Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

Základní úlohy mathematického zeměpisu a sférické astronomie řešené konstrukcí.

Podává

Adolf Mach,
professor c. k. vyšší reálky v Jičíně.

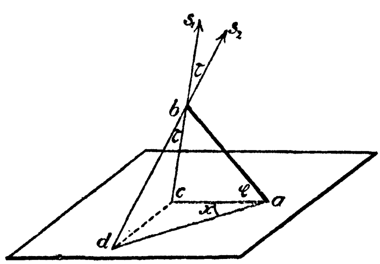
(Dokončení.)

VI. Sluneční hodiny.

A. Sluneční hodiny horizontálné.

1. *Tyčinka se světovou osou rovnoběžně postavená vrhá stín na vodorovnou desku. Jak veliký úhel opíše u nás stín v době od pravého poledne do* 2^h *odpoledne?*

Tyčinka rovnoběžná se světovou osou, směřující tudíž k severnímu pólu, odchýlena jest od roviny horizontálné o úhel, jenž rovná se výšce pólu čili zeměpisné šířce místa pozorovacího.



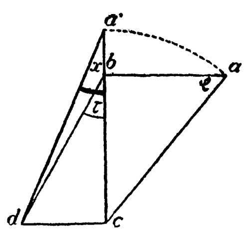
Obr. 17.

Stín takto postavené tyčinky jest v pravé poledne v přímce směřující k severnímu bodu horizontu, neboť souhrn paprsků světelných, procházejících tyčinkou, tvoří světelnou rovinu, jež v pravé poledne se ztotožňuje s rovinou meridiánu; ale průsečnice meridiánu s libovolnou rovinou horizontálnou jest přímka spojující bod jižní se severním, a proto i stín tyčinky musí se sjednotiti s touto přímkou.

Budiž slunce v pravé poledne ve směru s_1 (obr. 17.), ve 2^h odpoledne ve směru s_2, příslušné stíny tyčinky buďtež znázorněny úsečkami *ac* a *ad*; pak stín tyčinky vytvořil ve zmíněné době úhel $cad = \sphericalangle x$.

Mimo výšku pólu φ, jež rovná se úhlu *bac*, dán též úhel $s_1bs_2 = cbd = \tau$, neboť tyto úhly mají tolik stupňů úhlových, kolik stupňů obloukových vykoná slunce na své denní dráze v době od pravého poledne do 2^h odpoledne; jak známo, 15^0 za hodinu, 30^0 za dvě hodiny; proto $\tau = 30^0$.

Dále nutno též uvážiti, že slunce, otáčejíc se zdánlivě kolem světové osy, vytvořuje dráhu, jejíž rovina jest k této ose a tudíž i k tyčince s ní rovnoběžné kolmá, takže naopak tyčinka stojí kolmo ke všem přímkám oné roviny, tedy i k s_1c a s_2d.



Obr. 18.

Jsouť pak trojúhelníky *abc* a *abd* pravoúhlé s vrcholy pravých úhlů v *b*. Ale nejen tyto, nýbrž i trojúhelníky *acd* a *bcd* jsou pravoúhlé, neboť přímka *cd*, jsouc průsečnicí dvou rovin k rovině trojúhelníka *abc* kolmých, totiž vodorovné desky a roviny *bcd*, jest kolmá ke všem přímkám této roviny, tudíž i ke stranám *ac* a *bc*. Vrcholy pravých úhlů jsou v bodu *c*.

Všechny jmenované pravoúhlé trojúhelníky lze postupně sestrojiti na základě φ, τ a libovolně dlouhé úsečky *ab*.

Z $\triangle$ *abc* určíme *bc* a *ac*, z $\triangle$ *bcd*, jenž pak jest stanoven odvěsnou bc a úhlem τ, určíme cd, načež $\triangle$ acd jest dán oběma odvěsnami ac a cd; jeho $\sphericalangle$ cad jest hledaný úhel x.

Sestrojení všech trojúhelníků lze provésti způsobem velmi jednoduchým jedním obrazcem.

Sestrojme pravoúhlý $\triangle$ abc (obr. 18.) z libovolné odvěsny ab a úhlu $\varphi = 50^0$; nad druhou odvěsnou bc vztyčme pravoúhlý $\triangle$ bcd s úhlem $\tau = 30^0$; učinivše pak $ca' = ca$ a spojivše a' s d, obdržíme pravoúhlý $\triangle$ $a'cd$, jehož úhel $ca'd = x = 24^0$ vyhovuje úloze.

Stín tyčinky opíše u nás v uvedené době $\sphericalangle$ *24^0.*

Z obr. 18. lze též trigonometricky stanoviti velikost úhlu x.

