_3 = \frac{p_1 + \alpha \sqrt[3]{W_1} + \alpha^2 \sqrt[3]{W_2}}{3}.$$

Zde jest $\sqrt[3]{W_1}$ kterákoli z tří hodnot této odmocniny, ale $\sqrt[3]{W_2}$, t. j. V_2 musí hověti relaci

$$V_1 V_2 = p_1^3 - 3p_2, \quad \text{t. j.} \quad \sqrt[3]{W_2} = \frac{p_1^2 - 3p_2}{\sqrt[3]{W_1}}.$$

8. *Řešení rovnic bikvadratických.*

Rovnice čtvrtého stupně

$$x^4 - p_1 x^3 + p_2 x^2 - p_3 x + p_4 = 0$$

má čtyry kořeny x_1, x_2, x_3, x_4, jež vyhovují relacím

$$\Sigma x_1 = p_1, \quad \Sigma x_1 x_2 = p_2, \quad \Sigma x_1 x_2 x_3 = p_3, \quad x_1 x_2 x_3 x_4 = p_4.$$

Budiž zase V celistvá funkce kořenů x_1, x_2, x_3, x_4. Obecně nabývá taková záměnami kořenů $1 . 2 . 3 . 4 = 24$ hodnoty, jichž stanovení vyžaduje řešení rovnice stupně 24. Lze však udati takové funkce V, že nabývají jen menší počet různých hodnot, na př.

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Jest patrno, že budeme při čtyrech permutacích míti vždy tutéž hodnotu, totiž

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \varphi(x_2, x_1, x_3, x_4) = \varphi(x_1, x_2, x_4, x_3)$$
$$= \varphi(x_2, x_1, x_4, x_3).$$

Má tedy V celkem jen $\frac{24}{4} = 6$ různých hodnot. Tyto se podvojně různí jen znamením, jest totiž

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\varphi(x_3, x_4, x_1, x_2),$$

pročež čtverec této funkce, t. j. výraz

$$V = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2,$$

nabývá všemi proměnami jen tři hodnoty, totiž

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} V_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2, \\ V_2 = (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2, \\ V_3 = (x_1 + x_4 - x_2 - x_3)^2. \end{cases}$$

Abychom utvořili rovnici, jejíž tři kořeny jsou V_1, V_2, V_3, vyjádříme k vůli pohodlnějšímu počítání tyto hodnoty takto

$$V_1 = 4(x_1x_2 + x_3x_4) + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 4\Sigma x_1x_2,$$
$$V_2 = 4(x_1x_3 + x_2x_4) + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 4\Sigma x_1x_2;$$
$$V_4 = 4(x_1x_4 + x_2x_3) + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 4\Sigma x_1x_2.$$

Funkce $x_1x_2 + x_3x_4$ všemi záměnami liter x_1, x_2, x_3, x_4 nabývá jen tři různé hodnoty a sice

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4,$$
$$y_2 = x_1x_3 + x_2x_4,$$
$$y_3 = x_1x_4 + x_2x_3.$$

Pročež máme při $k = 1, 2, 3,$

$$V_k = 4y_k + p_1^2 - 4p_2.$$

Utvořme rovnici

$$(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) = 0$$

o kořenech y_1, y_2, y_3. Máme vzhledem k čl. 3.

$$y_1 + y_2 + y_3 = \Sigma x_1x_2 = p_2,$$
$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \Sigma x_1^2x_2x_3 = p_1p_3 - 4p_4,$$
$$y_1y_2y_3 = \Sigma x_1^3x_2x_3x_4 + \Sigma x_1^2x_2^2x_3^2,$$
$$= x_1x_2x_3x_4\Sigma x_1^2 + \Sigma x_1^2x_2^2x_3^2,$$
$$= p_4(p_1^2 - 2p_2) + p_3^2 - 2p_2p_4,$$
$$= p_4(p_1^2 - 4p_2) + p_3^2.$$

Zní tedy rovnice pro y

$$y^3 - p_2y^2 + (p_1p_3 - 4p_4)y - [p_4(p_1^2 - 4p_2) + p_3^2] = 0.$$

Jelikož

$$y = \frac{V - p_1^2 + 4p_2}{4},$$

obdržíme pro V rovnici

$$V^3 - (3p_1^2 - 8p_2)V^2 + (3p_1^4 - 16p_1^2p_2 + 16p_2^2 + 16p_1p_3 - 64p_4)V - (-p_1^3 + 4p_1p_2 - 8p_3)^2 = 0. \tag{16}$$

Kořeny této rovnice, kterou dle předcházejícího článku dovedeme řešiti, jsou V_1, V_2, V_3. Máme nyní vzhledem k rovnicím (15)

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= \sqrt{V_1}, \\ x_1 + x_3 - x_2 - x_4 &= \sqrt{V_2}, \\ x_1 + x_4 - x_2 - x_3 &= \sqrt{V_3}, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

dále

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = p_1,$$

z čehož vycházejí hodnoty kořenů

$$(18)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{p_1 + \sqrt{V_1} + \sqrt{V_2} + \sqrt{V_3}}{4}, \\ x_2 = \dfrac{p_1 + \sqrt{V_1} - \sqrt{V_2} - \sqrt{V_3}}{4}, \\ x_3 = \dfrac{p_1 - \sqrt{V_1} + \sqrt{V_2} - \sqrt{V_3}}{4}, \\ x_4 = \dfrac{p_1 - \sqrt{V_1} - \sqrt{V_2} + \sqrt{V_3}}{4}. \end{cases}$$

Zvolivše ze dvou hodnot odmocniny $\sqrt{V_1}$ libovolně jednu a též při $\sqrt{V_2}$ jest odmocnina $\sqrt{V_3}$ i co do znamení zcela stanovena a napsané formule podávají patrně pak jen čtyry hodnoty kořenů. Násobíme-li totiž výrazy (18), nalezneme symetrickou funkci

$$\begin{aligned} \sqrt{V_1}\sqrt{V_2}\sqrt{V_3} &= x_1^3 x_2^3 x_3^3 x_4^3 \\ &+ 2(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \\ &- x_1(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - x_2(x_1^2 + x_3^2 + x_4^2) \\ &- x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_4^2) - x_4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &= 2\Sigma x_1^3 + 2\Sigma x_1x_2x_3 - \Sigma x_1 \Sigma x_1^2 \\ &= 2(p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3) + 2p_3 - p_1(p_1^2 - 2p_2) \\ &= p_1^3 - 4p_1p_2 + 8p_3, \end{aligned}$$

pročež nutno odmocninu $\sqrt{V_3}$ s takým znamením vzíti, by

$$\sqrt{V_3} = \frac{p_1^3 - 4p_1p_2 + 8p_3}{\sqrt{V_1}\sqrt{V_2}}. \text{*)}$$

Poznámka ku řešení rovnic tvaru $x^{2n} + px^n = q$ a rovnic kubických.

Pro žáky středních škol podává **Augustin Pánek.**

I. V „Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky“, r. III., na straně 275. a sice ve článku nazvaném: „Osiřelé myšlénky mathematické“, uvedena jest hořejší rovnice trinomická nejprve ve tvaru

*) Další rozbor řešení viz *Serret*, Cours d' Algèbre supérieure, t. II.