Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Ludvík Kraus

Příspěvek ku transformaci jedenáctého řádu funkcí elliptických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 2, 52--61

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122233

Kdežto práce první vznikla asi v téže době jako pojednání: „Note über aussergewöhnliche Specialgruppen auf algebraischen Curven“, z důvodů neznámých však otištěna nebyla, pochází obě poznámky z oné doby, kdy choroba již ohlodávala kořen života Krausova.

Všecky tyto práce ukazují jak volbou látky, tak provedením, že zesnulý se obíral jen úvahami těžkými, vyžadujícími velkého napjetí duševních sil, a výsledek, s jakým tyto práce konal, jest jistou zárukou, že se sláva jména jeho stále šířiti bude. Jaká to škoda, že národu nečetnému muž takový zemřel!

Truchlí-li odborník ze ztráty tak vynikajícího učence, truchlí dvojnásobně vzpomínaje si na ušlechtilou povahu zesnulého. Hlavním cílem života jeho bylo poznati pravdy mathematické; za tím cílem kráčel neohlížeje se ani po zevní slávě ani po hmotných výhodách, pokládaje je za věc vedlejší. — Rád hovoříval o vědeckých předmětech, překvapoval každého originalností a silou myšlének, a vynikal skromností, jaká vyskytuje se jen u těch, jimž jde v pravdě o věc. Kéž příklad, který nám podával svým vědeckým snažením a svou šlechetnou povahou, nemíne se s účinkem; kéž se nalezne hojný počet těch, kteří se vynasnaží, aby kráčeli v šlépějích drahého zesnulého! Česť a sláva nehynoucí budiž památce jeho!

Příspěvek ku transformaci jedenáctého řádu funkcí elliptických.

Sepsal

Dr. L. Kraus.

Pan *Klein* uveřejnil ve XII. svazku časopisu „Mathematische Annalen“ pojednání nadepsané: „Über die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Funktionen“, v němž podává úplný obraz *Galoisovy* resolventy rovnice transformační.

Tímto obrazem jest křivka $\mathfrak{C}$, 20. stupně, rodu 26., jsoucí zároveň dvojnou křivkou rovnice

$$\mathfrak{H} \equiv \begin{vmatrix} y_9, & 0, & y_5, & y_1, & 0 \\ 0, & y_3, & 0, & y_9, & y_4 \\ y_5, & 0, & y_1, & 0, & y_3 \\ y_1, & y_9, & 0, & y_4, & 0 \\ 0, & y_4, & y_3, & 0, & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Souřadnice y_1, y_4, y_5, y_9, y_3 křivky $\mathfrak{C}$ hoví při tom rovnicím nejnižší dimense

$$\begin{aligned} &0 = y_4 y_5 y_9 y_3 - y_1^2 y_5 y_3 + y_1^2 y_4^2 + y_3^3 y_1 \\ (1) \qquad &0 = y_1^2 y_5 y_9 - y_4^2 y_5 y_3 - y_3^2 y_1 y_9 \\ &0 = y_4^3 y_9 + y_9^3 y_5 + y_3^3 y_1, \end{aligned}$$

jakož i dalším 12 rovnicím, z napsaných cyklickými permutacemi na jevo jdoucím. Indexy mají vždy pořad

1, 4, 5, 9, 3,

jsouce tak urovnány, že každý další index vychází z předešlého násobením čtyřmi podle modulu 11.

Avšak pan Klein vytkl mimo to jakožto obraz téže resolventy křivku C v prostoru o pěti rozměrech, jejíž souřadnice značiti chceme

$$A_0, A_1, A_4, A_5, A_9, A_3.$$

Pak existují mezi souřadnicemi obou čar $\mathfrak{C}$ a C tyto relace:

$$\frac{y_4}{y_5} = -\frac{A_0}{A_1}, \quad \frac{y_5}{y_9} = -\frac{A_0}{A_4}, \quad \frac{y_9}{y_3} = -\frac{A_0}{A_5},$$

$$\frac{y_3}{y_1} = -\frac{A_0}{A_9}, \quad \frac{y_1}{y_4} = -\frac{A_0}{A_3}.$$

Dále dokázal pan *Brioschi* v pojednání nadepsaném: „Sopra una classe di equazioni modulari“ (Annali di Matematica, ser. 2. t. IX.), že souřadnice A_k čáry C hoví rovnicím:

$$\begin{aligned} &A_0^5 + A_1 A_4 A_5 A_9 A_3 = 0 \\ (2) \quad &4A_0^3 + A_1 A_5^2 + A_4 A_9^2 + A_5 A_3^2 + A_9 A_1^2 + A_3 A_4^2 = 0 \\ &A_0 (A_5^2 + 2A_9 A_1) + 2A_1 A_5 A_4 + A_9^2 A_3 + A_3^2 A_4 = 0, \end{aligned}$$

jakož i dalším čtyrem z napsaných cyklickou záměnou plynoucím rovnicím.