Je-li $ac = 1$, pak v $\triangle$ abc jest

$$bc = \sin\varphi,$$

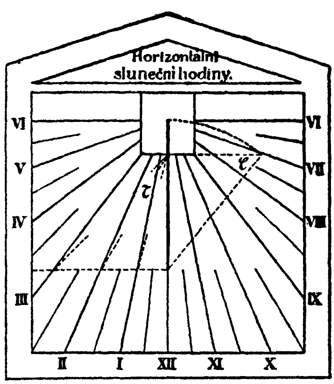
v $\triangle$ bcd jest

$$cd = \sin\varphi \operatorname{tg}\tau,$$

načež v $\triangle$ $a'cd$

$$\operatorname{tg} x = \sin\varphi \operatorname{tg}\tau.$$

Kdybychom papír otočili tak, aby přímka $a'c$ směřovala k severnímu bodu, kdybychom dále $\sphericalangle$ φ učinili $= 50^0$, naší



Obr. 19.

zeměp. šířce, a tyčinku upevnili v a' tak, aby směřovala k severnímu pólu, to vše osvětlili ve 2^h odpoledne slunečními paprsky, musil by stín tyčinky se sjednotiti s přímkou $a'd$, a poněvadž tímto způsobem lze stanoviti vržený stín v libovolné době, jest konstrukcí v obr. 18. podanou dán základ k sestrojení *horizontálních hodin slunečních.*

Jestiť jen třeba kolem bodu b sestrojiti postupně úhly τ buď po 15^0, chceme-li míti vyznačeny jen hodiny, neb po $7^1/_2{}^0$, kdyby i půlhodiny se žádaly, aneb i po $3\frac{3}{4}{}^0$, kdyby i čtvrthodiny sluneční hodiny měly ukazovati.

Pro půlhodiny jsou sluneční hodiny horizontální sestrojeny v obr. 19.

B. **Vertikální hodiny sluneční.**

Vertikální sluneční hodiny zobrazují se na vertikální stěně, jdoucí obyčejně od východu k západu, obrácené tudíž přesně k jihu. Tyčinka, směřujíc i nyní k severnímu pólu, odchýlena jest od stěny o úhel $90^0 - \varphi$.

Vše ostatní jest obdobné s vývojem, provedeným v předešlém odstavci při hodinách horizontálních. Též konstrukce jest totožná, s tím toliko rozdílem, že místo úhlu φ užije se úhlu $90^0 - \varphi$.

VII. Výška hvězdy.

Výška hvězdy jest vzdálenost její od horizontu. Určuje se obloukem kružnice, jež prochází zenithem a hvězdou (kružnice vertikálná) a počítá se od horizontu k hvězdě, od 0^0 do 90^0. Výška hvězdy vycházející nebo zapadající $= 0^0$.

Poněvadž meridián místa pozorovacího prochází zenithem, jest zároveň vertikální kružnicí; jeho obloukem se určuje výška *hvězdy kulminující.*

Výška nejvyššího bodu rovníka $= 90^0 - \varphi$, neboť od pólu k horizontu jest φ^0, od pólu k nebeskému rovníku jest 90^0, zbývá tudíž od nejvyššího bodu rovníka k horizontu

$$180^0 - 90^0 - \varphi = 90^0 - \varphi.$$

U nás jest nejvyšší bod rovníka nebeského $90^0 - 50^0 = 40^0$ nad horizontem,

v *Madridě* $90^0 - 40^0 = 50^0$, v *Kairu* $90^0 - 30^0 = 60^0$.

Výška kulminující hvězdy, jejíž deklinace $= 0^0$, aneb výška slunce ve 12^h pravého času dne 20. března a 22. září, kdy $\delta = 0^0$, jest u nás 40^0, v *Madridě* 50^0, v *Kairu* 60^0.

Má-li kulminující hvězda nebo slunce deklinaci od nully se lišící, pak třeba jen tuto deklinaci k výšce nejvyššího bodu rovníka buď přičísti nebo odčísti, podle toho, je-li deklinace kladná nebo záporná.

Příklady:

1. *Jak vysoko kulminuje ve středních Čechách* **Arctur** ($\delta = 19^3/_4{}^0$), **Spica** ($-10^0 38'$), **Sirius** ($-16^0 35'$)?

$59^3/_4{}^0$, $29^0 22'$, $23^0 25'$.

2. *Jak vysoko vrcholí tyto hvězdy a) v* **Athénách** *(38^0), b) na rovníku?*

a) $71^3/_4{}^0$; $41^0 22'$; $35^0 25'$.
b) $70^1/_4{}^0$ na sever; $79^0 22'$ jižně; $73^0 25'$ jižně.

3. *Jak vysoko kulminuje slunce 20. března, 21. června, 22. září a 21. prosince a) ve* **Štýrském Hradci** *(47^0); b) v* **Dubrovníku** *(43^0); c) na rovníku; d) v* **Petrohradě** *(60^0); e) v* **Kapském Městě** (-34^0)?

a) 43^0, $66^1/_2{}^0$, 43^0, $19^1/_2{}^0$.
b) 47^0, $70^1/_2{}^0$, 47^0, $23^1/_2{}^0$.

c) 90^0, $66^1/_2{}^0$ nad sev. bodem, 90^0, $66^1/_2{}^0$ nad jižním bodem·
d) 30^0, $53^1/_2{}^0$, 30^0, $6^1/_2{}^0$.
e) 56^0 nad bodem sev., $79^1/_2{}^0$ nad bod. sev., 56^0, $32^1/_2{}^0$ též nad bodem sev.

U nás kulminuje slunce nad bodem jižním, na jižní polokouli zemské (mírný pás) nad bodem severním.

Z výsledků nahoře uvedených plyne, že ve *Štýrském Hradci* vystoupí slunce 21. června právě tak vysoko jako téhož dne na rovníku, jedině s tím rozdílem, že jest u nás nad bodem jižním, na rovníku nad bodem severním.

