Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 2, 85--90

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/122225

*** *Pokusy s radiometrem*, které konal velmi pečlivě a obezřetně Pringsheim, vedly k výsledkům pozoruhodným; zákony radiometru dle nich odvozené lze shrnouti v následující tři: 1. křídlo radiometru ustupuje od zahřáté stěny, 2. ozářená teplejší strana křídla ustupuje, 3. při radiometrech se zakřivenými křídly ustupuje strana konvexní. — Theorie radiometru, která úkazy tyto vysvětluje, zakládá se na mechanické theorii plynů. Vacuum radiometru, byť i sebe pečlivěji vyčerpané, není přece prostorem prázdným, nýbrž obsahuje ještě veliké množství molekulů vzduchu; narážejí-li tyto při svém pohybu na teplejší stěnu, zvětší se jejich kinetická energie, křídlo radiometru pak obdrží jakýsi náraz, který jest větší na straně teplé než studené, takže strana teplejší ustupuje. Že pak při křídlech zakřivených musí strana convexní ustupovati, jest dle theorie této na první pohled zřejmo, jest to týž případ jako u anemometrů. Dalším důkazem pro pravděpodobnosť hypothesy právě uvedené jest, že úkazy jsou identické, je-li radiometr naplněn silně zředěným svítiplynem.

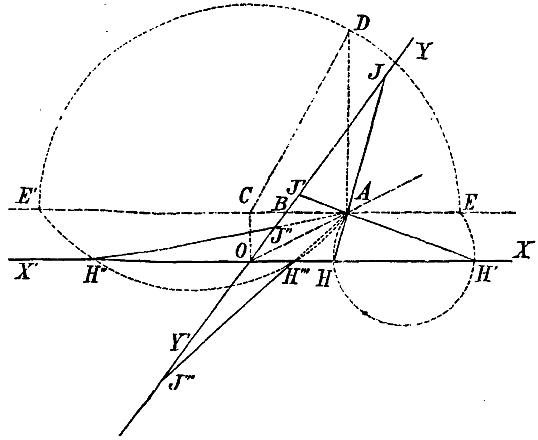
(Wied. Ann. 19. 1883.)

Úlohy.

Řešení úlohy 30. z roč. XIV.

Je-li daný úhel $XOY = \alpha$, OA přímka úhel půlící a A bod na ní daný, veďme nejprve bodem A rovnoběžku AC k rameni OX a spusťme na ni z O kolmici OC. Na AC vztyčme v A kolmici $AD = a$, veďme CD a přenesme délku tu na CE (CE′). Nad AE jakožto tětivou sestrojme kruhový oblouk vnímající obvodový úhel α (nad AE′ taktéž oblouk s obvodovým úhlem $\pi - \alpha$), jenž rameno OX (OX′) protne v bodech H, H′ (H″, H‴). Přímka z H (a j.) skrze A vedená protne druhé rameno OY v bodě J (J′ atd.) tak, že $HJ = a$.

Důkaz. Nazveme části přímky HJ, totiž $HA = x$, $AJ = y$. Patrně jest $\sphericalangle JBA = \alpha$ a vedeme-li HE, také $\sphericalangle AHE = \alpha$, z čehož jde podobnost $\triangle$ ABJ a AHE a platí tedy:



$$\overline{AB} : \overline{AH} = \overline{AJ} : \overline{AE},$$

čili

$$xy = \overline{AB} \, . \, \overline{AE}. \qquad (1)$$

Poněvadž dále $\sphericalangle BOA = \sphericalangle AOH = \sphericalangle OAB$, jest $AB = OB$.

Mimo to jsou $\triangle OAJ$ a OAH' patrně shodny, pročež $AJ = AH'$; avšak zároveň $AH' = HE$ jakožto tětivy mezi rovnoběžkami; tedy $AJ = HE = y$.

Máme tedy dále

$$\overline{AE}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HE}^2 - 2\,\overline{AH} \, . \, \overline{HE} \, . \cos \alpha,$$

čili

$$\overline{AE}^2 = x^2 + y^2 - 2\,xy \, . \cos \alpha.$$

Můžeme však položiti

$$\cos \alpha = \cos (BOH) = \sin (BOC) = \frac{BC}{BO} = \frac{BC}{AB}$$

a spojíme-li to s rovnicí (1), vyjde

$$\overline{AE}^2 = x^2 + y^2 - 2\,\overline{AE} \, . \, \overline{BC},$$

čili

$$x^2 + y^2 = \overline{AE}^2 + 2\,\overline{AE} \, . \, \overline{BC} = \overline{AE} \, . \, (\overline{AE} + 2\,\overline{BC})$$

k tomu dle (1)

$$2\,xy = 2\,\overline{AB} \, . \, \overline{AE},$$

vyjde sečtením

$$(x + y)^2 = \overline{AE} \, . \, (\overline{AE} + 2\,\overline{BC} + 2\,\overline{AB}) = \overline{AE} \, . \, (\overline{CE} + \overline{AC})$$
$$= \overline{AE} \, . \, \overline{AE'} = \overline{AD}^2 = a^2,$$

tedy

$$x + y = a.$$

Zcela podobně provede se důkaz pro ostatní přímky.