V stati této odpovídám tudíž k těmto, až dosud neuvažovaným otázkám:

1. Analytickou transformaci čáry $\mathfrak{C}$ v čáru C skutečně provésti.

2. *Dostatečný počet na sobě nezávislých rovnic udati, jimž hoví souřadnice čáry* C.

Stanovení takových na sobě *nezávislých rovnic* jest proto nutné, že ony panem Brioschim vytknuté nejsou *dostatečny.* Současně nás však tyto úvahy přivedou k poznání, že jsou ony námi vytknuté rovnice k sobě ve zvláštním, pozoruhodném vztahu, aniž by proto byly linearně na sobě zavislé.

3. *Určiti funkce φ pro čáru* C *a tím i pro čáru* $\mathfrak{C}$.

Odpovím především k odstavcům 1. a 2., nepodávaje však vždy podrobné důkazy.

Rovnice transformační zní:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= -\sqrt{y_1 y_4 y_5 y_9 y_3} \\
A_1 &= +\sqrt{\frac{y_5^3 y_1 y_9 y_3}{y_4}} \\
A_4 &= +\sqrt{\frac{y_9^3 y_4 y_3 y_1}{y_5}} \\
A_5 &= +\sqrt{\frac{y_3^3 y_5 y_1 y_4}{y_9}} \\
A_9 &= +\sqrt{\frac{y_1^3 y_9 y_4 y_5}{y_3}} \\
A_3 &= +\sqrt{\frac{y_4^3 y_3 y_5 y_9}{y_1}}.
\end{aligned}
$$

Z uvedených relací (1) mezi souřadnicemi čáry $\mathfrak{C}$ nalezneme snadným způsobem pro souřadnice čáry C tyto relace čtvrté dimense:

$$
\begin{aligned}
& A_0^3 A_1 = A_4 A_5 (A_5 A_9 + A_3 A_0) \\
(3) \qquad & -A_0^3 A_1 = A_3 (A_4^2 A_1 + A_9 A_0^2) \\
& A_0 A_1 (A_0 A_1 + A_3 A_9) + A_0^2 A_4 A_9 = A_1 A_4 A_3 A_5,
\end{aligned}
$$

jakož i dalších 12, z těchto rovnic cyklickou záměnou indexů 1, 4, 5, 9, 3 plynoucích rovnic.

Dále nalezneme rovnici čtvrtého stupně

$$
\begin{aligned}
H \equiv A_0^4 &+ A_0 (A_1 A_5^2 + A_4 A_9^2 + A_5 A_3^2 + A_9 A_1^2 + A_3 A_4^2) \\
&+ A_1^2 A_5 A_4 + A_4^2 A_9 A_5 + A_5^2 A_3 A_9 + A_9^2 A_1 A_3 + A_3^2 A_4 A_1 = 0
\end{aligned}
$$

jejíž dvojnou křivkou jest právě křivka C.

Přihlednouce zevrubněji k této rovnici, shledáváme, že skutečně rovnice

$$\frac{\partial H}{\partial A_{k2}} = 0$$

úplně souhlasí s oběma již udanými relacemi (2) stupně třetího. Násobíme-li každou z těchto rovnic linearnou funkcí veličin A, mající však koefficienty po libosti volené, dobereme se tímto způsobem 36 linearně nezávislých rovnic čtvrtého stupně, jimž souřadnice A křivky C hoví. Žádná z těchto 36 rovnic nezávisí však linearně na výše uvedených 15 rovnicích (3). Neboť *existuje 51 linearně nezávislých rovnic stupně čtvrtého, jimž souřadnice A křivky C hoví, a jež mají tu vlastnost, že každá jiná rovnice čtvrtého stupně, která jest souřadnicemi křivky C vyplněna, musí býti linearnou posloupností zmíněných 51 rovnic.*

Že skutečně těchto 51 rovnic na sobě linearně nezávisí, lze snadno na oněch rovnicích ukázati, že pak i žádné další linearně nezávislé rovnice čtvrtého stupně neexistují, dokázati lze vyvinutím souřadnic A křivky C v řady, postupující v tomto případě podle jedenáctých mocností jedné proměnné s.

