Antonín Kostěnec

Jak lze snáze a jistěji děliti nežli způsobem obyčejným?

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 2, 74--80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122227

Jak lze snáze a jistěji děliti nežli způsobem obyčejným?

Napsal

Ant. Kostěnec,

prof. při vyšším r. g. na Malé Straně v Praze.

V čísle 1. nynějšího ročníku časopisu tohoto jest uveřejněn od P. *Vervaeta* zvláštní způsob násobení pomocí doplňků obou činitelů (o témž počtu cifer) do nejblíže vyšší společné mocniny deseti. Podobný způsob dělení, při němž se užívá doplňku dělitele, jest již dávno znám *) a poněvadž jest výhodnější obvyklého způsobu dělení, dovolujeme si zde o něm promluviti.

Bychom podstatu jeho krátce naznačili, uvádíme, že se liší od obyčejného způsobu tím, že se jednotlivými číslicemi podílu nenásobí dělitel, nýbrž doplněk jeho buď do nejblíže vyšší mocniny 10 neb do čísla, které obdržíme, jestliže číslici dělitele na nejvyšším místě o 1 zvětšíme a ostatní místa nullami vyplníme; součiny takto obdržené neodčítají se pak od dělence částečného, nýbrž k němu se přičítají.

Ježto se tu určují jednotlivé číslice podílu právě tak jako při dělení obyčejném, třeba ustanoviti ze součtů těchto jednotlivé zbytky. To se stane, jestliže vynecháme v případě prvním číslici na nejvyšším místě součtu, kteráž se rovná právě určené číslici podílu, neb v případě druhém, jestliže odečteme od nejvyššího místa neb čísla dvou nejvyšších míst součtu součin z náležité číslice podílu a z platící číslice doplňku.

Z uvedeného patrno, že jest nám tu činiti vlastně se dvěma druhy této methody dělení, jak totiž utvoříme doplněk dělitele jedním neb druhým z obou shora zmíněných způsobů.

Odvoditi lze oba tyto způsoby dělení takto:

---

*) *A. L. Crelle* v časopise svém *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Berlin, 1835, XIII. Band, p. 209, pojednává dosti obšírně o tomto způsobu dělení a praví se býti vynálezcem jeho. Též v časopise *Journal de mathématiques élémentaires publié sous la direction de M. J. Bourget*, Paris, 1878, tome 2., p. 295, zmiňuje se redaktor krátce o dělení tomto a praví na konci, že se dověděl o něm od *Lemonniera*, professora na lyceu Jindřicha IV., kterýž prý opět dostal o něm vědomost od jednoho ze svých professorů.

Způsob 1. Budiž D dělitel, m některá číslice podílu, n počet číslic dělitele, S částečný dělenec, od něhož se odečte součin $m\mathrm{D}$, čímž se obdrží zbytek $\mathrm{S} - m\mathrm{D} = \mathrm{R}$; zbytku tohoto nabudeme však též, jestliže ku S přičteme $m\,(10^n - \mathrm{D}) - m\,.\,10^n$, neboť jest

$$\mathrm{S} + m\,(10^n - \mathrm{D}) - m\,.\,10^n = \mathrm{S} - m\mathrm{D} = \mathrm{R}$$

čili

$$\mathrm{S} + md = m\,.\,10^n + \mathrm{R}, \tag{1}$$

kdež rozdíl $10^n - \mathrm{D} = d$ značí doplněk dělitele. Ježto R může míti nejvýše tolik číslic kolik D, tedy n, číslo $m\,.\,10^n$ však $(n+1)$ místo má, bude v součtu $\mathrm{S} + md$ *nejkrajnější číslice v levo rovnati se příslušné cifře podílu* m, po ní pak budou následovati číslice zbytku buď bezprostředně neb budou od číslice m odděleny jednou neb několika nullami, jak totiž zbytek má n číslic neb méně. Vynecháme-li tedy v součtu $\mathrm{S} + md$ číslici m na kraji v levo stojící, obdržíme příslušný zbytek a z něho pak známým způsobem částečného dělence.