Poněvadž pak výška slunce rovná se také úhlu, v němž paprsky na horizontální rovinu dopadají, seznáváme, že účinnost paprsků jest toho dne na rovníku i ve *Štýrském Hradci* stejná.

4. *V jakém úhlu dopadají paprsky sluneční ve středních Čechách v pravé poledne dne 25. února ($\delta = -9^0$), 10. dubna ($+8^0$), 15. srpna ($+14^0$), 2. prosince (-22^0)?*

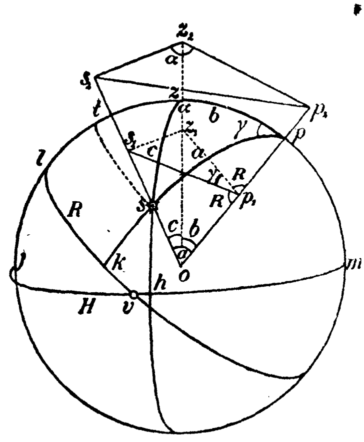
31^0, 48^0, 54^0, 18^0.

5. *Kdy dopadají v Praze paprsky sluneční v poledne v úhlu 60^0, 20^0, $16^1/_2{}^0$?*

Když deklinace sluneční $= 20^0$, -20^0, $-23^1/_2{}^0$, t. j. 20. května, 20. ledna, 21. prosince.

Nekulminuje-li hvězda, pak nelze tak jednoduchým způsobem početně její výšku stanoviti; za to podává konstrukce snadný způsob řešení, jejž na následujících příkladech objasníme.

1. *Jak vysoko jest u nás slunce dne 20. května ($\delta = 20^0$) v 9^h ráno?*



Obr. 20.

Je-li v obr. 20. p pól nebeský, R rovník nebeský, z zenith, H horizont, s poloha slunce v 9^h ráno, pak jest oblouk sh výška slunce, sz její doplněk, pm výška pólu $= \varphi$, pz její doplněk, sk deklinace, sp její doplněk.

V trojúhelníku psz jsou pak známy strany:

$$a = 90^0 - \delta = 90^0 - 20^0 = 70^0,$$
$$b = 90^0 - \varphi = 90^0 - 50^0 = 40^0;$$

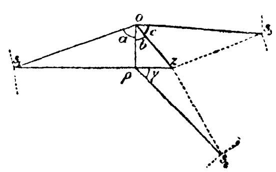
tolikéž stupňů mají však též příslušné úhly středové *pos* a *poz*. Mimo to jest také znám $\sphericalangle \gamma$, neboť jeho počet stupňů rovná se počtu stupňů oblouku *st*, který jest slunci vykonati od 9^h dopoledních do 12^h pravého času, kdy vstoupí do meridiánu. Za 3^h urazí slunce oblouk 45^0, proto $\sphericalangle \gamma = 45^0$. Ale týž úhel γ určuje též odchylku rovin *pos* a *poz*, a tu lze jiným způsobem obdržeti, jestliže v libovolném bodu průsečnice *op* jmenovaných rovin — třeba v bodu p_1 — postavíme k ní rovinu kolmou.

Vznikne tím $\triangle\, p_1 s_1 z_1$ o úhlu $\gamma = 45^0$, jehož strany $s_1 p_1$ a $z_1 p_1$ jsou kolmy k op_1, takže trojúhelníky $p_1 os_1$ a $p_1 oz_1$ jsou pravoúhlé s pravými úhly při vrcholu p_1.

Poněvadž úsečku op_1 si lze zvoliti libovolně dlouhou, možno po řadě sestrojiti:

1. pravoúhlý $\triangle\, op_1 s_1$ z odvěsny op_1 a $\sphericalangle a$;
2. „ $\triangle\, op_1 z_1$ z „ „ a $\sphericalangle b$;
3. kosoúhlý $\triangle\, p_1 s_1 z_1$ z úhlu γ a ze stran $p_1 s_1$ a $p_1 z_1$, jichž velikost vyplývá z obou trojúhelníků předešlých; konečně
4. kosoúhlý $\triangle\, os_1 z_1$ ze tří stran; úhel pak ležící naproti straně $s_1 z_1$ jest doplněk hledané výšky.

Sestrojení těchto čtyř trojúhelníků lze nejvýhodněji provésti v jednom obrazci.



Obr. 21.

Sestrojme (obr. 21.) oba první pravoúhlé trojúhelníky ops_1 a opz, aby měly společnou odvěsnu op, k níž naneseme

$$\sphericalangle a = 90^0 - \delta \text{ a } b = 90^0 - \varphi,$$

nad stranou pz sestrojme $\triangle\, ps_2 z$ ze stran pz, $ps_2 = ps_1$ a úhlu jimi sevřeného γ, konečně nad stranou oz postavme $\triangle\, ozs_3$ ze stran oz, $os_3 = os_1$ a $zs_3 = zs_2$. Úhel $c = 46^1/_2{}^0$ jest doplněk výšky, a proto:

Dne 20. května jest u nás slunce v 9^h ráno $43^1/_2{}^0$ vysoko.

Sledujeme-li zdánlivý pohyb slunce na obloze po celý den, snadno seznáme, že slunce má dvakrát za den touž určitou výšku, jednou dopoledne, podruhé odpoledne. Oba okamžiky jsou od doby polední stejně vzdáleny. Z toho plyne, že má u nás slunce dne 20. května též ve 3^h odpoledne výšku $43^1/_2{}^0$.