Obdržíme tak:

$A_0 = -s^6 + \ldots;\ A_1 = 1 + \ldots;\ A_4 = -s^7 + \ldots;$
$A_5 = -s^2 + ;\ldots;\ A_9 = -s^{15} + \ldots;\ A_3 = +s + \ldots$

Dosadíme-li nyní do veškerých výrazů čtvrtého stupně A_0^4, $A_0^3 A_4$, atd., jichž jest celkem

$$\frac{7.8.9}{4} = 126,$$

za souřadnice A příslušné řady, obdržíme 126 vývinů pokračujících podle stoupajících mocností veličiny s, mezi nimiž existovati *musí* 51 linearných totožností, má-li býti výše uvedená věta správnou. Ale tomu vskutku tak.

Mnohých vývinů není však ani třeba, z čehož arci plyne větší stručnost naší úvahy. Tak ku př. jest první člen řady pro $A_1^3 A_3$ pouze proměnná s, a ježto není jiného výrazu, jehož vývin by také počínal proměnnou s, lze à priori vyloučiti nejen výraz $A_1^3 A_3$, ale i cyklickou záměnou z něho plynoucí výrazy

$$A_4^3 A_1,\quad A_5^3 A_4,\quad A_9^3 A_5,\quad A_3^3 A_9.$$

Jinak bez obtíží nahlédneme, že obdržeti lze každou rovnici 5. stupně, jíž hoví souřadnice A křivky C, násobením buď některých neb i všech 51 rovnic vhodnými, v souřadnicích A linearnými faktory, a sečtením takto získaných výrazů. Takovýmto způsobem jest též možno odvoditi první ze zmíněných již rovnic (2), totiž

$$A_0^5 + A_1A_4A_5A_9A_3 = 0.$$

Přistupme nyní ku vyšetření odstavce třetího.

Jedná se zde především o to, stanoviti takové celistvé nebo i lomenné funkce φ veličin A, jež tvoří čítatele Abelova integralu, všude konečného. Jest jich vždy p, v našem případě tedy 26 a sice linearně na sobě nezávislých. Každá funkce φ jest určena $(p-1)$ soustavou hodnot souřadnic A křivky C a zmizí, nehledě k určitým *pevným* soustavám hodnot v $(2p-2)$ bodech křivky C. Zde tedy jest každá funkce φ určena 25 soustavami hodnot veličin A a zmizí v 50 bodech křivky C.

Běží především o sestrojení integralu, všude konečného. Jak povědomo, utvoříme onen integral tím, že zvolíme v případě 6 homogenních proměnných 4 funkce F_1, F_2, F_3, F_4 nejnižšího stupně, jež pro souřadnice křivky C vymizí, a mimo to dvě roviny $u = 0$, $v = 0$.

Hledaný integral má pak tvar

$$J = \int \frac{\Phi\,(u dv - v du)}{\Delta},$$

kde Δ značí funkcionalný determinant funkcí

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4,\ u,\ v.$$

Φ musí býti tak voleno, by bylo dimense o dvě jednotky nižší než Δ, a aby vymizelo pro ony soustavy hodnot souřadnic A křivky C, pro něž vymizí nehledíc na u a v determinant Δ, t. j. tedy musí se annulovat pro ony soustavy hodnot souřadnic A křivky C, pro něž zmizí determinanty 4. stupně matricy

$$\left|\begin{matrix} F_{10}, & F_{11}, & F_{14}, & F_{15}, & F_{19}, & F_{13} \\ F_{20}, & F_{21}, & F_{24}, & F_{25}, & F_{29}, & F_{23} \\ F_{30}, & F_{31}, & F_{34}, & F_{35}, & F_{39}, & F_{33} \\ F_{40}, & F_{41}, & F_{44}, & F_{45}, & F_{49}, & F_{43} \end{matrix}\right|.$$

F_{hk} jest tu pouze kratším označením výrazů $\frac{\partial F_h}{\partial A_k}$.