Dosadíme-li do rovnice (1) dělence A za S, podíl Q za m, bude

$$\mathrm{A} + \mathrm{Q}d = \mathrm{Q}\,.\,10^n + \mathrm{R}.$$

Poslední rovnice praví, že přičetše k dělenci součin podílu a doplňku dostaneme číslo, v němž po číslicích podílu následují číslice konečného zbytku buď bezprostředně neb jsou od podílu Q odděleny jednou neb několika nullami, jak totiž zbytek má tolik číslic kolik dělitel neb méně.

Že lze užíti ku kontrole neb zkoušce při dělení nejen uvedené již vlastnosti součtů tvaru $\mathrm{S} + m\mathrm{D}$, nýbrž i věty právě vyslovené, jest na bíle dni.

Způsob 2. Je-li μ číslice o 1 větší nežli číslice na nejvyšším místě dělitele a zůstane-li v platnosti dřívější označení, bude patrně jedno, jestliže od S odečteme součin $m\mathrm{D}$ neb přičteme-li $m\,(\mu\,.\,10^{n-1} - \mathrm{D}) - m\mu\,.\,10^{n-1}$ ku S, neboť jest

$$\mathrm{S} + m\,(\mu\,.\,10^{n-1} - \mathrm{D}) - m\mu\,.\,10^{n-1} = \mathrm{S} - m\mathrm{D} = \mathrm{R}$$

čili

$$\mathrm{S} + md_1 = m\mu\,.\,10^{n-1} + \mathrm{R}, \tag{2}$$

kdež značí $\mu\,.\,10^{n-1} - \mathrm{D} = d_1$ doplněk dělitele, R zbytek.

Bychom tu obdrželi zbytek ze součtu $S + md_1$, dlužno tedy odečísti od tohoto posledního součin $m\mu \,.\, 10^{n-1}$ neb vlastně platící číslice jeho od jednoho neb dvou nejvyšších míst (za číslo pokládaných) hořejšího součtu. Z toho následuje, že určování zbytků jest zde složitější a tudíž i méně jisté než při způsobu prvním a že je tedy všeobecně druhý způsob dělení méně výhodný způsobu prvního.

Přece však poskytuje i způsob druhý nepopíratelné výhody zejmena tehdy, je-li doplněk číslo značně menší dělitele.

Dosadíme-li do rovnice (2) za S dělence A, za m podíl Q, bude

$$A + Qd_1 = Q \,.\, \mu \,.\, 10^{n-1} + R.$$

Též zde lze provésti zkoušku na dělení dle poslední rovnice. Potřebí tu jen každou stranu rovnice o sobě vypočítati a pak oba výsledky spolu srovnati.

K objasnění způsobu prvního uvádíme tyto příklady:

$$\begin{array}{rrl}
 & & 1000000 = 10^6 \\
 & 30087577019 : & 635041 = 47378 \\
S_1 = & 3008757 & 364959 = d \\
4d = & 1459836 & \\ \hline
R_1 = S_1 + 4d - 4 \,.\, 10^6 = & (4)468593 & \\
S_2 = & 4685937 & \\
7d = & 2554713 & \\ \hline
R_2 = S_2 + 7d - 7 \,.\, 10^6 = & (7)240650 & \\
S_3 = & 2406500 & \\
3d = & 1094877 & \\ \hline
R_3 = S_3 + 3d - 3 \,.\, 10^6 = & (3)501377 & \\
S_4 = & 5013771 & \\
7d = & 2554713 & \\ \hline
R_4 = S_4 + 7d - 7 \,.\, 10^6 = & (7)568484 & \\
S_5 = & 5684849 & \\
8d = & 2919672 & \\ \hline
R_5 = S_5 + 8d - 8 \,.\, 10^6 = & (8)604521, &
\end{array}$$

R_1, R_2, ... značí, jak viděti, zbytky po sobě jdoucí, S_1, S_2, ... částečné dělence.

První číslice podílu (4), obyčejným způsobem, jak už řečeno, stanoveného, znásobena jest doplňkem d a součin $4d = 1459836$ jest přičten k příslušnému dělenci částečnému $S_1 = 3008757$, čímž obdržen součet $S_1 + 4d = 4468593$, z něhož obdržíme zbytek R_1, vynecháme-li nejkrajnější číslici v levo, zde 4, kteráž jest v příkladě hořejším ozávorkována a — což pozoru hodné — číslici na nejvyšším místě podílu rovna; protož jest zbytek $R_1 = 468593$ a tedy částečný dělenec $S_2 = 4685937$. Totéž se opakuje tolikrát, kolik má podíl platících číslic a jest ostatně zřejmo z hořejšího, do podrobna provedeného příkladu. Při praktickém počítání, při němž se hlavně o krátkost jedná, nenapisují se součiny jednotlivých číslic podílu a doplňku, nýbrž přičtou se hned z paměti k příslušným částečným dělencům, aniž se zbytky a částečné dělence od sebe oddělují.