2. *Jak velikou výšku má u nás* **Wega** *($\delta = 38^3/_4{}^0$, $AR = 18^h 33^m$) dne 29. června (AR slunce $6^h 33^m$) v 10^h večer?*

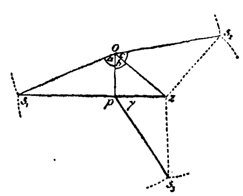
Rektascense *Wegy* jest dne 29. června o 12^h větší než rektascense slunce; to znamená, že dne 29. června *Wega* o 12^h později kulminuje než slunce. Je-li 10^h v noci, slunce kulminovalo před 10 hodinami a tudíž *Wega* bude kulminovati teprve za 2^h, takže $\sphericalangle \gamma = 30^0$. Tím převedena tato úloha na předešlou.

$$a = 90^0 - 38^3/_4{}^0 = 51^1/_4{}^0, \quad b = 90^0 - 50^0 = 40^0,$$
$$\gamma = 30^0.$$

Kdybychom úlohu řešili po způsobu konstrukce uvedené v obr. 21., seznali bychom, že $c = 29^0$ a tudíž výška $= 61^0$. *Wega jest u nás dne 29. června v 10^h večer 61^0 vysoko.*

3. *V kolik hodin jest v Madridě ($\varphi = 40^0$) slunce dne 21. června 40^0 vysoko?*

Dáno jest:
$$a = 90^0 - 23^1/_2{}^0 = 66^1/_2{}^0,$$
$$b = 90^0 - 40^0 = 50^0,$$
$$c = 90^0 - 40^0 = 50^0.$$



Obr. 22.

Sestrojme jako v předešlých příkladech nejdříve trojúhelníky ops_1 a opz (obr. 22.), ale pak hned $\triangle ozs_2$ ze stran oz, $os_2 = os_1$ a jimi sevřeného úhlu c, pak teprve $\triangle ps_3z$, jehož

$\sphericalangle \gamma$ vyjadřuje oblouk, jejž jest slunci do 12^h vykonati. Tento oblouk známým již způsobem proměníme na čas.

$$\gamma = 56\tfrac{1}{2}^0 = 3\tfrac{3}{4}^h.$$

V Madridě jest slunce dne 21. června v $8\tfrac{1}{4}^h$ dopoledne a ve $3\tfrac{3}{4}^h$ odpoledne 40^0 vysoko.

4. *Dne 18. července ($\delta = 21^0$) jsem pozoroval, že svislá tyč metr vysoká vrhla stín též metr dlouhý. V kolik hodin to bylo?*

Tyč, její stín a paprsek nejhořejšího bodu tvoří pravoúhlý trojúhelník rovnoramenný; jest tudíž paprsek sluneční odchýlen od roviny horizontálné o úhel 45^0, takže výška slunce $= 45^0$.

Tím převedena jest úloha na předešlou:

$$a = 90^0 - 21^0 = 69^0, \quad b = 90^0 - 50^0 = 40^0,$$
$$c = 90^0 - 45^0 = 45^0.$$

Kdybychom řešili tento příklad po způsobu konstrukce uvedené v obr. 22., shledali bychom, že $\gamma = 45^0 = 3^h$, a proto:

V 9^h dopoledne a ve 3^h odpoledne vrhá dne 18. července svislá tyč stín, jehož délka rovná se délce tyče.

Mathematický vzorec pro výšku hvězdy lze vyvoditi z obr 21.

Je-li $op = 1$, pak

$$os_1 = \frac{1}{\cos a}, \quad oz = \frac{1}{\cos b},$$
$$ps_1 = \operatorname{tg} a, \quad pz = \operatorname{tg} b.$$

Z $\triangle os_3z$ plyne, že

$$\overline{s_3z}^2 = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{1}{\cos^2 b} - 2\frac{\cos c}{\cos a \cos b}.$$

V $\triangle ps_2z$ jest

$$\overline{s_2z}^2 = \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b - 2\frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}\cos\gamma,$$

proto

$$\frac{1}{\cos^2 a} + \frac{1}{\cos^2 b} - 2\frac{\cos c}{\cos a \cos b} = \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b - 2\frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}\cos\gamma.$$

Ale

$$\frac{1}{\cos^2 a} - \operatorname{tg}^2 a = \frac{1 - \sin^2 a}{\cos^2 a} = 1\,,$$

$$\frac{1}{\cos^2 b} - \operatorname{tg}^2 b = 1\,,$$

takže obdržíme:

$$\cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos \gamma,$$

a dosadíme-li původní hodnoty, bude

$$\cos c = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \gamma.$$

VIII. Azimut hvězdy.

Kružnice proložená zenithem a hvězdou protne horizont v určitém bodu. Oblouk horizontu mezi tímto průsečíkem a bodem jižním jest azimut hvězdy. Počítá se od bodu jižního přes západ na sever, od 0^0 do 360^0.

Cvičení:

1. *Který azimut má: a) bod jižní; b) bod západní; c) bod severní; d) bod východní?*

a) 0^0; b) 90^0; c) 180^0; d) 270^0.

2. *Který azimut má slunce a) v poledne, b) o půlnoci?*

a) 0^0; b) 180^0.