Uvedené podmínky jsou nutné, avšak i stačí, by náš integral byl veskrz konečným.

Volme nyní za ony funkce F 4 z Brioschiho rovnic 3. stupně, a sice

$$\frac{\partial H}{\partial A_0}=0,\quad \frac{\partial H}{\partial A_9}=0,\quad \frac{\partial H}{\partial A_3}=0,\quad \frac{\partial H}{\partial A_1}=0,$$

za u a v pak roviny

$$A_4=0,\quad A_5=0.$$

Označíme-li pak k vůli stručnosti symbolem H_{hk} výraz

$$\frac{\partial^2 H}{\partial A_h \partial A_k},$$

bude Δ rovnati se

$$\Delta'=\begin{vmatrix} H_{00}, & H_{09}, & H_{03}, & H_{01}, & H_{04}, & H_{05} \\ H_{90}, & H_{99}, & H_{93}, & H_{91}, & H_{94}, & H_{95} \\ H_{30}, & H_{39}, & H_{33}, & H_{31}, & H_{34}, & H_{35} \\ H_{10}, & H_{19}, & H_{13}, & H_{11}, & H_{14}, & H_{15} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} H_{00}, & H_{09}, & H_{03}, & H_{01} \\ H_{90}, & H_{99}, & H_{93}, & H_{91} \\ H_{30}, & H_{39}, & H_{33}, & H_{31} \\ H_{10}, & H_{19}, & H_{13}, & H_{11} \end{vmatrix}.$$

Jest tedy Δ' funkcí stupně 8. a tudíž Φ dimense 6.

Ale ježto musí býti mezi oněmi hodnotami, pro něž Φ zmizí, 50 hodnot, jež nejsou pevnými, Φ však celkem v $6 \times 25 = 150$ bodech vymizí, jest patrno, že existuje 100 *určitých* soustav hodnot souřadnic A křivky C, pro něž ony determinanty 4. stupně vymizí, z čehož dále jde, že pro ony soustavy hodnot i determinant Δ' zmizeti musí.

Výsledku toho lze se dobrati též s jiné strany. Determinant Δ' zmizí, vzhledem k tomu, že jest 8. stupně, pro 200 soustav hodnot souřadnic A křivky C. Ale Δ' musí zmizeti vždy, kdykoli

$$A_4 dA_5 - A_5 dA_4 = 0;$$

to stane se však pro 100 soustav hodnot, ježto počet jich musí býti roveň třídě rovinné čáry stupně 25. a rodu 26. Správnost výroku právě učiněného ihned nahlédneme, když promítneme křivku C z bodu, jehož souřadnice A_4 a A_5 se rovnají nulle, atd.

Je-li však stupeň nějaké křivky n a rod její p, jest třída její obecně

$$n(n-1)-2\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}-p\right],$$

a tedy v našem případě

$$25 \,.\, 24 - 2\left(\frac{24 \,.\, 23}{2} - 26\right) = 48 + 52 = 100.$$

Výraz

$$\frac{\Phi\,(A_4 dA_5 - A_5 dA_4)}{\Delta'},$$

pod znamením integralu stojící, stane se neurčitým tvarem $\frac{0}{0}$ pro oněch 100 soustav hodnot, pro něž se jak Δ' tak i

$$A_4 dA_5 - A_5 dA_4$$

rovná nulle.

Ježto však Δ' ještě pro dalších 100 soustav hodnot vymizí, musí vzhledem k tomu, že má býti integral J všude konečným, také funkce Φ pro těchto 100 soustav hodnot vymizet. Obdržíme tudíž oněch 200 soustav hodnot, pro něž Δ' vymizí, rozděleny na dva druhy. Avšak dokážeme ihned, že v našem případě oba tyto druhy jsou identické.

Značí-li totiž D Hesse-ův determinant veličin H a obdobně $\overline{H}_{hk}$ subdeterminanty veličin H_{hk}, vyjádřeny v D, tu platí rovnice

$$D\Delta' = \overline{H}_{44}\overline{H}_{55} - \overline{H}_{45}^2.$$

Z této rovnice lze pak odvoditi větu, že jest nutno každou z oněch 100 soustav hodnot souřadnic A křivky C, pro niž determinant Δ' zmizí, počítati dvakrát.