Dle toho vypočítá se předešlý příklad krátce takto:

$$
\begin{array}{rl}
 & 1000000 \\
30087577019 : & 635041 = 47378 \\
(4)4685937 & 364959 \\
(7)2406500 & \\
(3)5013771 & \\
(7)5684849 & \\
(8)604521 &
\end{array}
$$

Jiný příklad:

$$
\begin{array}{rl}
 & 1000000 \\
8900970316809 : & 899007 = 9900891 \\
(9)8099073 & 100993 \\
(9)008010168 & \\
(8)8181120 & \\
(9)0900579 & \\
(1)001572. &
\end{array}
$$

Že bylo v obou příkladech správně počítáno, dokazují ozávorkované číslice stojící na prvním místě v levo součtů podoby $S + mD$ a rovnající se příslušným číslicím podílu. Nechceme-li však přestati na zkoušce této, učiňme ji druhým způsobem, již dříve naznačeným, načež nám vyjde při posledním příkladě: $A + Qd = 8900970316809 + 999920684763 = 990089100\ 1572$, číslo to, které se skládá z číslic dělitele, dvou null po nich následujících (protože má zbytek 1572 o 2 místa méně než dělitel) a připojeného zbytku, jakož to býti má, bylo-li správně děleno.

Jak se dle 2. způsobu dělí, učí následující příklad, obšírně provedený, který jsme již byli 1. způsobem vypočítali:

$$700000=\mu.10^{n-1}=7.10^5$$

$$30087577019:635041=47378$$

$$\begin{array}{rr}
S_1= & 3008757 \qquad 64959=d_1 \\
4d_1= & 259836 \\
\hline
S_1+4d_1= & 3268593 \\
7.4.10^5= & 2800000 \\
\hline
R_1=S_1+4d_1-7.4.10^5= & 468593 \\
S_2= & 4685937 \\
7d_1= & 454713 \\
\hline
S_2+7d_1= & 5140650 \\
7.7.10^5= & 4900000 \\
\hline
R_2=S_2+7d_1-7.7.10^5= & 240650 \\
S_3= & 2406500 \\
3d_1= & 194877 \\
\hline
S_3+3d_1= & 2601377 \\
7.3.10^5= & 2100000 \\
\hline
R_3=S_3+3d_1-7.3.10^5= & 501377 \\
S_4= & 5013771 \\
7d_1= & 454713 \\
\hline
S_4+7d_1= & 5468484 \\
7.7.10^5= & 4900000 \\
\hline
R_4=S_4+7d_1-7.7.10^5= & 568484 \\
S_5= & 5684849 \\
8d_1= & 519672 \\
\hline
S_5+8d_1= & 6204521 \\
7.8.10^5= & 5600000 \\
\hline
R_5=S_5+4d_1-7.8.10^5= & 604521.
\end{array}$$

Při praktickém počítání přičítají se i tu z paměti součiny jednotlivých číslic podílu a doplňku k příslušným dělencům částečným a rovněž tak odčítají se i součiny podoby $\mu.m.10^{n-1}$ od součtů tvaru $S+md_1$, by se zbytky obdržely, a konečně se opět neoddělují zbytky a ty které dělence částečné od sebe.

Bude tu tedy počítáno krátce takto:

$$
\begin{array}{l}
30087577019 : 635041 = 47378 \\
\;4685937 \qquad\quad 64959 \\
\;\;2406500 \\
\;\;\;5013771 \\
\;\;\;\;5684849 \\
\;\;\;\;\;604521
\end{array}
$$

Jiný příklad:

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad 900000 \\
8900970316809 : 899007 = 9900891 \\
8099073 \qquad\qquad\quad 993 \\
\;\;8010168 \\
\;\;\;8181120 \\
\;\;\;\;900579 \\
\;\;\;\;\;1572
\end{array}
$$

Zkoušku zde možno učiniti dle toho, co bylo o ní již všeobecně pověděno, takto:

$$
\begin{array}{rl}
A = & 8900970316809 \\
Qd_1 = & 9831584763 \\
\hline
A + Qd_1 = & 8910801901572 \\
\mu . Q . 10^{n-1} = & 8910801900000 \\
R = & 1572 \\
\hline
\mu . Q . 10^{n-1} + R = & 8910801901572
\end{array}
$$

Ježto tedy $A + Qd_1 = \mu . Q . 10^{n-1} + R$, bylo správně počítáno.