3. *Jak veliký azimut má slunce 20. března nebo 22. září a) vycházejíc, b) zapadajíc?*

a) 270^0; b) 90^0.

4. *Ranní a večerní vzdálenost slunce jednoho letního dne byla 30^0; jak veliký azimut mělo slunce a) při východu, b) při západu?*

a) 240^0; b) 120^0.

V obr. 20. stanoví úhel α odchylku meridiánu od vertikálu procházejícího hvězdou. Tato odchylka by však byla počítána od severního bodu *m*. Ale azimut se počítá od bodu jižního přes západ a sever. Z té příčiny jest k $\sphericalangle \alpha$ přidati ještě 180^0, abychom obdrželi azimut. Tuto odchylku α též obdržíme, jestliže v libovolném bodu z_2 průsečnice jmenovaných rovin vztýčíme rovinu k ní kolmou, jež vytvoří $\triangle p_2 s_2 z_2$, jehož strany $p_2 z_2$ a $s_2 z_2$ jsou kolmé k přímce oz, takže trojúhelníky $oz_2 p_2$ a $os_2 z_2$ jsou pravoúhlé.

Úhel trojúhelníka $p_2 z_2 s_2$, ležící naproti straně $p_2 s_2$, zvětšen o 180° rovná se počtem stupňů azimutu hvězdy. Je-li dána výška pólu místa pozorovacího, deklinace a výška hvězdy, pak lze po řadě sestrojiti:

1. pravoúhlý $\triangle op_2 z_2$, z libovolně dlouhé odvěsny oz_2 a úhlu $90^0 - \varphi$,

2. pravoúhlý $\triangle oz_2 s_2$ z odvěsny oz_2 a úhlu $90^0 - v$,

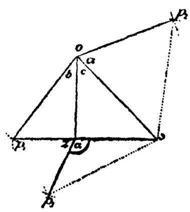
3. kosoúhlý $\triangle op_2 s_2$ z úhlu $90^0 - \delta$ a ze stran op_2 a os_2 jichž velikost vyplývá z předešlých trojúhelníků, a konečně

4. kosoúhlý $\triangle p_2 s_2 z_2$ ze všech stran, jichž délky určeny jsou trojúhelníky předešlými.

Úhel α tohoto trojúhelníka o vrcholu z zvětšen o 180° dá hledaný azimut.

Z toho patrno, že azimut hvězdy sestrojí se podobným postupem konstrukce jako v obr. 21. výška hvězdy.

O tom netřeba tedy dále šířiti slov.



Obr. 23.

V obr. 23. jest řešena úloha:

Který azimut má u nás slunce dne 21. června, jsouc dopoledne 40° vysoko?

$$b = 40^0,\ c = 50^0,\ a = 66^1/_2{}^0.$$

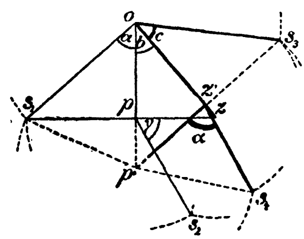
Sestrojeny byly po řadě trojúhelníky: ozp_1, ozs, osp_2 a $p_3 sz$

Zvětšíme-li $\sphericalangle \alpha$, jenž v posledním trojúhelníku leží naproti straně sp_3, o 180°, obdržíme azimut.

Poněvadž $\alpha = 116^0$ jest azimut $= 296^0$.

Sestrojení azimutu lze s výhodou spojiti s konstrukcí výšky hvězdy.

Uvážíme-li, že v obr. 21. máme úhly b a c, na jichž základě jsme azimut sestrojili, vedle sebe naneseny a že délka odvěsny oz (obr. 23.) může býti libovolná, mysleme si v obr. 24. s bodu s_3 spuštěnou kolmici na oz, jež protíná přímku oz v bodu z' a op v p', a sestrojme trojúhelník z úseček $p's_1$, $p'z'$ a s_3z; pak úhel tohoto trojúhelníka při vrcholu z' jest hledaný úhel α.



Obr. 24.

Příklady:

1. *Kterou výšku a azimut má* **Algol** *($\delta = 40^1/_2{}^0$, $AR = 3^h$) dne 25. října (AR sluneční $= 14^h$) v 9^h večer?*

Je-li 9^h večer, tu uplyne ještě 15 hodin, než opět slunce bude nahoře kulminovati čili než bude poledne. Poněvadž však rektascense *Algolu* jest dne 25. října o $14^h - 3^h = 11^h$ menší než rektascense sluneční, Algol toho dne kulminuje o 11^h dříve, t. j. za 4^h, čili musí vykonati ještě oblouk 60^0, takže $\sphericalangle\, \gamma = 60^0$.

$$a = 49^1/_2{}^0,\ b = 50^0,\ \gamma = 60^0.$$

Známým způsobem sestrojen nejdříve úhel $c = 42^0$, a na jeho základě pak úhel $\alpha = 87^0$.

Výška Algolu v 9^h večer dne 25. října $= 48^0$, azimut $= 267^0$.

2. *O jaký úhel musí střecha domovní býti odchýlena od roviny horizontálné a na kterou stranu světovou musí býti obrácena, aby na ni sluneční paprsky dopadaly dne 10. června ($\delta = 23^0$) v 10^h dopoledne kolmo?*

Kdyby střecha měla polohu vodorovnou, musily by paprsky, aby na ni dopadaly kolmo, míti polohu svislou. Odchýlí-li se střecha od roviny horizontálné o úhel α, skloní se paprsky o týž úhel α a dopadají v úhlu $90^0 - \alpha$, čemuž i výška slunce se rovná. Azimut slunce stanoví pak místo na horizontu, ke kterému musí býti střecha obrácena, aby na ni paprsky v uvedenou dobu dopadaly kolmo.

