Augustin Pánek

Poznámka ku řešení rovnic tvaru

$$x^{2n} + px^n = q$$

a rovnic kubických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 11 (1882), No. 3, 231--233

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/122250`

$$(18)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{p_1 + \sqrt{V_1} + \sqrt{V_2} + \sqrt{V_3}}{4}, \\ x_2 = \dfrac{p_1 + \sqrt{V_1} - \sqrt{V_2} - \sqrt{V_3}}{4}, \\ x_3 = \dfrac{p_1 - \sqrt{V_1} + \sqrt{V_2} - \sqrt{V_3}}{4}, \\ x_4 = \dfrac{p_1 - \sqrt{V_1} - \sqrt{V_2} + \sqrt{V_3}}{4}. \end{cases}$$

Zvolivše ze dvou hodnot odmocniny $\sqrt{V_1}$ libovolně jednu a též při $\sqrt{V_2}$ jest odmocnina $\sqrt{V_3}$ i co do znamení zcela stanovena a napsané formule podávají patrně pak jen čtyry hodnoty kořenů. Násobíme-li totiž výrazy (18), nalezneme symetrickou funkci

$$\begin{aligned} \sqrt{V_1}\sqrt{V_2}\sqrt{V_3} &= x_1^3 x_2^3 x_3^3 x_4^3 \\ &+ 2(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \\ &- x_1(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - x_2(x_1^2 + x_3^2 + x_4^2) \\ &- x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_4^2) - x_4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &= 2\Sigma x_1^3 + 2\Sigma x_1x_2x_3 - \Sigma x_1 \Sigma x_1^2 \\ &= 2(p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3) + 2p_3 - p_1(p_1^2 - 2p_2) \\ &= p_1^3 - 4p_1p_2 + 8p_3, \end{aligned}$$

pročež nutno odmocninu $\sqrt{V_3}$ s takým znamením vzíti, by

$$\sqrt{V_3} = \frac{p_1^3 - 4p_1p_2 + 8p_3}{\sqrt{V_1}\sqrt{V_2}}. \text{*)}$$

Poznámka ku řešení rovnic tvaru $x^{2n} + px^n = q$ a rovnic kubických.

Pro žáky středních škol podává **Augustin Pánek.**

I. V „Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky“, r. III., na straně 275. a sice ve článku nazvaném: „Osiřelé myšlénky mathematické“, uvedena jest hořejší rovnice trinomická nejprve ve tvaru

---

*) Další rozbor řešení viz *Serret*, Cours d' Algèbre supérieure, t. II.

$$x^{n} (x^n + p) = q, \tag{1}$$

a řešena pak na základě stejniny

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Při řešení tomto lze však si vésti též takto: Položme

$$x^n + p = a, \tag{2}$$

načež (1) nabude tvaru

$$x^n a = q. \tag{3}$$

Ježto dle substituce (2) jest

$$x^n - a = -p, \tag{4}$$

obdržíme, sečetše zdvojmocněnou rovnici (4) a čtyřnásobnou rovnici (3),

$$x^{2n} + 2ax^n + a^2 = p^2 + 4q$$

a tudíž

$$x^n + a = \pm \sqrt{p^2 + 4q}. \tag{5}$$

Součet rovnic (4) a (5) dá konečně

$$x^n = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}).$$

II. Abychom určili známý *vzorec Cardanův*, ktevým se řeší všeobecné rovnice kubické tvaru

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0,$$

když jsme je byli prvé známým spůsobem uvedli na *tvar redukovaný*

$$y^3 + py + q = 0, \tag{6}$$

položme

$$y = u^{\frac{1}{3}} + v^{\frac{1}{3}} \tag{7}$$

místo obvyklé substituce $y = u + v$.

Ztrojmocníme-li rovnici (7), povstane

$$y^3 = u + v + 3(uv)^{\frac{1}{3}} y,$$

aneb

$$y^3 - 3(uv)^{\frac{1}{3}} y - (u + v) = 0.$$

Mají-li rovnice (6) a (8) býti totožnými, třeba by

$$u + v = -q$$

$$uv = -\frac{q^3}{27}.$$

Tyto rovnice jsou symetrické, mají tudíž tvar

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

a proto lze z něho ihned přímo ustanoviti vzorec *Cardanův*

$$y = u^{\frac{1}{3}} + v^{\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)}.$$

Úlohy.

Řešení úlohy 3.

(Zaslal p. *V. J. Hübner* v Rakovníku.)

Značí-li s délku oblouku, t délku příslušné tětivy, r poloměr a α úhel středový náležející onomu oblouku, máme

$$t = 2r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Úhel α měřen absolutní mírou dán jest podílem $\frac{s}{r}$, pročež $\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$ a tedy rozvedeme-li sinus v řadu

$$t = 2r\left(\frac{s}{2r} - \frac{1}{2\,.\,3}\frac{s^3}{8r^3} + \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\frac{s^5}{2^5r^5}\ldots\right).$$

Rozdíl mezi obloukem a tětivou

$$s - t = 2r\left(\frac{1}{2\,.\,3}\frac{s^3}{8r^3} - \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\frac{s^5}{2^54^5} + \ldots\right).$$

Patrně při $s < r$

$$s - t < \frac{1}{2\,.\,3}\,2r\,\frac{s^3}{8r^3},$$

tedy stačí předpokládati

$$\frac{1}{24}\frac{s^3}{r^2} < 0{\cdot}001^m,$$

t. j. poněvadž s má býti 10^m,

$$r > \sqrt{41666{\cdot}6\ldots} = 204{\cdot}1^m\ldots$$