Josef Langr
O čtyřúhelníku, jemuž lze vepsati i opsati kružnici

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 28 (1899), No. 3, 244--250

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122234

O čtyřúhelníku, jemuž lze vepsati i opsati kružnici.

Napsal

Jos. Langr v Praze.

Jest dán čtyřúhelník ABCD, jemuž je vepsána kružnice o poloměru r ze středu O, a jiná opsána o poloměru R ze středu S.

Značme

$$\overline{AD} = a, \quad \overline{AB} = b, \quad \overline{BC} = c, \quad \overline{CD} = d,$$

$$D\widehat{A}B = \alpha, \quad A\widehat{B}D = \beta, \quad B\widehat{C}D = \gamma, \quad C\widehat{D}A = \delta,$$

úhlopříčny $\overline{AC} = u$, $\overline{BD} = v$, průsečík úhlopříčen E, dotyčné body stran F, G, H, K.

Úlohou jest vyšetřiti mezi uvedenými veličinami relace.

Poněvadž jest čtyřúhelník kružnici vepsán, jest

$$(1) \qquad \alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi,$$

a poněvadž jest současně jiné opsán, jest

$$(2) \qquad a + c = b + d = s.$$

K určení úhlův vyjděme od věty Carnotovy. Dle ní jest

$$u^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$
$$u^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \gamma.$$

Srovnáním, jestliže položíme $\gamma = \pi - \alpha$, vyjde

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2 + d^2 + 2cd \cos \alpha,$$

z čehož

$$(a) \qquad \cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)}{2(ab + cd)}.$$

Připočtěme k jednotce tuto rovnici,

$$1+\cos\alpha = 1 + \frac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)} = \frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{2(ab+cd)}$$

$$= \frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)}{2(ab+cd)}.$$

Vzhledem k rov. (2) obdržíme

$$(3) \qquad 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4ab}{2(ab+cd)}.$$

Položme k vůli zjednodušení

$$\begin{array}{lll} ab = \lambda_1, & cd = \lambda_2, & \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda, \\ bc = \mu_1, & ad = \mu_2, & \mu_1 + \mu_2 = \mu, \\ ac = \nu_1, & bd = \nu_2, & \nu_1 + \nu_2 = \nu. \end{array}$$

Tím obdrží se z (3)

$$(3') \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}}.$$

Odečtením rovnice (a) od jednotky obdrží se rovnice, z níž dostane se

$$(4) \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda}}$$

a tedy

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Pro funkce celistvého úhlu vycházejí vzorce

$$(6) \qquad \sin\alpha = 2\,\frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda},$$

$$(6') \qquad \cos\alpha = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda},$$

$$(7) \qquad \operatorname{tg}\alpha = 2\,\frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Jest zřejmo, že $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = \alpha'$, neboť jsou to úhly obvodové nad týmž obloukem. Taktéž

$$\sphericalangle \mathrm{ADB} = \sphericalangle \mathrm{ACB} = \beta'$$
$$\sphericalangle \mathrm{BAC} = \sphericalangle \mathrm{BDC} = \gamma'$$
$$\sphericalangle \mathrm{CBD} = \sphericalangle \mathrm{CAD} = \delta'.$$

Dle sinusové věty

$$a : b = \sin \alpha' : \sin \beta' = a : d = \sin \alpha' : \sin \delta',$$

odkudž

$$b : d = \sin \beta' : \sin \delta'$$

a tedy všeobecně

$$a : b : c : d = \sin \alpha' : \sin \beta' : \sin \gamma' : \sin \delta'. \tag{8}$$

Budiž $\overline{\mathrm{AE}} = u_1$, $\overline{\mathrm{EC}} = u_2$, $\overline{\mathrm{BE}} = v_1$, $\overline{\mathrm{ED}} = v_2$.