V tomto případě jest $a = 67^0$, $b = 40^0$, $\gamma = 30^0$.

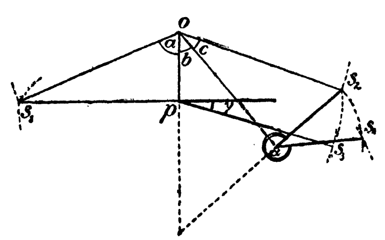
Kdybychom po způsobu konstrukce v obr. 24. uvedené sestrojili výšku a azimut, shledali bychom, že $v = 90^0 - 36^0 = 54^0$, azimut $= 305^0$.

Střecha musí býti odchýlena od roviny horizontálné o úhel 36^0 a směřovati k bodu, jenž jest od bodu jižního k východu 55^0 vzdálen.

3. *V kolik hodin dopadají sluneční paprsky dne 2. července ($\delta = 23^0$) na Zebín, kuželovitý vrch u Jičína, jehož povrchové přímky tvoří s horizontální rovinou úhel 30^0, v témž úhlu, jako dne 20. března v poledne na rovník, a která strana Zebína bude tak intensivně osvětlena a oteplena?*

Dne 20. března v poledne dopadají sluneční paprsky na rovník kolmo.

Má-li některá povrchová přímka onoho kužele býti osvětlena kolmými paprsky slunečními, musí slunce míti výšku 60^0.



Obr. 25.

V obr. 25. jest $a = 67^0$, $b = 40^0$, $c = 30^0$. Známým již způsobem sestrojen $\sphericalangle \gamma$, jenž určuje dobu, ve které sluneční paprsky dopadají na určitá místa *Zebína* kolmo; načež sestrojen *azimut* $\alpha + 180^0$, jenž určuje stranu, na kterou ona místa jsou obrácena.

$$\gamma = 17^0 = 1^h 8^m, \text{ azimut} = 325^0;$$

pročež:

V $10^h 52^m$ dopadají sluneční paprsky dne 2. července kolmo na onu část Zebína, která jest obrácena k bodu horizontu, jenž jest od bodu jižního o 35^0 k východu uchýlen.

IX. Nejkratší vzdálenost dvou míst na povrchu zemském.

Nejkratší vzdálenost dvou bodů na kulovém povrchu jest oblouk hlavní kružnice oba body spojující. Hlavní kružnice, jak známo, má střed ve středu koule a její poloměr rovná se poloměru koule.

Mezi nesčetnými hlavními kružnicemi, jež lze vésti na povrchu zemském, jsou nejdůležitější *rovník* a *meridiány*. Nepřihlížíme-li k okolnosti, že země jest na obou pólech sploštělá, pak rovná se délka meridiánu délce rovníka i délce každé jiné hlavní kružnice. Všechny hlavní kružnice povrchu zemského jsou 40000 *km* nebo 5400 zem. mil dlouhé, 1^0 hlavní kružnice rovná se 111·11 *km* nebo 15 zeměp. mílím, $1'$ hlavní kružnice rovná se 1850 *m* nebo 1 námořní míli.

Vzdálenost dvou míst na rovníku rovná se rozdílu zeměpisných délek. Vzdálenost dvou míst na témž meridiánu rovná se rozdílu zeměpisných šířek.

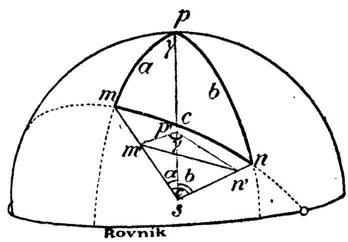
Praha a *Neapol* jsou na témž meridiánu, zeměpisnou šířkou liší se o 9^0; jejich vzdálenost rovná se tudíž

$$111{\cdot}11 \times 9 \doteq 1000 \text{ km}.$$

Abychom stanovili nejkratší vzdálenost dvou libovolných míst m a n, musíme znáti jejich zeměpisné souřadnice φ_1, δ_1 a φ_2, δ_2.

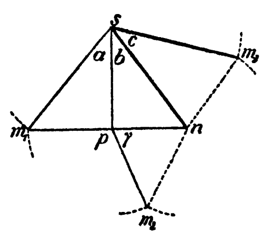
Je-li v obr. 26. p pól zemský, pak v $\triangle mnp$, utvořeném z oblouku hlavních kružnic (sférický trojúhelník), jest strana $\widehat{mp} = a = 90^0 - \varphi_1$, strana $\widehat{np} = b = 90^0 - \varphi_2$ a jimi sevřený úhel $\gamma = \delta_2 - \delta_1$.

Uvážíme-li, že úhly msp a nsp mají tolik stupňů úhlových, kolik mají strany a a b stupňů obloukových, dále pak, že odchylka rovin psm a psn rovná se též $\sphericalangle \gamma$, kterážto odchylka se jeví v $\triangle m'n'p'$, jehož rovina stojí kolmo k sp (proto $m'p' \perp sp$, $n'p' \perp sp$), konečně že úsečku $p's$ si lze zvoliti libovolně dlouhou, seznáme, že pravoúhlé trojúhelníky $m'p's$ a $n'p's$ jsou dokonale stanoveny, a poněvadž z nich vyplývá délka



Obr. 26.