Srovnáme-li oba tyto způsoby dělení pospolu, shledáme, že první způsob předčí druhý za jedno mnohem snadnějším určováním zbytků, za druhé tím, že dělíce konáme při něm zároveň zkoušku; proto mu sluší dáti vůbec přednost před způsobem druhým, kterýž jen tehdy lze doporučovati, je-li doplněk při něm značně menší než při způsobu prvním.

Oba způsoby tyto pak jsou vůbec výhodnější obyčejného způsobu dělení hlavně tím, že se součiny tvaru md neb md_1 od částečných dělenců neodčítají, nýbrž k nim přičítají, neboť jest sečítání zajisté snadnější než odčítání a poskytuje proto i spolehlivějších výsledků; zvláště pak jsou oba způsoby výhodnější obyčejného dělení tehdáž, jsou-li doplňky (d neb d_1) značně menší nežli dělitelé. *Crelle* praví, že od té doby, kdy přišel na oba tyto druhy dělení, nepočítá jinak, nežli jedním z nich, zejmena pak prvním, a že shledal, kterak jsou oba výhodnými co do snadnosti a jistoty. I my jsme přesvědčeni, že by nikoho nenapadlo, děliti obyčejným způsobem, kdyby měl v počítání oběma uvedenými způsoby takový cvik jako v onom.

Drobné zprávy.

Napsal

A. Strnad,

professor v Hradci Králové.

*** *Z theorie čísel.* Mějme číslo psané číslicemi 0, 1, 2 aneb 0, 1, 3 tak, že ciferný-součet není větší než 5; obrátíme-li pořádek cifer, obdržíme číslo, jehož druhá mocnina obsahuje číslice druhé mocniny prvého v pořádku opačném. Na příklad $113^2 = 12769$, $311^2 = 96721$.

(*Bianco:* Giornale di matematiche, 1884. p. 50).

Výraz $4(a^2+b^2)^2$ lze desaterým způsobem rozložiti v součet pěti čtverců; na př.:

$$4(a^2+b^2)^2$$
$$= (a^2-2b^2)^2 + (a^2-2ab)^2 + (a^2+2ab)^2 + (a^2)^2 + (2ab)^2$$
$$= (a^2+ab+b^2)^2 + (a^2-ab+b^2)^2 + (a^2+ab-b^2)^2 + (a^2-ab-b^2)^2 + (2ab)^2.$$

Výraz $(a^2+b^2)^3$ lze rozložiti v součet dvou, tří, čtyř neb šesti čtverců, totiž:

$$(a^2+b^2)^3 = (3a^2b-b^3)^2 + (a^3-3ab^2)^2$$
$$= (a^3-ab^2)^2 + (a^2b+b^3)^2 + (2a^2b)^2$$
$$= (a^3-ab^2)^2 + (a^2b-b^3)^2 + (2a^2b)^2 + (2ab^2)^2$$
$$= 2(ab^2-a^2b)^2 + 2(ab^2+a^2b)^2 + (ab^2-a^3)^2 + (a^2b+b^3)^2.$$

(*De Rocquigny*: Mathesis, 1884. p. 212; 1885. p. 80.).

Je-li $n = pq$, jest $n!$ dělitelno součiny $(q!)^p . p!$ a $(p!)^q . q!$ Tato věta jest obsažena ve větě obecnější: Je-li

$$n = \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots + \lambda h,$$

jest $n!$ dělitelno součinem

$$\alpha!\ \beta!\ \gamma! \ldots \lambda!\ (a!)^\alpha (b!)^\beta \ldots (h!)^\lambda.$$

Obě věty dokázal *Weill* v Comptes rendus, tome XCIII. Nejnověji podal důkaz jich užitím počtu differenciálného *Gomes-Teixeira* (Grunert-Hoppe, Archiv 1885. p. 265).