Úloha bude míti jen tehdy rozřešení, protnou-li oblouky sestrojené nad AE a AE′ rameno XX′.

(Ředitel *Martin Pokorný.*)

Řešení úlohy 31. z roč. XIV.

(Zaslal p. *Fr. Fišer,* stud. VIII. tř. v Roudnici.)

Nazveme-li první číslici x, druhou y a ostatní 14-cifrové číslo z, jest dle podmínky

$$\tfrac{3}{2}(10^{15}x + 10^{14}y + z) = 10^{15}y + 10z + x$$
$$\tfrac{3}{2}(10^{15}y + 10z + x) = 100z + 10x + y.$$

Znásobíme-li první rovnici 10ti a odečteme-li od ní druhou, jest ihned

$$\tfrac{3}{2}(10^{16}x - x) = 10^{16}y - y \quad \text{čili} \quad \tfrac{3}{2}x = y,$$

aneb

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}. \qquad \text{(a)}$$

Vložíme-li tedy $\frac{3}{2}x$ místo y do rovnice druhé, vyjde

$$(9 \,.\, 10^4 - 4)\,x = 34z,$$

tedy $$z = 264705882352944 \,.\, x.$$

Ježto součinitel x jest 14-cifrový, a z nemá míti více cifer, musí x býti takové, aby se násobením počet číslic nezvětšil. Dle (a) jest x nutně násobek dvojky, avšak již za $x = 4$ vyšlo by za z patrně číslo 15-cifrové, může tedy jedině býti

$$x = 2, \quad y = 3, \quad \text{tudíž} \quad z = 52941176470588,$$

tedy hledané číslo 2352941176470588.

Správné řešení zaslali pp.: *Jan Hošek* ze VI. tř. české v. real. šk. v Praze a *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi.

Řešení úlohy 32. z roč. XIV.

(Podal p. *Frant. Schöbl,* stud. VI. g. v Jindř. Hradci.)

Přímka $\overline{BE}$ půlí úhel při vrcholu B, tedy

$$(1) \qquad a : c = \overline{CE} : \overline{EA};$$

přímka $\overline{BD}$ jest společná odvěsna pravoúhlých trojúhelníků ABD i BCD, tedy

(2) $$a^2 - \overline{CD}^2 = c^2 - \overline{AD}^2.$$

Z rovnic (1), (2) obdržíme

$$a = \overline{CE} \cdot \sqrt{\frac{\overline{DF}}{\overline{EF}}}$$

a tudíž z (1) ihned

$$c = \overline{AE} \cdot \sqrt{\frac{\overline{DF}}{\overline{EF}}}.$$

Do těchto vzorců lze snadně uvésti hodnoty dané e, m, n.

Tutéž úlohu řešili pp.: *Boh. Markl* z VIII. tř. I. českého r. g. v Praze, *Ferd. Zuna* z VIII. tř. v Písku, *Boh. Mašek* ze VI. tř. g. na Novém Městě v Praze, *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Ant. Radešínský* ze VII. tř. g. v Litomyšli, *Karel Rajdl* ze VI. tř. r. a *Josef Šumr* ze VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze.

Řešení úlohy 33. z roč. XIV.

(Zaslal p. *Ferd. Zuna*, stud. VIII. tř. v Písku.)

Dle supposice jest $a = m - b$, $c = n - b$, a dle věty Carnotovy

$$b^2 = (m - b)^2 + (n - b)^2 - 2(m - b)(n - b) \cos \beta,$$

tudíž známe stranu b, tedy i strany a, c.

Správné řešení zaslali pp.: *Boh. Markl* z VIII. tř. I. čes. r. g. v Praze, *Frant. Schöbl* ze VI. tř. g. v Jindř. Hradci, *Karel Rajdl* ze VI. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi a *Boh. Mašek* ze VI. tř. g. na Novém Městě v Praze.

Řešení úlohy 34. z roč. XIV.