Avšak nyní dále ukážeme, že lze vyjádřiti Δ' jakožto úplný čtverec celistvé funkce 4. stupně. Přímý důkaz tohoto výroku byl by dosti těžký; rychleji dojdeme cíle, užijeme-li dříve vytknutých vývinů souřadnic A v řady. Dosadíme-li tyto řady za souřadnice A do Δ', obdržíme řadu

$$25s^{16} - 100s^{27} + 350s^{38} - 340s^{49} + 475s^{60} + 480s^{71} + 1116s^{82} + 784s^{93} + \ldots,$$

jejíž právě napsané členy pro další naše úvahy úplně vystačí.

Snadno totiž nahlédneme, že výraz

$$5s^8 - 10s^{19} + 25s^{30} + 16s^{41} + 17s^{52} + 2s^{63} + 5s^{74} + 24s^{85}$$

povýšen byv na čtverec, právě ony počáteční členy napsané řady podává.

Z posledního výrazu obdržíme nyní řešením soustavy linearných rovnic výraz

$$\nabla = A_5^4 - 30\, A_0 A_3^3 - 26\, A_0 A_1 A_3 A_5 - A_2^2 A_1^2 + 54\, A_0^2 A_4 A_5 - 38\, A_4^2 A_2 A_3 - 8 A_2^3 A_4$$

obsahující opět souřadnice A. Shledáváme tudíž správnost výroku:

Jsme s to, abychom určili jednoznačně celistvou, racionalnou funkcí ∇ stupně 4. souřadnic A té vlastnosti, že vývin funkce ∇^2 v řadu s vývinem výrazu Δ' v řadu, až ku členu s^{93}, ku kterémuž náš počet proveden byl, úplně souhlasí.

Kdyby nyní obě řady, jež, jak bylo ukázáno, pro počáteční členy souhlasí, byly vůbec totožny, mohli bychom v integralu místo Δ' zavésti ∇^2, jelikož uvažujeme pouze soustavy hodnot souřadnic A křivky C.

Jedná se tudíž o to, dokázati platnost domněnky této, i užijeme k tomu cíli věty:

„*Jest-li že celistvá funkce 8. stupně pro více než 200 soustav hodnot souřadnic* A *křivky* C *vymizí, musí vymizeti pro každou soustavu hodnot souřadnic* A *křivky* C, *ježto ona křivka* C *jest irreduktibelní.*“

Takovou funkcí 8. stupně jest však

$$\nabla^2 - \Delta'.$$

Vyvineme-li ji tedy v řadu stoupající dle mocností veličiny s, a lze-li pak ukázati, že vymizí koefficienty všech členů této řady až ku s^{203}, tento člen ještě počítaje, musí pak vymizeti veškeré koefficienty právě zmíněné řady.

To však přímo dokázati bylo by zbytečno; dostačí výraz $\nabla^2 - \Delta'$ cyklicky permutovat, a do takto obdržených čtyř výrazů známé řady za souřadnice A dosadit. Obdržíme tak čtyry nové řady, kde u každé z nich jest nám k tomu přihlédnouti, zda-li vymizí počátečné členy. A sice stačí jíti u těchto čtyř řad jen až k oněm exponentům veličiny s, jejichž součet jest roveň aneb větší než

$$203 - 93 = 110.$$

Veškeré tyto domněnky počet ztvrzuje, tak že lze psáti integrál ve tvaru

$$\int \frac{\Phi}{\nabla^2} (A_4\, d A_5 - A_5\, d A_4),$$

aneb, ježto jest

$$\Phi = \nabla \varphi,$$

ve tvaru

$$\int \frac{\varphi}{\nabla} (A_4\, d A_5 - A_5\, d A_4),$$

kdež jest φ buď celistvou, neb lomenou funkcí dimense 2. souřadnic A.