úseček $n'p'$, $m'p'$, sm' a sn', jest též $\triangle m'n'p'$ určen, což má zase za následek, že i $\triangle m'n's$ je stanoven všemi stranami, takže z něho lze určiti velikost úhlu c, jenž má tolik stupňů úhlových, kolik má oblouk mn stupňů obloukových. I obdržíme délku oblouku mn, násobíme-li 111·11 *km* počtem stupňů úhlu c. Postupné sestrojování trojúhelníků $sm'p'$, $sn'p'$, $m'n'p'$ a $sm'n'$ zase lze jednoduchým způsobem provésti v jediném obrazci.



Obr. 27.

Sestrojme (obr. 27.) dva pravoúhlé trojúhelníky m_1ps a nps se společnou, libovolně dlouhou odvěsnou ps a přílehlými k ní úhly a a b. Nad některou z ostatních dvou odvěsen — třeba nad np — zobrazme $\triangle m_2np$, aby $pm_2 = pm_1$ a $\sphericalangle npm_2 = \gamma$. Vztyčivše konečně nad stranou sn $\triangle snm_3$ ze stran $sm_3 = sm_1$

a $nm_3 = nm_2$, obdržíme naproti straně nm_3 ležící hledaný úhel c. V obr. 27. jest tímto způsobem sestrojena vzdálenost míst, jichž zeměpisné souřadnice jsou:

$$\varphi_1 = 50^0, \quad \varphi_2 = 53^3/_4{}^0,$$
$$\delta_1 = 14^1/_2{}^0, \quad \delta_2 = 81^1/_2{}^0 \text{ v. od Greenwiche.}$$

(*Praha* a místo poblíž *Tomsku* v Sibíři.)

$$\sphericalangle a = 90^0 - 50^0 = 40^0, \quad \sphericalangle b = 90^0 - 53^3/_4{}^0 = 36^1/_4{}^0;$$
$$\gamma = \delta_2 - \delta_1 = 67^0.$$

Obrazec praví, že $\sphericalangle c = 39^1/_2{}^0$, proto jsou obě místa 4389 *km* od sebe vzdálena.

Kdybychom chtěli míti mathematický vzorec pro délku oblouku *mn*, pak bychom musili vzíti útočiště k výpočtu trigonometrickému, vyplývajícímu z řešení trojúhelníků v obrazci. Postupem, jenž vysvětlen již při mathematickém určení výšky hvězdy, přišli bychom ke vzorci

$$\cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos \gamma,$$

a dosadíme-li původní hodnoty za a, b a γ, bude

$$\cos c = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\delta_2 - \delta_1).$$

Řešení úloh.

1. *Loď jedoucí z* **Montevidea** *($\varphi_1 = 35^0$ j., $\delta_1 = 56^1/_4{}^0$ z.) na* **Mys Dobré Naděje** *($\varphi_2 = 34^0$ j., $\delta_2 = 18^1/_2{}^0$ z.) po* **loxodromě** *vykoná dráhu 3740 námořních mil; oč by se zkrátila cesta, kdyby jela po oblouku největší kružnice?*

Loxodroma jest křivka na povrchu zemském, která protíná všechny meridiány ve stejném úhlu; přibližuje se šroubovitě k pólům, těchto nikdy nedosáhnouc. Rovnoběžky jsou též loxodromy.

Pro námořníky jsou tyto křivky velmi důležity; jeví se na mapách námořních (Mercatorova projekce, Kozennův atlas č. 2. „Mapa oboru zemského") každá loxodroma jako přímka. Spojíme-li na těchto mapách dva libovolné body, jest spojnice obrazem určité loxodromy, oběma místy procházející.

Ač oblouk loxodromy není nejkratší vzdáleností dvou míst, jezdí lodě po této křivce, nemohou-li z rozmanitých příčin jeti po oblouku největšího kruhu.

Má-li loď jeti z *Montevidea* na *Mys Dobré Naděje*, lodník spojí na mapě námořní obě města přímkou a řídí pak loď tak, aby její osa byla rovnoběžná s touto spojnicí; pak je jist, že žádaného cíle dosáhne.

Otázka, oč by se tato cesta zkrátila, kdyby loď jela po oblouku největšího kruhu, zodpověděla by se analogickou konstrukcí obr. 27. Shledalo by se, že nejkratší vzdálenost jest vyjádřena úhlem $c = 60^0$.

Poněvadž námořní míle rovná se obloukové minutě hlavní kružnice, jest nejkratší vzdálenost obou míst $= 60 \,.\, 60 = 3600$ nám. mil, a proto jest jízda po loxodromě o 140 mil, t. j. asi o 12^h delší než jízda po hlavní kružnici.

Podobně bychom seznali, že nejkratší vzdálenost *Valparaisa a Christchurche* na *Novém Zeelandě* je 5000 nám. mil, kdežto vzdálenost loxodromická jest *5450* mil, takže loď jedoucí po loxodromě potřebuje o 37^h delší doby než loď jedoucí po hlavní kružnici.