Řešení I. Nazveme-li při trojúhelníku ABC strany a, b, c a podstavy b části m, n způsobené příčkou t úhel B půlící, budou v platnosti relace

(1) $$m : n = c : a$$

(2) $$ac = mn + t^2.$$

Poněvadž $m + n = b$, obdržíme z (1)

$$m = \frac{bc}{s}, \quad n = \frac{ab}{s}$$

a pak ze (2)

(3) $$ac = \frac{s^2 t^2}{s^2 - b^2}.$$

Ježto vzhledem k supposici

(4) $$a + c = s,$$

nabudeme řešením rovnic (3), (4) strany trojúhelníku

$$(\alpha) \quad \begin{aligned} a &= \frac{s}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{s^2 - (4t^2 + b^2)}{s^2 - b^2}}\right), \\ c &= \frac{s}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{s^2 - (4t^2 + b^2)}{s^2 - b^2}}\right). \end{aligned}$$

Řešení toto zaslali pp.: *J. Jiřík*, stud. v Č. Budějovicích a *Ant. Radešínský* ze VII. tř. g. v Litomyšli.

Řešení II. Vrchol B trojúhelníku ABC leží na obvodě ellipsy, jejíž linearná výstřednosť jest $\frac{\overline{AC}}{2} = \frac{b}{2}$, a velká osa $s = \overline{AB} + \overline{BC} = c + a$; délka normaly vedené k bodu B ellipsy jest pak dané t.

Majíce zření k řešení cenné úlohy (20) v roč. předchozím, str. 294., a to ku tvarům vzorců (1) stanovících délky průvodičů a ku tvaru vzorce pro délku normaly, nabudeme konečně hodnoty v (α) svrchu uvedené, jakožto délky průvodičů, které jsou stranami trojúhelníku žádaného.

Řešení toto podal p. *Boh. Markl* z VIII. tř. I. českého r. g. v Praze a *Boh. Mašek* ze VI. tř. g. na Novém Městě v Praze.

Mimo to správné řešení zaslali pp.: *Frant. Schöbl* ze VI. tř. g. v Jindř. Hradci, *Ferd. Zuna* z VIII. tř. v Písku, *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Karel Rajdl* ze VI. tř. r. a *Josef Sumr* ze VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze.*)

Z roč. XIV. řešení úlohy 22. zaslal též p. *Ant. Radešínský* ze VII. tř. g. v Litomyšli a *Karel Rajdl* ze VI. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, řešení úlohy 22., 23., 24. a 27. p. *Josef Sumr* ze VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, řešení úlohy 23. a 25. p. *Boh. Mašek* ze VI. tř. g. na Novém Městě v Praze.

*) Tímto jsme ukončili řešení úloh z roč. XIV.

Úloha 7.

Dána jest kružnice K středu o a bod p; ku tečně v bodě m sestrojené stanovena jest kolmice pq a určen bod n tak, že jest $mn \perp op$, $pq = pn$. Které jest geom. místo bodu n?

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 8.

Dána jest Pascalova závitnice rovnicí polárnou

$$r = a + b \cos \varphi;$$

každý paprsek jdoucí počátkem o protíná ji v dalších dvou bodech m, n. Ustanovíme-li vzhledem k bodům těmto bod p harmonický s o, jaké jest geom. místo bodu p? Jaký bude výsledek, je-li $b = a\sqrt{2}$ aneb $b = a$?

Týž.

Úloha 9.

V ose X dány jsou dva body úsečkami $p \pm q$. Ke každé kružnici jimi procházející přidružme přímku spojující střed její s počátkem soustavy a protínající ji ve dvou bodech.

a) Jest vyšetřiti geom. místo těchto průsečíků.

b) Jest ustanoviti geom. místo bodu harmonického s počátkem vzhledem k těmto dvěma průsečíkům.

Týž.

Úloha 10.

Na přezmeni T = 8 *kg* těžkém, jehož kratší rameno a_1 jest 5 cm, lze běhounem $p = 1$ *kg* těžkým zvážiti na nejvýš břímě $Q_1 = 6$ *kg*. Jak dlouhé (a_2) by muselo býti kratší jeho rameno, aby totéž závaží, zavěšeno na počátku stupnice, drželo onomu břemeni Q_1 rovnováhu? Na kolik (n) dílců by bylo pro tento případ rozvrhnouti stupnici, aby každý dílec znamenal přívažek p, a které nejtěžší břímě Q_2 by bylo možná takto proměněným přezmenem zvážiti?

Prof. *Vavřinec Jelínek.*

Úloha 11.

Přímý dutý kužel jest naplněn kapalinou o váze t a příklopen rovinnou deskou. Postavíme-li kužel na příklop, nevyteče voda. Která jest nejmenší váha T dutého kužele?

Týž.