O těchto úsecích jest v platnosti

$$u_1 : v_2 = v_1 : u_2.$$

Z rovnice (8) vychází

$$(a + c) : (b + d) = (\sin \alpha' + \sin \gamma') : (\sin \beta' + \sin \delta') \tag{9}$$

a tedy

$$\sin \alpha' + \sin \gamma' = \sin \beta' + \sin \delta' \tag{10}$$

aneb

$$\sin \frac{\alpha' + \gamma'}{2} \cos \frac{\alpha' - \gamma'}{2} = \sin \frac{\beta' + \delta'}{2} \cos \frac{\beta' - \delta'}{2},$$

a uvážíme-li, že

$$\alpha' + \gamma' + \omega = \pi,$$

kdež ω jest úhel úhlopříček,

$$\beta' + \delta' = \omega,$$

dostaneme výsledek

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{\cos \frac{\beta' - \delta'}{2}}{\cos \frac{\alpha' - \gamma'}{2}}. \tag{11}$$

Máme však

$$\beta' - \delta' = \delta + \gamma - \pi, \qquad \alpha' - \gamma' = \beta + \gamma - \pi,$$

a rovnice (11) se tedy transformuje na

$$(12) \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{\sin \frac{\delta + \gamma}{2}}{\sin \frac{\beta + \gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\delta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Substitucí dle (3') a (4) a úpravou obdržíme

$$(13) \qquad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}}.$$

Uveďme ještě

$$(14) \qquad \sin \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu}}, \quad \cos \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu}},$$

$$(15) \qquad \sin \omega = \frac{2\sqrt{\nu_1 \nu_2}}{\nu}, \quad \cos \omega = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu}.$$

Plošný obsah Δ daného čtyřúhelníka

$$\Delta = \frac{1}{2} ab \sin \alpha + \frac{1}{2} cd \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha (\lambda) = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Dosadíme-li za $\lambda_1 \lambda_2$ pravé hodnoty, můžeme Δ psáti ve tvarech

$$(16) \qquad \Delta = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} = \sqrt{\mu_1 \mu_2} = \sqrt{\nu_1 \nu_2} = \sqrt{abcd}.$$

Poloměr r kružnice vepsané nalezneme obdobně jako při trojúhelníku; jest i zde

$$(17) \qquad r = \frac{\Delta}{s}.$$

Položme

$$\overline{AG} = \overline{AF} = r_1, \overline{BG} = \overline{BH} = r_2, \overline{CH} = \overline{CK} = r_3, \overline{DF} = \overline{DK} = r_4.$$

Z $\triangle$ OAF jest

$$r_1 = r \cot \frac{\alpha}{2} = r \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \frac{\Delta}{s} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}},$$

$$
(18) \qquad \begin{aligned} r_1 &= \frac{\lambda_1}{s}; \quad r_2 = \frac{\mu_1}{s}; \\ r_3 &= \frac{\lambda_2}{s}; \quad r_4 = \frac{\mu_2}{s}. \end{aligned}
$$

Znásobením

$$
r_1 r_2 r_3 r_4 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2}{s^4} = \frac{\Delta^4}{s^4} = r^4,
$$

t. j.

$$
(19) \qquad r = \sqrt[4]{r_1 r_2 r_3 r_4}.
$$

Ukázati sluší také na relace

$$
\begin{aligned} r_1 : r_2 &= r_4 : r_3 = a : c, \\ r_2 : r_3 &= r_1 : r_4 = b : d, \end{aligned}
$$

což lze slovy vyjádřiti:

Spojnice protilehlých dotyčných bodů čtyřúhelníka ABCD dělí jeho strany v poměru stran přilehlých.

Důkaz provede se snadno substitucí původních hodnot z rov. (18.) za úseky r_1, r_2, r_3, r_4.