„Jest tudíž každá celistvá funkce druhého stupně souřadnic A hledanou funkcí φ.“

Takových funkcí jest však pouze

$$\frac{3.4.5.6.7}{1.2.3.4.5} = 21$$

linearně na sobě nezávislých, a ježto, jak již dříve bylo podotčeno, pouze $p = 26$ linearně nezávislých funkcí φ existuje, jest nám určiti ještě 5 dalších linearně na sobě nezávislých funkcí φ. Tyto funkce nemohou však více býti celistvé, jinak by byly v oněch 21 obsaženy, i musí tudíž býti funkcemi lomenými. Ku jich stanovení užijeme věty:

„Vymizí-li celistvá funkce 4. stupně pro $2p - 2 = 50$ soustav hodnot souřadnic A křivky C, a zmizí-li pro oněch 50 soustav hodnot souřadnic A zároveň i jistá funkce φ, vymizí i pro zbývajících 50 hodnot, pro něž ona celistvá funkce 4. stupně vymizí, jistá jiná funkce φ.“

Zvolme tudíž libovolnou z oněch 21 funkcí φ ku př. A_0^2. Tato funkce vymizí pro každou ze 5 níže napsaných soustav hodnot souřadnic A desateronásobně:

$$\begin{array}{llllll}
\text{I.} & A_1 = 1, & A_4 = 0, & A_5 = 0, & A_9 = 0, & A_3 = 0, \\
\text{IV.} & A_1 = 0, & A_4 = 1, & A_5 = 0, & A_9 = 0, & A_3 = 0, \\
\text{V.} & A_1 = 0, & A_4 = 0, & A_5 = 1, & A_9 = 0, & A_3 = 0, \\
\text{IX.} & A_1 = 0, & A_4 = 0, & A_5 = 0, & A_9 = 1, & A_3 = 0, \\
\text{III.} & A_1 = 0, & A_4 = 0, & A_5 = 0, & A_9 = 0, & A_3 = 1.
\end{array}$$

Volíme-li nyní funkci 4. stupně

$$A_0 A_1 A_9 A_3,$$

tu zmizí tato funkce pro napsané systemy tímto způsobem: pro I. 21-násobně, IV. 23-násobně, V. 29-násobně, IX. 14-násobně, III. 13-násobně.

Vymizí tudíž funkce

$$\frac{A_0 A_1 A_9 A_3}{A_0^2} = \frac{A_1 A_9 A_3}{A_0}$$

pro ony soustavy resp. 11-, 13-, 19-, 4- a 3-násobně. Jest to tedy celkem 50 soustav hodnot a v těchto musí tudíž vymizeti jistá funkce φ, pročež

$$\varphi = \frac{A_1 A_9 A_3}{A_0}.$$

Řadami snadno se lze přesvědčiti, *že pro ony soustavy hodnot, pro něž vymizí právě napsaná funkce* φ, *nemůže vymizeti žádná celistvá funkce stupně druhého,* takže tato funkce φ nutně musí býti jednou z oněch 5 hledaných. Cyklickou záměnou výrazu

$$\frac{A_1 A_9 A_3}{A_0}$$

obdržíme všechny hledané funkce φ a sice:

$$\frac{A_1 A_9 A_3}{A_0}, \quad \frac{A_4 A_3 A_1}{A_0}, \quad \frac{A_5 A_1 A_4}{A_0}, \quad \frac{A_9 A_4 A_5}{A_0}, \quad \frac{A_3 A_5 A_9}{A_0},$$

čímž úloha naše úplně řešena jest.

Upotřebíme-li pak ještě transformace uvedené na počátku této stati, jest nám možno i pro křivku $\mathfrak{C}$ udati příslušné funkce φ.

Applikací Abelova theoremu dojdeme konečně té zajímavé věty, *že jest hodnota našeho integralu, vzata podél křivky* C *ve dvou mezích, jež k našim 5 dříve uvedeným soustavám hodnot přísluší,* $\frac{1}{55}$ *jedné periody tohoto integralu.*

Důkaz věty, že existuje nekonečně mnoho kmenných čísel $kp+1$, je-li p kmenné.

Napsal

dr. Ludvík Kraus.

Je-li

$$M = a^p - 1,$$

platí

$$\varphi(M) \equiv 0 \pmod{p},$$

značí-li $\varphi(M)$ jako obyčejně počet čísel nesoudělných s M a nepřevyšujících M.*)

---

*) Je-li $M = a^\nu - 1$, kdež a, ν značí *libovolná* čísla, platí též

$$\varphi(M) \equiv 0 \pmod{\nu},$$

jak ukázáno v pojednání „O jisté větě číselné“ od Ed. Weyra, tento Časopis sv. XI., čl. 7. *Pozn. redakce.*