Sluší jen ještě, by se podotklo, že jsou též mapy, na kterých se jeví hlavní kružnice jako přímky. Jsou to mapy gnomonické projekce.

2. *Kdybych vyšel 1. ledna 1899 z Prahy ve směru východním a šel stále přímo, tak aby v každém místě mi byl východní bod směrodatný, kde ocitl bych se na konci každého z prvních šesti měsíců této cesty, uraze každý den $7^1/_2$ zem. míle?*

Pohybuje-li se někdo po ploše kulové stále „přímo", jest jeho dráha hlavní kružnicí této koule; pohybuje-li se tudíž stále východně, není dráha jeho rovnoběžkou místa, z něhož vyšel, jak na první pohled by se zdálo.

Je-li v obr. 26. v bodu *m* Praha a v bodu *n* místo, kam dospěl bych za měsíc, pak v $\triangle$ *mnp* jest $\sphericalangle$ *nmp* pravý, poněvadž směr východní tvoří se směrem severním uhel pravý; mimo to jsou v tomto trojúhelníku známy obě odvěsny

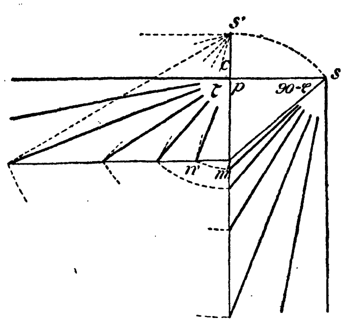
$$a = 90^0 - \varphi \text{ a } c = 15^0,$$

neboť, ujdu-li za den $7^1/_2$ zeměp. míle, ujdu za 2 dni 15 z. m. čili 1^0, za měsíc 15^0.

Myslíme-li si zase bodem p' položenou rovinu $m'n'p'$ kolmou k ps, pak nejen že $m'p'$ a $n'p'$ jsou kolmé k ps, ale i $m'n'$, jsouc průsečnicí rovin $m'n's$ a $m'n'p'$ kolmých k rovině $m'p's$, jest též k této rovině kolmá a tudíž kolmá k přímkám této roviny $m's$ a $m'p'$.

Jsouť pak všechny 4 trojúhelníky $m'p's$, $n'p's$, $n'm's$ a $n'm'p'$ pravoúhlé, jichž vrcholy pravých úhlů jsou vyznačeny písmenem vždy uprostřed stojícím.

Poněvadž nám jde o zeměpisné souřadnice bodu n, to jest o zeměpisnou šířku, jejíž doplněk jest vyjádřen úhlem $p'sn'$, a o rozdíl zeměpisných délek, jenž jest určen úhlem $m'p'n'$ v $\triangle m'p'n'$, jde tudíž o sestrojení těchto trojúhelníků.



Obr. 28.

Zvolíme-li si úsečku $p's$ libovolně dlouhou, pak jsou $\triangle m'p's$ a $m'n's$ dokonale stanoveny, pak seznáme též délku stran $m'p'$, $m'n'$, sn', načež i hledané trojúhelníky $m'n'p'$ a $n'p's$ jsou určeny.

Nejvýhodnější postup při sestrojování těchto trojúhelníků by byl asi tento:

Zobrazme dvě na sebe kolmé přímky; od průsečíku p nanesme třebas v pravo libovolnou úsečku ps, k ní úhel $90^0 - \varphi$; tím obdržíme $\triangle mps$; učiníce $ms = ms'$ a $\sphericalangle ms'n' = c$, dostaneme $\triangle m'n's'$; spojíce n' s p, obdržíme $\sphericalangle m'pn'$, rozdíl to zeměpisné délky *Prahy* a místa, do kterého jsme dospěli za měsíc, čili úhel, jenž určuje, o kolik stupňů jsme východněji než před měsícem; přeneseme-li konečně pn' od bodu p dolů a spojíme-li krajní bod s bodem s, obdržíme trojúhelník, jehož ostrý úhel na odvěsně pm' jest hledaný doplněk zeměpisné šířky tohoto místa.

V obr. 28. provedena byla konstrukce současně i pro ostatních 5 měsíců.

Z obrazce tohoto vyplývá, že bychom byli

a) na konci ledna v severním cípu *Azovského moře*,

b) na konci února na hranicích *Chivy* jižně od jezera *Aralského*,

c) na konci března na hranicích indických blíže *Kašmíra*,

d) na konci dubna u *Kalkuty*,

e) na konci května na poloostrově *Malakka* a konečně na konci června bychom dorazili na rovník, na východní břeh ostrova *Sumatry*, jdouce téměř stále po suchu, vykonajíce takto právě dráhu čtvrtiny největší kružnice; takže, kdybychom i dále týmž způsobem po suchu mohli jíti, potřebovali bychom k této v pravém slova smyslu cestě kolem světa 2 roků. Kráčeli bychom přes *Jávu* a *Australii* a opustíce tuto nedaleko *Melbournu*, zavítali bychom na jižní cíp *Nového Zeelandu*; na místě, kde by pražští protinožci kráčeli — kdyby tam moře nebylo — dotkli bychom se rovnoběžky 50.⁰ j. š., vykonajíce právě polovici pouti své kolem země, a pak dále dlouhou cestou *Tichým Oceanem* do severní části *Jižní Ameriky*, pak přes *Azory* a *Paříž* nazpět do *Prahy*. Cesta trvala by právě 2 roky.