Poloměr R kružnice opsané ustanovíme touto úvahou:

Jest patrno, že

$$
\sin \alpha' = \frac{a}{2R}.
$$

Z trojúhelníka ABD jde

$$
v : a = \sin \alpha : \sin \alpha'
$$

a tedy

$$
(20) \qquad R = \frac{v}{2 \sin \alpha}
$$

nebo užitím druhé úhlopříčny

$$
(20') \qquad R = \frac{u}{2 \sin \beta}.
$$

Znásobením

$$
R^2 = \frac{uv}{4 \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\Delta}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \omega}.
$$

Substitucí z rovnic (6) a (15) po krátké redukci vyjde vzorec

$$\text{(21)} \qquad R = \frac{\sqrt{\lambda\mu\nu}}{4\Delta} = \frac{\sqrt{\Pi}}{4\Delta},$$

jestliže $\lambda\mu\nu = \Pi$.

Z rovnic (20), (21′) obdržíme nyní úhlopříčny

$$\text{(22)} \qquad u = \sqrt{\frac{\lambda\nu}{\mu}} = \frac{\sqrt{\Pi}}{\mu}, \qquad v = \sqrt{\frac{\mu\nu}{\lambda}} = \frac{\sqrt{\Pi}}{\lambda}.$$

Znásobením obou úhlopříčen obdržíme větu Ptolemaeovu

$$\text{(23)} \qquad uv = \nu$$

a dělením úměru

$$u : v = \lambda : \mu.$$

Úhel α' se vypočte z úměry

$$v : a = \sin\alpha : \sin\alpha',$$

$$\text{(24)} \qquad \sin\alpha' = \frac{a}{v}\sin\alpha = \frac{2a\,\Delta}{\sqrt{\Pi}}.$$

Ostatní úhly analogicky se vypočtou.
Úseky úhlopříčen vyjadřují rovnice

$$\text{(25)} \qquad u_1 = \frac{b\sin\alpha'}{\sin\omega} = \frac{2ab\,\Delta\,\gamma'}{\sqrt{\Pi}\,.\,2\Delta} = \frac{\lambda_1\nu}{\sqrt{\Pi}}, \qquad u_2 = \frac{\nu\lambda_2}{\sqrt{\Pi}}; \qquad v_1 = \frac{\mu_1\nu}{\sqrt{\Pi}}, \quad v_2 = \frac{\mu_2\nu}{\sqrt{\Pi}}.$$

Uvedeme ještě některé výsledky.
Součet úhlopříčen

$$\text{(26)} \qquad u + v = \sqrt{\Pi}\,\frac{\mu+\lambda}{\mu\lambda} = s^2\sqrt{\frac{\nu}{\lambda\mu}},$$

neboť
$$\lambda + \mu = s^2.$$

Spojnice protějších bodů dotyčných:

$$\overline{KG} = \frac{2\Delta\sqrt{\nu_1}}{\sqrt{\lambda\mu}},$$

$$\overline{FH} = \frac{2\Delta\sqrt{\nu_2}}{\sqrt{\lambda\mu}}$$

a jich poměr

$$\overline{KG} : \overline{FH} = \sqrt{\nu_1} : \sqrt{\nu_2}. \tag{27}$$

Obsah čtyřúhelníka FGHK

$$\Delta' = \frac{2\Delta^3}{\lambda\mu}. \tag{28}$$

Vzdálenost středu O od vrcholu čtyřúhelníka

$$\overline{OA} = \frac{\Delta}{s}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}}. \tag{29}$$

a součet čtverců všech čtyř spojnic jest

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{s^2}\ *).$$

Příspěvek ku řešení trojúhelníka.

Napsal

Dr. Antonín Pleskot,

professor v Plzni.

V předcházejícím ročníku Časopisu tohoto uvedli jsme řešení trojúhelníka, dány-li jsou jeho strany. Řešením tím dospěli jsme k známým identickým vztahům, které platí o úhlech α, β, γ vyhovujících podmínce

---

*) O čtyřúhelníku tohoto druhu jedná též článek „O čtyrúhelníku dvojstředovém,“ který v XVII. ročníku Časopisu (str. 10.) uveřejnil řed. A. Strnad. Red.